Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 4.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

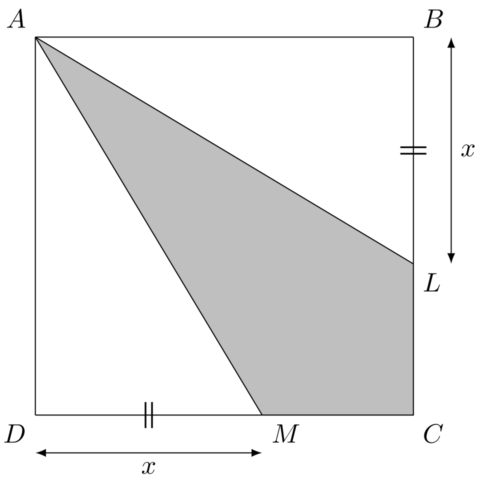
Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Dans ce problème, les figures qui sont dessinées ne sont pas représentées en vraie grandeur.

Partie A.

On souhaite partager un carré $ABCD$ de 10 cm de côté en trois parties comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



L est un point du segment $[BC]$ et M est le point du segment $[CD]$ tel que $DM = BL$. On note x la longueur, en centimètre, du segment $[BL]$.

1. Expliquez pourquoi $0 \leqslant x \leqslant 10$.

Justifions l'encadrement.

$M \in [DC]$ et $DC = 10$ donc $0 \leqslant x \leqslant 10$.

Enfin $DC = x$, donc

$$0 \leqslant x \leqslant 10.$$

2. Vérifier que si $x = 2$, alors l'aire du quadrilatère grisé $AMCL$ est égale à $80\ \text{cm}^2$.

Calculons l'aire $\mathscr{A}(ALCM)$ de $ALCM$ lorsque $x = 2$.

La partie grisée n'est pas une figure dont l'aire peut être calculée par une formule que nous serions supposés connaître. Nous allons partir de l'aire du carré $ABCD$ et enlever les aires des parties qui ne sont pas grisées.

* Calculons l'aire du carré $ABCD$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= AB^2\\ &= (10\ \text{cm})^2\\ &= 10^2\ \text{cm}^2\\ &= 100\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

* Calculons l'aire du triangle AMD.
Puisque AMD est rectangle en D :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AMD) &= \frac{1}{2} \times AD \times DM\\ &= \frac{1}{2} \times (10\ \text{cm}) \times (2\ \text{cm})\\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 2\ \text{cm} \cdot \text{cm}\\ &= 10\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

* Du fait de la symétrie de la configuration par rapport à (AC) il est clair que $\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(ABL)$.
* Des points précédents nous déduisons :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ALCM) &= \mathscr{A}(ABCD) - \mathscr{A}(AMD) - \mathscr{A}(ABL)\\ &= 100\ \text{cm}^2 - 10\ \text{cm}^2 - 10\ \text{cm}^2\\ &= (100 - 10 - 10)\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } x = 2 \text{ alors } \mathscr{A}(ALCM) = 80 \text{ cm}^2.}$$

3. Calculer l'aire du quadrilatère grisé $AMCL$ si $x = \dfrac{3}{5}$.

   Calculons $\mathscr{A}(ALCM)$ lorsque $x = \frac{3}{5}$.

   Toutes les longueurs étant exprimées en centimètres nous ferons désormais l'économie d'indiquer les unités utilisées.

   *

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AMD) &= \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{3}{5} \\ &= 3\end{aligned}$$

   *

$$\mathscr{A}(ALCM) = 100 - 3 - 3$$

$$\boxed{\text{Si } x = \tfrac{3}{5} \text{ alors } \mathscr{A}(ALCM) = 97 \text{ cm}^2.}$$

4. Montrer que l'aire du quadrilatère grisé $AMCL$, exprimée en centimètre carré, en fonction de x, est égale à $100 - 10x$.

   Exprimons $\mathscr{A}(ALCM)$ en fonction de x.

   procédons comme aux deux questions précédentes

   *

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AMD) &= \frac{1}{2} \times 10 \times x \\ &= 5x\end{aligned}$$

   *

$$\mathscr{A}(ALCM) = 100 - 5x - 5x$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ALCM) = 100 - 10x.}$$

5. Déterminer x pour que les trois parties aient la même aire.

   Nous avons déjà remarqué que les parties AMD et ABL ont la même aire.
   Il reste à avoir, par exemple, AMD et $ALCM$ de même aire.

   Déterminons x de sorte que $\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(ALCM)$.

   Dire que

$$\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(ALCM)$$

   équivaut successivement à :

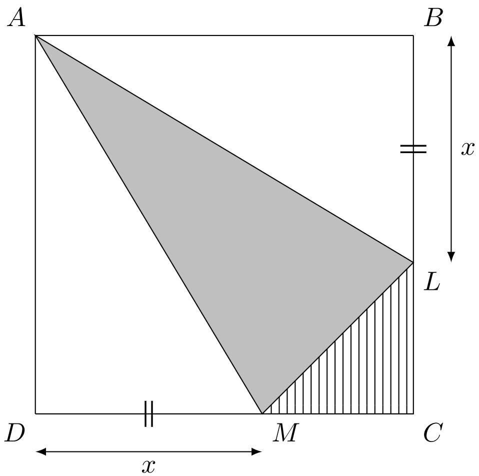
$$\begin{aligned}
5x &= 100 - 10x \\
5x + 10x &= 100 - 10x + 10x \\
15x &= 100 \\
\frac{15x}{15} &= \frac{100}{15} \\
x &= \frac{2^2 \times 5^2}{3 \times 5} \\
x &= \frac{2^2 \times 5}{3} \\
x &= \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

   Et comme $\frac{20}{3} = 6{,}666\ldots$ on a bien $0 \leqslant \frac{20}{3} \leqslant 10$.
   Nous pouvons donc conclure :

   $\boxed{\text{les trois parties ont la même aire si et seulement si } x = \frac{20}{3}.}$

Partie B.

