Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 3.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Partie A : choix du château d'eau.

1. Déterminons les proportions de voix.

   Notons p_A la proportion de voix recueillies par le modèle A.
   Pour une proportion l'idée est de faire $\frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$.
   En notant E l'ensemble des habitants du hameau et A l'ensemble de ceux qui ont choisi le modèle A nous avons :

$$p_A = \frac{|A|}{|E|}$$

   en notant $|A|$ le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre de personne ayant fait le choix du modèle A.

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{12}{12+60+18} \\ &= \frac{2}{15} \\ &= 0{,}1333\ldots \\ &\approx 13~\% \end{aligned}$$

   En procédant de même pour les deux autres modèles :

Types de château d'eau	Modèle A	Modèle B	Modèle C
Proportion	13 %	67 %	20 %

2. (a) Calculons la consommation moyenne $\overline{x}$.

   La moyenne peut être obtenue par diverses formules. Ici il s'agit simplement de partager équitablement la consommation totale entre chaque foyer.

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{10\,500~\text{m}^3}{12+60+18} \\ &= \frac{350}{3}~\text{m}^3 \\ &= 116{,}666\ldots~\text{m}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} \approx 116{,}67 \text{ m}^3.}$$

(b) Calculons la consommation annuelle estimée du hameau C_{ae}.

Chacun des 17 nouveaux foyers consommera 116,67 m^3. La consommation de ces 17 nouveaux foyers sera de

$$17 \times 116{,}67 \text{ m}^3 = 1983{,}39 \text{ m}^3$$

Donc en prenant en compte tout le hameau :

$$C_{ae} = 10\,500 \text{ m}^3 + 1983{,}39 \text{ m}^3$$

$$\boxed{C_{ae} = 12\,483{,}39 \text{ m}^3.}$$

3. (a) Déterminons la consommation moyenne en 5 jours C_5.

On fait implicitement l'hypothèse que la consommation quotidienne est toujours la même ce qui nous permet de répondre à la question par proportionnalité. De plus nous ferons l'hypothèse simplificatrice d'une année à 365 jours plutôt qu'à 365,25 jours.

Par proportionnalité :

Jours	365	5
Consommation (m^3)	12 483,39	171,01

$$\boxed{C_5 \approx 171{,}01 \text{ m}^3.}$$

(b) Calculons le volume V_s de la sphère.

D'après la formule de l'énoncé :

$$\begin{aligned} V_S &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{7 \text{ m}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{7}{2}\right)^3 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$V_S \approx 51 \text{ m}^3.$$

(c) $V_S < 171{,}01 \text{ m}^3$ donc

Ce réservoir ne répond pas aux souhaits du maire.

4. Déterminons le temps de remplissage t_r.

Nous pouvons raisonner par proportionnalité :

Volume (m^3)	40	$\frac{3}{4} \times 180 = 135$
Temps (h)	1	3,375

Ainsi

$$\begin{aligned} t_r &= 3{,}375 \text{ h} \\ &= 3 \text{ h} + 0{,}375 \text{ h} \\ &= 3 \text{ h} + 0{,}375 \times 60 \text{ min} \\ &= 3 \text{ m} + 22{,}5 \text{ min} \\ &= 3 \text{ h} + 22 \text{ min} + 0{,}5 \text{ min} \end{aligned}$$

$$t_r = 3 \text{ h} + 22 \text{ min} + 30 \text{ s}.$$

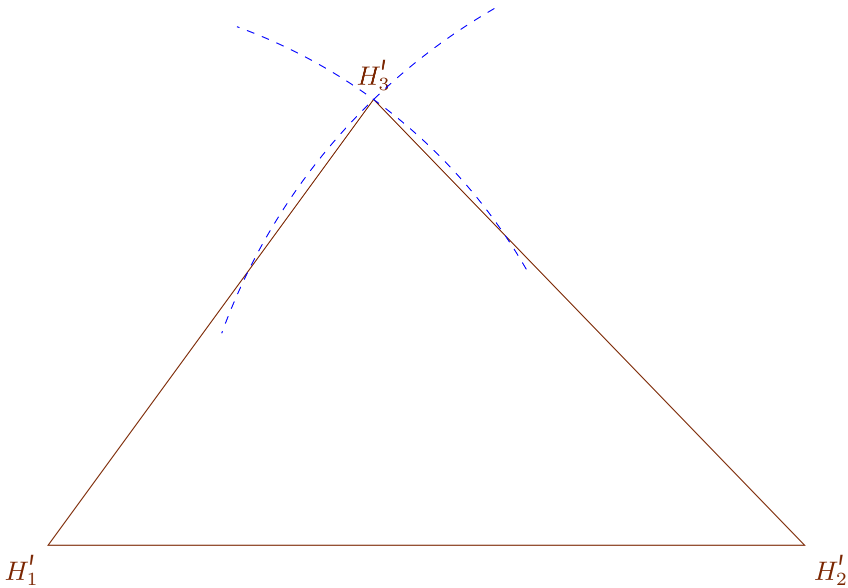
Partie B : nuisances et impact paysager.