Dans cette partie, le triangle hachuré a été supprimé pour obtenir trois triangles ADM, AML et ALB.



1. (a) Vérifier que si $x = 2$, alors l'aire du triangle hachuré MCL est égale à 32 cm^2.

Déterminons l'aire $\mathscr{A}(MCL)$ du triangle MCL lorsque $x = 2$.

Là encore nous ne préciserons pas les unités, les longueurs étant touts exprimées en centimètre.

MCL est rectangle en C donc :

$$\mathscr{A}(MCL) = \frac{1}{2} \times MC \times CL$$

Du fait de la symétrie de la figure, MCL est isocèle en C et donc :

$$\mathscr{A}(MCL) = \frac{1}{2} \times MC^2$$

Puisque $DC = 10$, $DM = x$ et $M \in [DC]$:

$$\mathscr{A}(MCL) = \frac{1}{2} \times (10 - x)^2$$

Comme $x = 2$:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(MCL) &= \frac{1}{2} \times (10 - 2)^2 \\ &= 32\end{aligned}$$

$$\mathscr{A}(MCL) = 32 \text{ cm}^2.$$

(b) Exprimer l'aire, en centimètre carré, de la partie hachurée MCL en fonction de x.

En reprenant le raisonnement de la question précédente mais sans substituer à x la valeur 2 nous obtenons :

$$\mathscr{A}(MCL) = \tfrac{1}{2}(10-x)^2 \text{ quelque soit } x \in [0;10].$$

(c) Montrer que l'aire du triangle grisé AML, exprimée en centimètre carré, est égale à $50 - \frac{x^2}{2}$.

Déterminons $\mathscr{A}(AML)$.

Remarquons que

$$\mathscr{A}(AML) = \mathscr{A}(AMCL) - \mathscr{A}(MCL)$$

Compte tenu des expressions obtenues pour $\mathscr{A}(AMCL)$ (question A.4) et $\mathscr{A}(MCL)$ (question précédente), nous en déduisons :

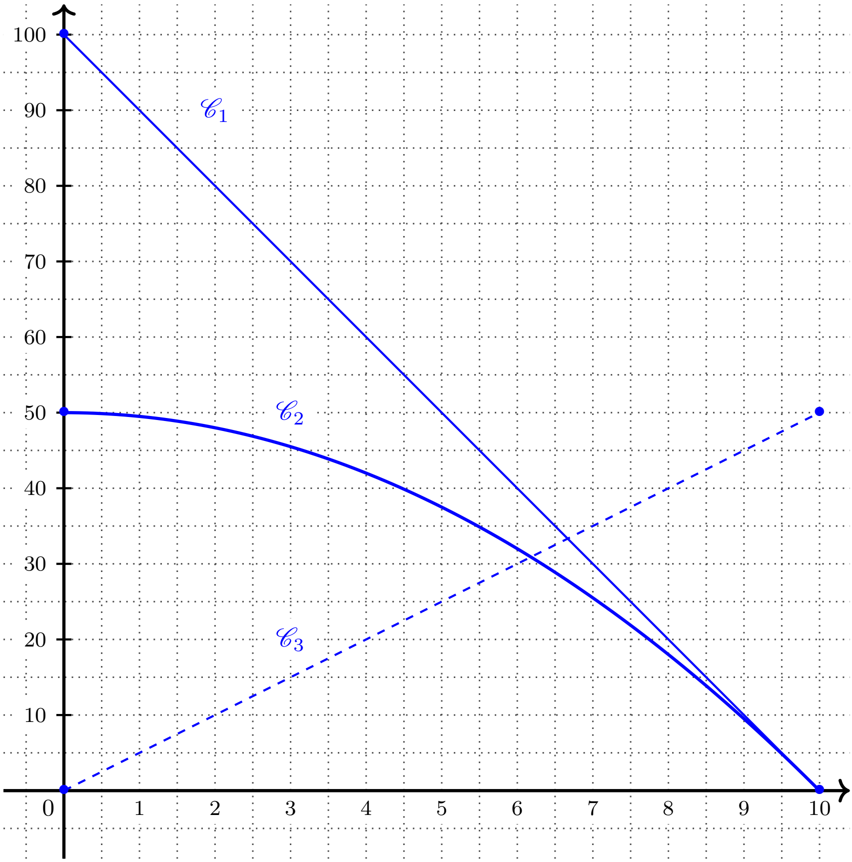
$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(AML) &= [100 - 10x] - \left[\frac{1}{2}(10-x)^2\right] \\
&= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2}\left(10^2 - 2 \times 10 \times x + x^2\right)\right] \\
&= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - 20x + 100\right)\right] \\
&= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2} \times x^2 - \frac{1}{2} \times 20x + \frac{1}{2} \times 100\right] \\
&= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2}x^2 - 10x + 50\right] \\
&= 100 - 10x - \frac{1}{2}x^2 + 10x - 50 \\
&= 50 - \frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0;10]$, $\mathscr{A}(MCL) = 50 - \frac{x^2}{2}$.

2. On a représenté dans le repère ci-dessous les fonctions f, g et h définies pour x entre 0 et 10 par :

$$f(x) = 5x, \quad g(x) = 100 - 10x, \quad h(x) = 50 - \frac{x^2}{2}.$$

On obtient les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.



(a) Chacune des fonctions f, g et h permet de déterminer, en fonction de x, l'aire d'un des polygones ADM, $AMCL$ et AML de la figure précédente. Associer à chaque fonction le polygone dont elle permet de déterminer l'aire. Justifier.

Comme nous l'avons établi en résolvant la question A.4 :

$f$est l'aire de AMD.

D'après la question A.4 :

g est l'aire de $AMCL$.

D'après la question B.1.c :

h est l'aire de AML.

(b) Associer chaque courbe $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ à la fonction quelle représente. Justifier.

Identifions la courbe représentative de chaque fonction.

* Première méthode : en reconnaissant la nature de la fonction à partir de son expression algébrique.

  Nous pouvons reconnaître les courbe représentatives à partir des natures des fonctions.

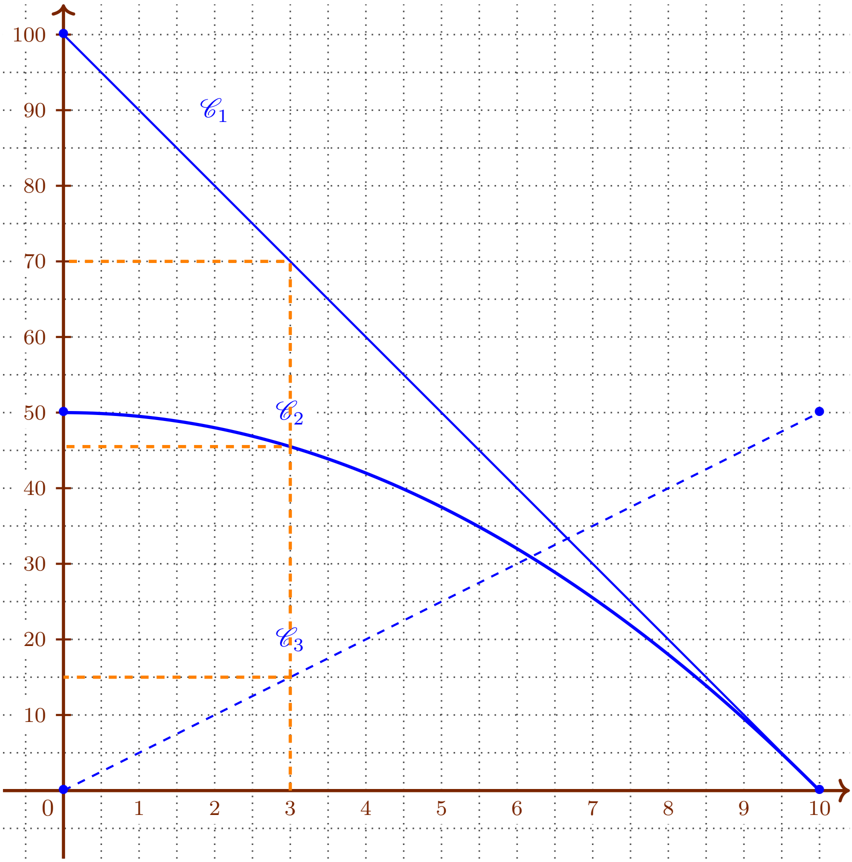
  h est une fonction polynomiale de degré deux donc sa courbe représentative est une parabole. Il ne peut s'agir que de $\mathscr{C}_2$.

  f et g sont des fonctions affines donc leurs courbes représentatives sont des droites : $\mathscr{C}_1$ ou $\mathscr{C}$. De plus le coefficient directeur de f est positif (5) alors que celui de g est négatif -10) donc la courbe représentative de f monte et celle de g descend.

* Tester un calcul d'image.

  En calculant nous obtenons : $f(3) = 5\times 3 = 15$, $g(3) = 100-10\times 3 = 70$ et $h(3) = 50 - \frac{3^2}{2} = 45{,}5$.

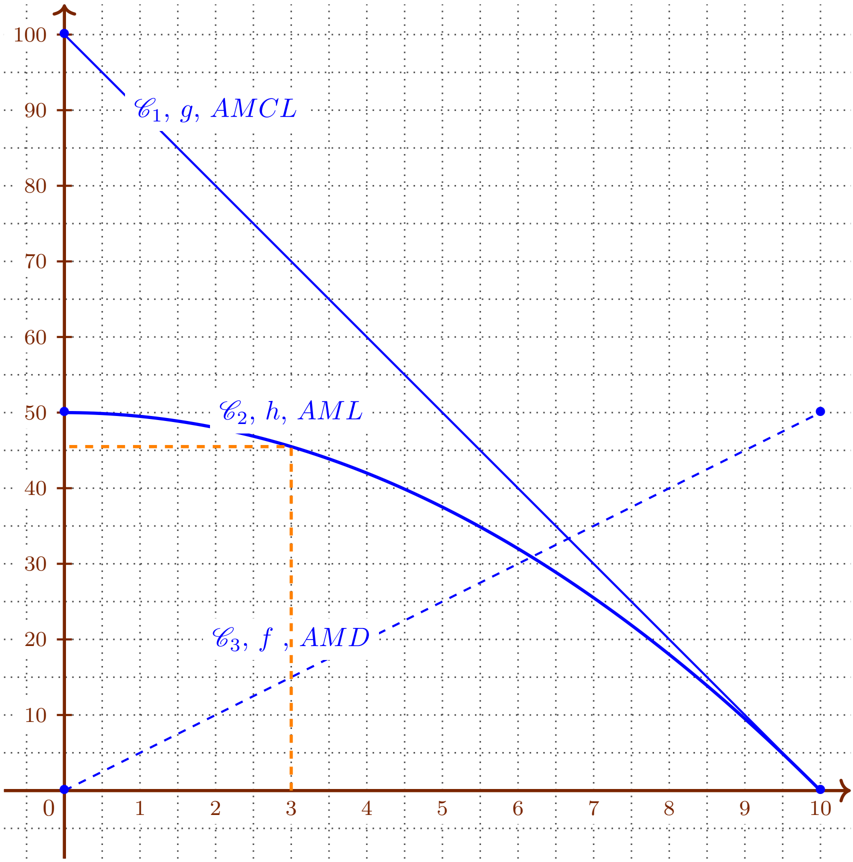
  Par lecture graphique nous pouvons identifier les courbes correspondant à ces calculs d'images.