1. (a) En notant H_1', H_2' et H_3' les points correspondant respectivement H_1, H_2 et H_3 après la mise à l'échelle nous avons, par exemple :

$$\begin{aligned} H_1'H_2' &= \frac{1}{10\,000} \times 1 \text{ km} \\ &= \frac{1}{10\,000} \times 1 \times 100\,000 \text{ cm} \\ &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

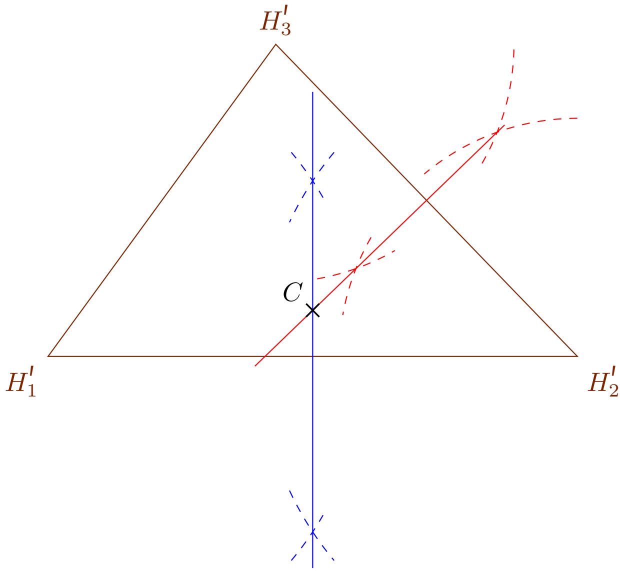
De même ou en raisonnant par proportionnalité

Réel (km)	1	0,820	0,730
À l'échelle (cm)	10	8,2	7,3

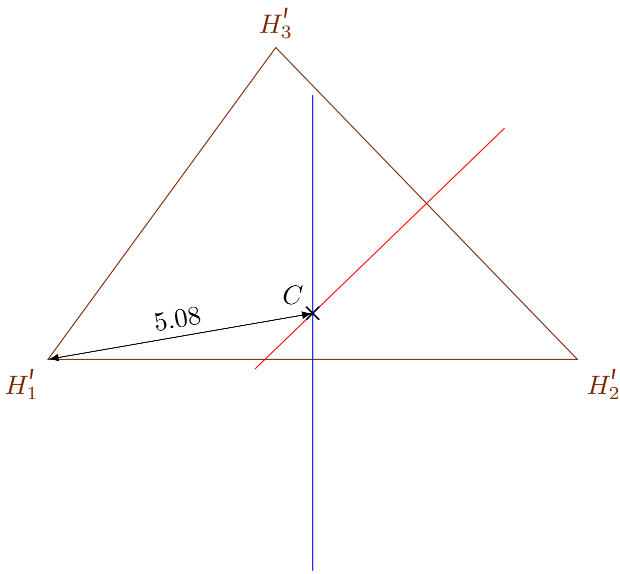


(b) Si le point C est équidistant des points H_1, H_2 et H_3 alors cela signifie qu'il est le centre du cercle circonscrit au triangle $H_1H_2H_3$. Autrement dit C est le point d'intersection des médiatrices du triangle.

La figure suivante est une réduction à l'échelle $7/10$ *de la figure demandée.*



(c) *La figure suivante est une réduction à l'échelle 7/10 de la figure demandée.*



Donc par proportionnalité

Réel (km)	1	0,508
À l'échelle (cm)	10	5,08

Entre le château d'eau et les habitations la distance est approximativement de 510 m.