Les courbes représentatives des fonctions f, g et h sont respectivement $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

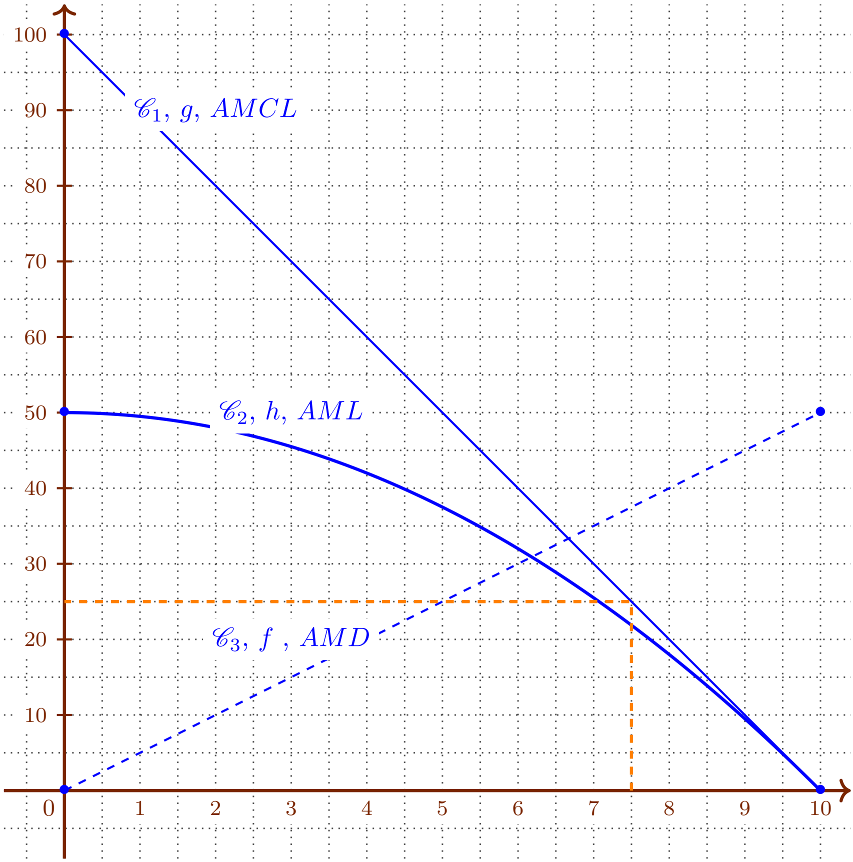
(c) Déterminer graphiquement l'aire du triangle grisé AML pour $x = 3$.

En reprenant les résultats des deux questions précédentes nous pouvons annoter le graphique.



L'aire de AML égale 45 cm^2 lorsque $x = 3$.

(d) Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle l'aire du quadrilatère grisé $AMCL$ de la partie A est égale à 25 cm^2 ?

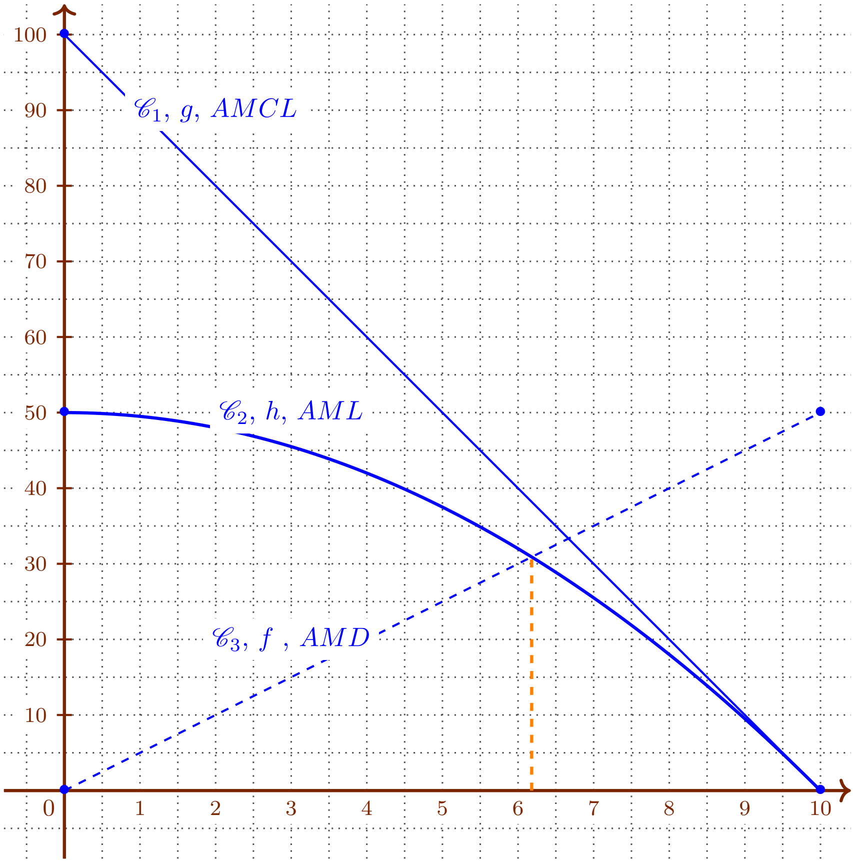


L'aire de $AMCL$ égale 25 cm^2 lorsque $x = 7{,}5$.

(e) Déterminer graphiquement la valeur de x pour que les trois triangles ABL, ADM et AML de la partie B aient la même aire. Justifier.