2. Calculons JN.

* Les points I, N, M d'une part et I, J, B d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* (JN) et (MB) sont des verticales donc $(JN) \parallel (MB)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{JN}{BM} = \frac{IN}{IM}.$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{JN}{BM} \times BM &= \frac{IN}{IM} \times BM \\
JN &= \frac{20 \text{ m}}{510 \text{ m}} \times (KB - KM) \\
JN &= \frac{20}{510} \times (45 \text{ m} - 1{,}80 \text{ m}) \\
JN &= \frac{20}{510} \times 43{,}2 \text{ m} \\
&= \frac{144}{85} \text{ m}
\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
HJ &= HN + NJ \\
&= 1{,}80 \text{ m} + \frac{144}{85} \text{ m} \\
&\approx 3{,}49411 \text{ m par troncature.}
\end{aligned}$$

$HJ \approx 3{,}49$ cm.

Partie C : entretien du château d'eau.

1. Déterminons la quantité Q_c de chlore nécessaire.

$$\begin{aligned} Q_c &= \left(180 \text{ m}^3\right) \times \left(0{,}1 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}\right) \\ &= (180 \times 1000 \text{ L}) \times \left(0{,}1 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}\right) \\ &= 180 \times 1000 \times 0{,}1 \text{ L} \cdot \text{mg} \cdot \text{L}^{-1} \\ &= 18000 \text{ mg} \end{aligned}$$

$$\boxed{Q_c = 18 \text{ g.}}$$

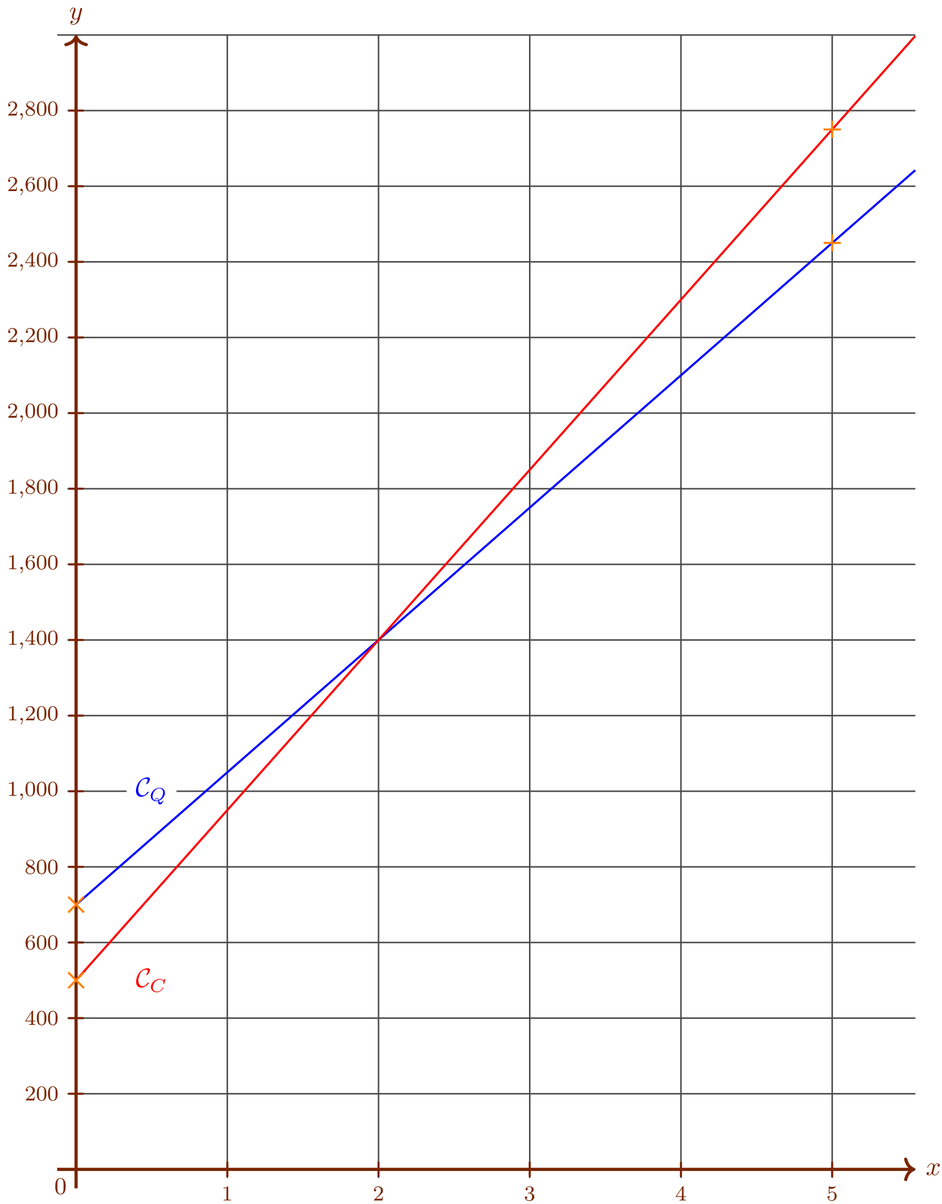
2. (a) Pour une année il faudra payer l'abonnement de 700 € auquel il faudra ajouter 350 € pour chaque intervention. Donc pour x interventions :

$$\boxed{Q(x) = 350 \times x + 700.}$$

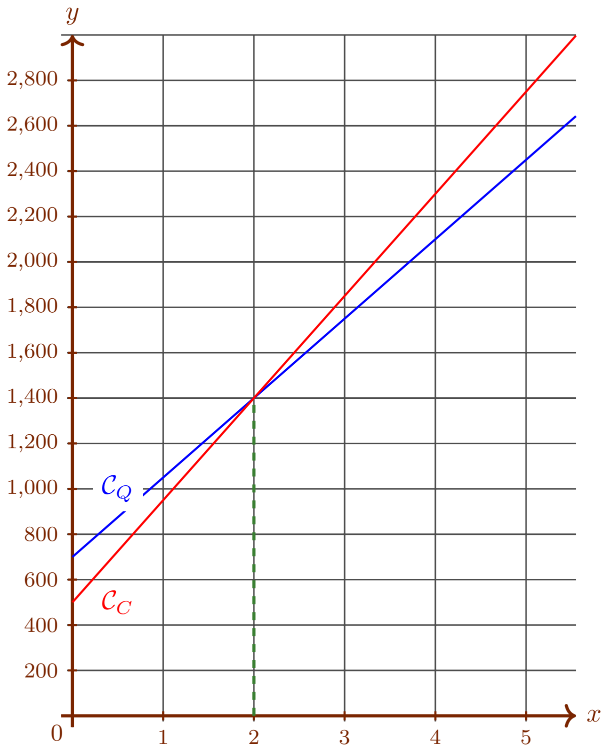
(b) En procédant comme à la question précédente

$$\boxed{C(x) = 450x + 500.}$$

(c) La représentation graphique d'une fonction f est formée de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$.
Les fonctions que nous devons représenter sont des fonctions affines donc leurs courbe représentatives sont des droites. Il nous suffit de trouver les coordonnées de deux points distincts pour chacune d'entre elles.
$Q(0) = 700$ et $Q(5) = 2450$. $C(0) = 500$ et $C(5) = 2750$.


y
2,800
2,600
2,400
2,200
2,000
1,800
1,600
1,400
1,200
1,000
800
600
400
200
0
1
2
3
4
5
x
$\mathcal{C}_Q$
$\mathcal{C}_C$

(d)



Résolvons $C(x) = Q(x)$ dans l'ensemble des nombres réels positifs.

$$\begin{aligned}
C(x) = Q(x) &\iff 450x + 500 = 350x + 700 \\
&\iff 450x + 500 - 500 = 350x + 700 - 500 \\
&\iff 450x = 350x + 200 \\
&\iff 450 - 350x = 350x + 200 - 350x \\
&\iff 100x = 200 \\
&\iff \frac{100x}{100} = \frac{200}{100} \\
&\iff x = 2
\end{aligned}$$