ABL et ADM ont la même aire donc la question pourrait être : déterminer x pour que les aires de AMD et AML soient égales.

Or ces aires sont égales lorsque les fonctions les représentant ont la même image ce qui correspond aux points d'intersections de leur courbes représentatives :

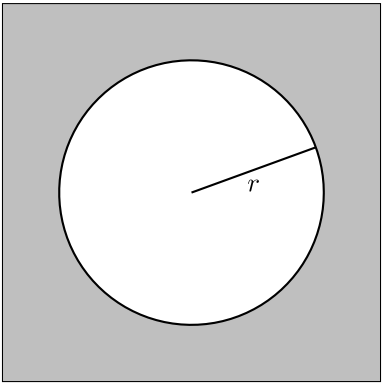


et donc :

les aires de ABL, ADM et AML sont égales lorsque $x = 6{,}2$.

Partie C.

On veut maintenant partager un carré de 10 cm de côté en deux parties. L'une d'entre elles est un disque intérieur ayant pour centre celui du carré et pour rayon r. La seconde partie est l'extérieur du disque, grisée sur la figure ci-dessous.



1. Entre quelles valeurs le rayon r peut-il varier ? Justifier.

   Le plus grand diamètre possible pour le cercle est la longueur du côté du carré, c'est-à-dire 10 cm, par conséquent

   $$\boxed{0 \leqslant r \leqslant 5.}$$

2. Déterminer pour quelle valeur du rayon r, exprimée en centimètre, l'aire du disque est égal au quart de celle du carré. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

   Notons $\mathscr{A}_1$ l'aire du carré et $\mathscr{A}_2$ celle du cercle.

   Déterminons r tel que : $\mathscr{A}_2 = \frac{1}{4}\mathscr{A}_1$.

   $$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{4}\mathscr{A}_1$$

   équivaut successivement à

   $$\begin{aligned} \pi r^2 &= \frac{1}{4} \times 10^2 \\ \pi r^2 &= 25 \\ \frac{\pi r^2}{\pi} &= \frac{25}{\pi} \\ r^2 &= \frac{25}{\pi} \end{aligned}$$

Puisque r est une longueur c'est un nombre positif donc :

$$r = \sqrt{\frac{25}{\pi}}$$
$$r = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{\pi}}$$

Pour que l'aire du cercle soit le quart de l'aire du carré il faut que $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

En arrondissant au centième :

$r \approx 2{,}82$ cm.

3. Pour déterminer l'aire du disque dans le carré en fonction de son rayon, on réalise avec un tableur la feuille de calcul suivante :

	A	B
1	**Rayon**	**Aire**
2	0	0
3	0,5	0,78539816
4	1	3,14159265
5	1,5	7,06858347
6	2	12,5663706
7	2,5	19,6349541
8	3	28,2743339
9	3,5	38,48451
10	4	50,2654825
11	4,5	63,6172512
12	5	78,5398163

(a) Quelle formule permettant de calculer l'aire du disque doit être écrite dans la cellule `B2` pour être ensuite copiée par glissement vers le bas ?
Note : on pourra utiliser la fonction PI() du tableur qui renvoie une valeur approchée du nombre π.

`= PI() * A2 ∧ 2`.

(b) Déduire de ce tableau, un encadrement d'amplitude minimale de la valeur r_0 du rayon du disque pour que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée.

Déterminons un encadrement de r_0.

Dire que l'aire du disque égale l'aire du carré signifie qu'elle doit être égale à $\frac{10^2}{2} = 50$.
En considérant cette partie :

9	3,5	38,48451
10	4	50,2654825

nous voyons que :

$$\boxed{3{,}5 \leqslant r_0 \leqslant 4.}$$

(c) Déterminer la valeur exacte de r_0, exprimée en centimètre, puis donner l'arrondi au centième.

Déterminons r_0 tel que : $\mathscr{A}_2 = \frac{1}{2}\mathscr{A}_1$.

$$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{2}\mathscr{A}_1$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
\pi r_0^2 &= \frac{1}{2} \times 10^2 \\
\pi r_0^2 &= 50 \\
\frac{\pi r_0^2}{\pi} &= \frac{50}{\pi} \\
r_0^2 &= \frac{50}{\pi}
\end{aligned}$$

Puisque r est une longueur c'est un nombre positif donc :

$$r_0 = \sqrt{\frac{50}{\pi}}$$
$$r_0 = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{\pi}}$$
$$r_0 = \frac{\sqrt{2 \times 5^2}}{\sqrt{\pi}}$$
$$r_0 = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5^2}}{\sqrt{\pi}}$$

Pour que l'aire du cercle soit le quart de l'aire du carré il faut que $r_0 = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$.

En arrondissant au centième :

$r_0 \approx 3{,}99$ cm.

(d) Déterminer la valeur exacte r_1 du rayon du disque telle que l'aire du disque soit égale au tiers de l'aire de la surface grisée et donner son arrondi au dixième de millimètre.

Déterminons r_1 tel que : $\mathscr{A}_2 = \frac{1}{3}\mathscr{A}_1$.

$$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{3}\mathscr{A}_1$$

équivaut successivement à

$$\pi r_1^2 = \frac{1}{3} \times 10^2$$
$$\pi r_1^2 = \frac{100}{3}$$
$$\frac{\pi r_1^2}{\pi} = \frac{\frac{100}{3}}{\pi}$$
$$r_1^2 = \frac{100}{3} \times \frac{1}{\pi}$$
$$r_1^2 = \frac{100}{3\pi}$$

Puisque r est une longueur c'est un nombre positif donc :

$$r_1 = \sqrt{\frac{100}{3\pi}}$$
$$r_1 = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{3\pi}}$$
$$r_1 = \frac{10}{\sqrt{2\pi}}$$

Pour que l'aire du cercle soit le tiers de l'aire du carré il faut que $r_1 = \frac{10}{\sqrt{3\pi}}$.