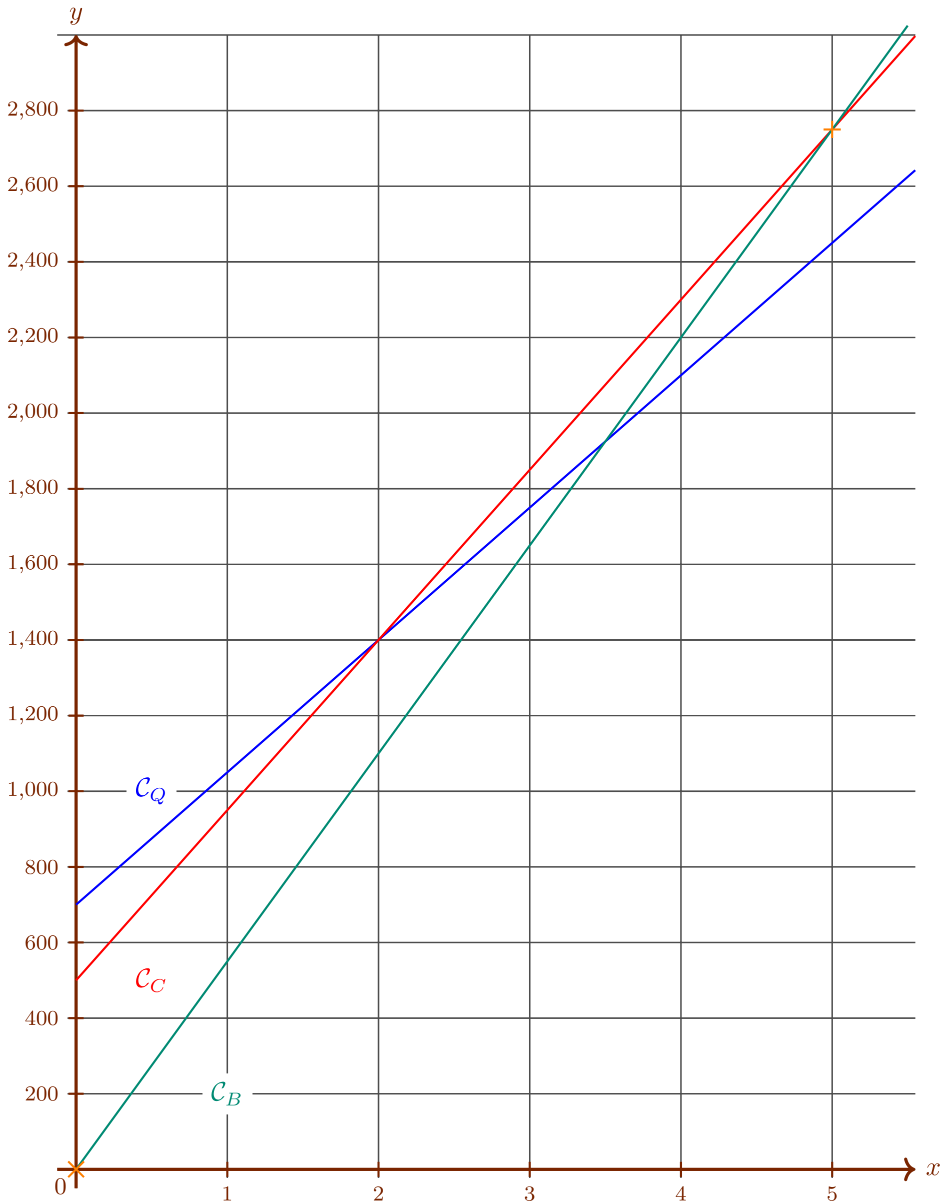
La facture sera la même pour deux interventions annuelles.

(e) Par lecture graphique, pour plus de deux interventions annuelles, la courbe représentative de Q est en dessous de celle de C donc