En arrondissant au centième :

$r_1 \approx 3{,}26$ cm.

II Deuxième partie (13 points).

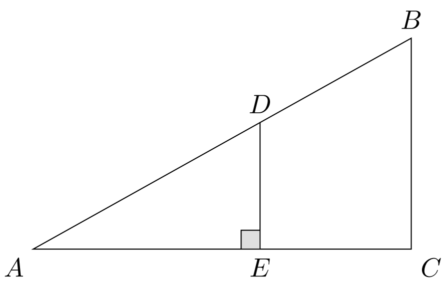
Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, D et E sont des points des côtés $[AB]$ et $[AC]$ tels que :

$$AD = 9 \text{ cm}, \quad DB = 6 \text{ cm}, \quad AC = 10 \text{ cm}, \quad EC = 4 \text{ cm}.$$



Affirmation 1 : « Le triangle ABC est rectangle en C. »

Un angle droit est visible sur la figure et on nous demande de vérifier qu'un triangle est rectangle. Il semble naturel de penser au théorème de Pythagore. Une rapide tentative nous montre que nous manquons de données pour ce théorème.

La figure évoque par contre une configuration de Thalès et même la configuration classique d'un agrandissement de figure.

* Configuration de Thalès. Les points A, D, B et A, E, C sont alignés dans cet ordre.
* Hypothèses pour la réciproque du théorème de Thalès.
  Nous avons d'une part

$$\begin{aligned}\frac{AE}{AC} &= \frac{AC - AE}{AC} \\ &= \frac{10-4}{10} \\ &= \frac{6}{10} \\ &= \frac{2\times 3}{2\times 5} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

  et d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{AD}{AB} &= \frac{AD}{AD+DB} \\ &= \frac{9}{9+6} \\ &= \frac{9}{15} \\ &= \frac{3\times 3}{3\times 5} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

  donc $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$.

Nous déduisons des deux points précédents, d'après la réciproque du théorème de Thalès que $(DE) \parallel (BC)$.

Comme de plus $(DE) \perp (AC)$ nous en déduisons $(BD) \perp (AC)$.

L'affirmation 1 est vraie.

2. **Affirmation 2** : « La somme de deux nombres entiers impairs consécutifs ne peut pas être un nombre premier. »

   Un nombre premier est un nombre qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Quelques essais permettent de remarquer que la somme de deux nombres impaires consécutifs est toujours divisible par 2.

   Soient m et n deux nombres entiers impairs consécutifs.
   nous avons alors :

$$\begin{aligned} m + n &= m + (m+2) \\ &= 2m + 2 \\ &= 2 \times m + 2 \times 1 \\ &= 2(m+1) \end{aligned}$$

   Donc $m + n$ est divisible par 2. Par conséquent $m + n$ n'est pas premier.

   L'affirmation 2 est vraie.

3. On suppose qu'une voiture perd chaque année 20 % de sa valeur.
   Affirmation 3 : « Dans 5 ans, la voiture vaudra encore plus d'un tiers de sa valeur initiale. »

   Pour déterminer l'évolution globale correspondant à des évolutions successives nous allons utiliser les coefficients multiplicateurs.

   Déterminons le taux d'évolution globale t_g en cinq ans.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 20 % est

$$\begin{aligned} CM_a &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-20}{100} \\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Donc le coefficient multiplicateur global correspondant à 5 baisses de 20 % est

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_a \times CM_a \times CM_a \times CM_a \times CM_a \\ &= CM_a^5 \\ &= 0{,}8^5 \\ &= 0{,}32768 \end{aligned}$$

Nous en déduisons le taux d'évolution global :

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM_g - 1) \\ &= 100 \times (0{,}32768 - 1) \\ &= -67{,}232 \end{aligned}$$

La valeur de la voiture a diminuée de 67,232 %. Plus que 66,666... % car, en effet $\frac{1}{3} = 0{,}666\ldots$

L'affirmation 3 est fausse.

4. Dans mon équipe, les trois quarts des joueurs sont mineurs et le tiers des majeurs a plus de 25 ans.

   Affirmation 4 : « Un équipier sur six a entre 18 et 25 ans. »

   Un quart des joueurs sont majeurs et deux tiers de ce quart à moins de 25 ans donc la proportion de personnes ayant entre 18 et 25 ans est :

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 2.

Dans une classe de 28 élèves, on souhaite comparer les tailles des filles et des garçons. Voici les données dont on dispose :

Taille des treize filles en centimètre : 149 155 161 142 167 163 157 150 165 152 161 159 160
Taille des garçons : Toutes les tailles sont des nombres entiers de centimètres et il n'y a pas deux garçons qui ont la même taille. On connaît également les indicateurs suivants : Étendue : 29 cm Moyenne : 159 cm Médiane : 161 cm.

1. Calculer l'écart, en centimètre, entre la taille moyenne des filles et la taille moyenne des garçons.

   Déterminons l'écart, $\overline{e}$, entre la taille moyenne des filles, $\overline{x}_f$, et la taille moyenne des garçons, $\overline{x}_g$.

   Par définition de la moyenne :

$$\begin{aligned}\overline{x}_f &= \frac{149 + 155 + 161 + \cdots + 160}{13} \\ &= 157\end{aligned}$$

   D'où

$$\begin{aligned}\overline{e} &= \overline{x}_g - \overline{x}_f \\ &= 159 - 157\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{e} = 2 \text{ cm.}}$$

2. Dans la classe, l'élève de plus petite taille mesure 140 cm. Quelle est la taille de l'élève le plus grand ?

   Déterminons le max de la classe.

   Puisque la plus petite fille mesure 142 cm c'est donc un garçon qui mesure 140 cm.

L'étendue chez les garçons étant de 29 cm, le plus grand garçon mesure 140 cm + 29 cm = 169 cm.

Comme la plus grande fille mesure 167 cm nous pouvons conclure.

max = 169 cm.

3. Dans la classe, combien d'élèves mesurent 162 cm ou plus ?

Remarquons que 3 filles mesurent 162 cm ou plus.

Il y a $28 - 13 = 15$ garçons.

De plus la médiane est de 161 cm ce qui signifie que $\frac{15}{2} + 0{,}5 = 8$ garçons ont une taille supérieure ou égale à 161 cm.

Or tous les garçons ont des tailles distinctes donc il y a 7 garçons dont la taille est supérieure ou égale à 162 cm.

En regroupant filles (3) et garçons (7) :

il y a 10 élèves qui mesurent plus de 10 cm.

4. Calculer la taille moyenne, en centimètre, arrondie au millimètre, des élèves de cette classe.

Déterminons la moyenne $\overline{x}$.

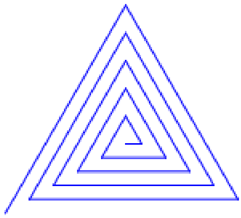
Il s'agit d'un calcul de moyenne de moyennes. Il faut être prudent et ne pas oublier de prendre en compte l'effectif correspondant à la moyenne.

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{13 \times \overline{x}_f + 15 \times \overline{x}_g}{28} \\
&= \frac{13 \times 157 + 15 \times 159}{28} \\
&= \frac{2213}{14} && \approx 158{,}07142
\end{aligned}$$

$\overline{x} \approx 158{,}1$ cm.

Exercice 3.

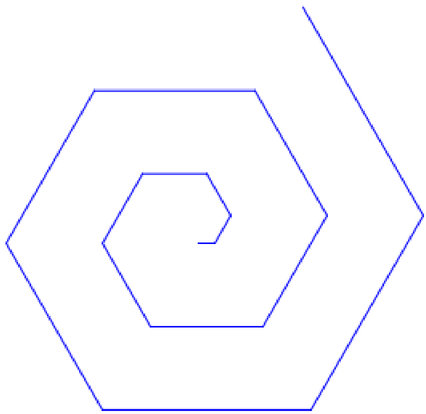
Un élève veut obtenir la figure ci-contre à l'aide du logiciel de programmation Scratch :



Le plus petit segment mesure 10 pixels et chaque segment mesure 10 *pixels de plus que le précédent.*

Pour télécharger le programme Scratch il suffit de cliquer dessus.

1. Un élève écrit le programme suivant et obtient la figure ci-dessous.



Que doit-il modifier dans son programme pour obtenir la figure attendue ? Aucune justification n'est attendue.

2. Quelle est la longueur, exprimée en pixel, du dernier segment tracé ?

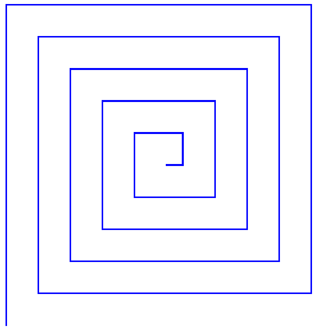
   La longueur suit une progression arithmétique (on parle de suite arithmétique) de raison 10 : à chaque étape la longueur variable est augmentée de 10.

   La valeur initiale de la *longueur* est 10 puis dans la boucle elle est augmentée 15 fois de 10. Autrement dit la *longueur* du dernier segment tracé est :

$$longueur = 10 + 15 \times 10$$

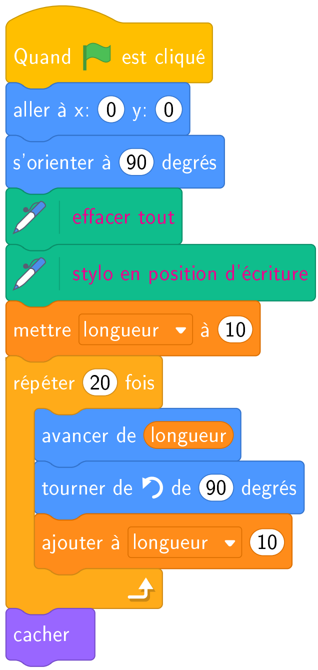
   La longueur du dernier segment est 160 pixels.

3. Que doit-on modifier dans le programme précédent pour obtenir la spirale suivante ?



Le plus petit segment mesure 10 pixels et chaque segment mesure 10 pixels de plus que le précédent.

Voici une modification possible :



III Troisième partie (14 points).

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

Situation 1.

Extrait du Bulletin officiel n° 31 du 30-7-2020 pour le cycle 3 : « connaître des procédures élémentaires de calcul, notamment : multiplier par 5*, par* 25*, par* 50*, par* 0,1*, par* 0,5 *».*

Dans le cadre d'une séance de calcul mental, un enseignant propose à des élèves de CM1 de revenir sur les procédures qu'ils ont utilisées pour effectuer le calcul : 5×14. Ci-dessous sont présentées les productions de Paco, Léa, Julie et Ali.

Paco	**Léa**
$5 \times 4 = 20$ $5 \times 1 = 5 + 2 = 7$ $14 \times 5 = 70$	$10 \times 5 = 50$ $11 \times 5 = 50$ $12 \times 5 = 60$ $13 \times 5 = 65$ $14 \times 5 = 70$
Julie	**Ali**
$14 + 14 + 14 + 14 + 14 = 70$	$14 \times 5 = 70$ J'ai trouvé ce résultat car j'ai fait $5 \times 10 + 5 \times 4 = 70$

1. Pour chacun des quatre élèves, analyser les procédures et expliciter les faits numériques sollicités.

2. Que peut proposer l'enseignant pour encourager Julie à abandonner sa procédure additive ?

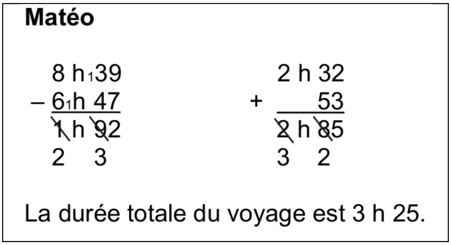
3. Indépendamment des nombres en jeu, comment l'enseignant peut-il procéder pour introduire la procédure suivante : $5 \times 14 = 10 \times 14 : 2$?

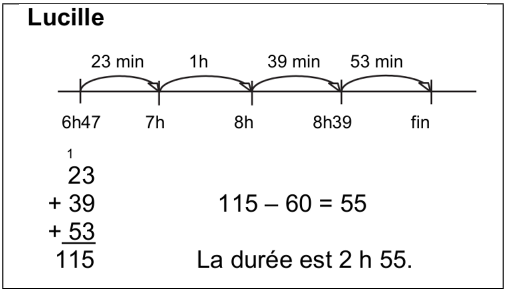
4. Proposer une trace écrite à faire noter dans les cahiers lors de l'institutionnalisation de la procédure introduite dans la question 3.

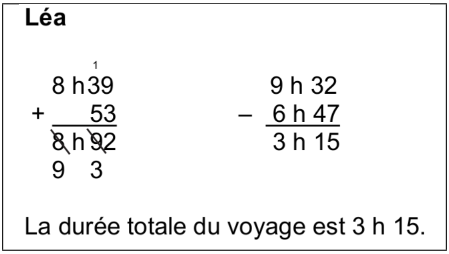
Situation 2.

Une enseignante de CM2 propose le problème suivant à ses élèves :

« Un touriste prend un train à Paris à 6 h 47, le train s'arrête une première fois en gare de Bourg-en-Bresse d'où il repart à 8 h 39. Le train arrive en gare de Bellegarde-sur-Valserine 53 minutes plus tard. Quelle a été la durée totale du voyage ? »







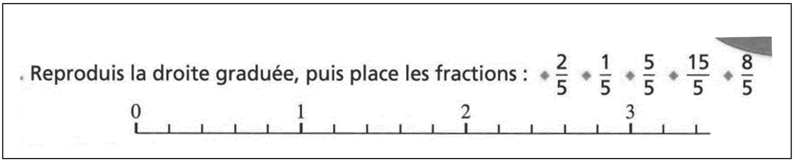
1. Dans un tableau, analyser chacune des 3 productions d'élèves en termes de réussites et d'erreurs.

2. Quelle aide peut-on apporter à Lucille pour qu'elle comprenne et remédie à son ou ses erreur(s) ?

3. Parmi les procédures utilisées par ces 3 élèves, laquelle privilégier pour une mise en commun en classe de CM2 ? Justifier ce choix.

Situation 3.

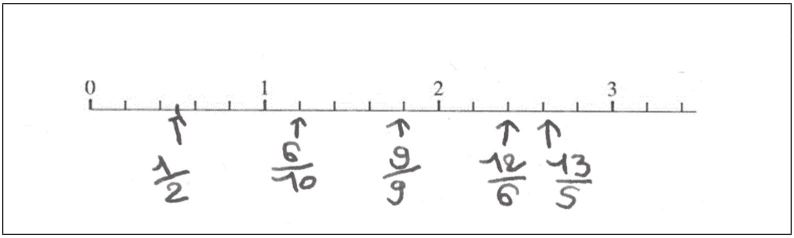
1. Voici une situation proposée par le manuel « Pour comprendre les maths » - Hachette éducation - CM1 :



Cet exercice a été réussi par l'ensemble des élèves d'une classe de CM1. L'enseignant propose cette même situation avec les fractions :

$$\frac{13}{5}; \ \frac{6}{10}; \ \frac{12}{6}; \ \frac{1}{2}; \ \frac{9}{9}$$

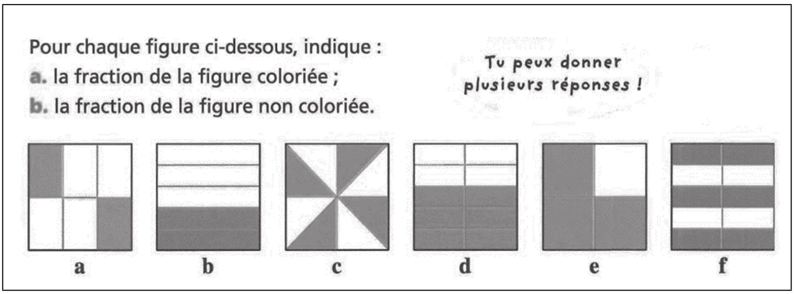
Voici les réponses de Léo :



(a) Analyser les réponses proposées par Léo, en repérant ses erreurs et réussites.

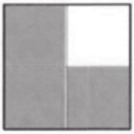
(b) Expliquer la différence de réussites aux deux tâches proposées.

2. Voici une nouvelle situation extraite du même manuel :



(a) Donner un intérêt et une limite de cet exercice par rapport à l'exercice proposé à la question 1 précédente.

(b) L'enseignant propose de comparer les figures **e**, **g** et une nouvelle figure **h**.

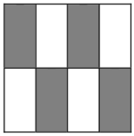

e


g


h

Quel est l'intérêt de proposer ces trois figures ?

(c) L'enseignant décide ensuite de proposer la figure **i**.


i

Lilou trouve $\frac{4}{8}$. Tom dit : « ce n'est pas possible car c'est la figure **c** et elles ne sont pas pareilles. »
Comment l'enseignant peut-il amener Tom à comprendre que son affirmation est fausse ?