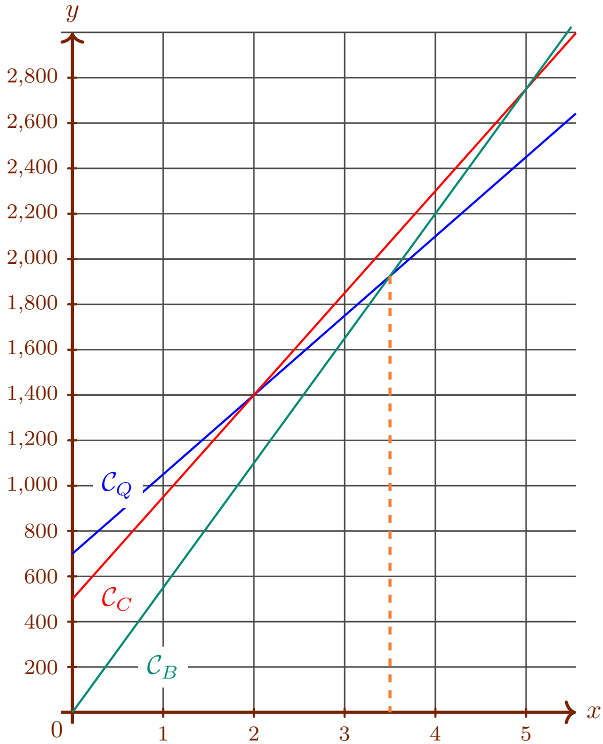
pour plus de deux interventions l'entreprise *Qualiteau* est plus avantageuse.

3. (a) $B(x) = 550x$.

(b) La fonction B est une fonction affine donc sa courbe représentative est une droite. De plus $B(0) = 0$ et $B(5) = 2750$.



(c) Tant que la courbe représentative de B reste en dessous de celles de C et Q cela signifie que les valeurs prisent par B sont inférieures à celles de C et Q.



Donc d'après la représentation graphique il faut moins de 3,5 interventions.

> *Bellacqua* pourra être choisie pour un maximum de trois interventions.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Notons $C0$ le nombre choisi et dressons le tableau d'état des variables correspondant à cet algorithme.

Instructions	C_0	C_1	C_2	$C_1 - C_2$
Choisir un entier positif	5			
Calcul du carré de l'entier qui suit C_0	5	$6^2 = 36$		
Calcul du carré de l'entier qui précède C_0	5	36	$4^2 = 16$	
Calcul de $C_1 - C_2$	5	36	16	$36 - 16 = 2.$

En entrant 5 le programme de calcul renvoie 20.

2. Notons $C0$ le nombre choisi et dressons le tableau d'état des variables correspondant à cet algorithme.

Instructions	C_0	C_1	C_2	$C_1 - C_2$
Choisir un entier positif	x			
Calcul du carré de l'entier qui suit C_0	x	$(x+1)^2$		
Calcul du carré de l'entier qui précède C_0	x	$(x+1)^2$	$(x-1)^2$	
Calcul de $C_1 - C_2$	x	$(x+1)^2$	$(x-1)^2$	$(x+1)^2 - (x-1)^2.$

Or, grâce à une identité remarquable nous aurions pu faire le choix de tout développer, là encore, avec des identités remarquables, mais la factorisation semble moins longue) :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x-1)^1 &= [(x+1)-(x-1)] \times [(x+1)+(x-1)] \\ &= [x+1-x+1] \times [x+1+x-1] \\ &= 2 \times 2x\end{aligned}$$

donc

en entrant x le programme de calcul renvoie $4x$.

3. Résolvons $4x = 842$ dans $\mathbb{N}$.

Procédons à un raisonnement par analyse-synthèse.
Nous recherchons un nombre x tel que

$$4x = 842$$

Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{4x}{4} &= \frac{842}{4} \\ x &= \frac{421}{2}\end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'un nombre possible c'est $\frac{421}{2}$, mais, 421 n'étant pas pair, $\frac{421}{2}$ n'est pas un entier.

Il n'est pas possible d'obtenir 842 avec le programme.

Ou plus sobrement : il est clair que 842 n'est pas un multiple de 4.

4. Résolvons $4x = 842$ dans $\mathbb{N}$.

   Nous recherchons un nombre x tel que

$$4x = 2^{98}$$

   Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{4x}{4} &= \frac{2^{98}}{4} \\ x &= \frac{2^{98}}{2^2} \\ x &= 2^{98-2} \\ x &= 2^{96} \end{aligned}$$

   Et comme 2^{98} est bien un entier naturel :

   pour que le programme renvoie 2^{98} il faut choisir 2^{96} comme nombre de départ.

5. Vous pouvez télécharger les scripts : script 1, script 2 et script 3.

   Le script 2 calcul $(x-1)^2 - (x+1)^2$ sinon

   les scripts 1 et 3 correspondent au programme de calcul proposé.

Exercice 2.

1. (a) Calculons le nombre de garçon, n_g, dans cette classe.

   Il s'agit d'appliquer une proportion.

$$n_g = \frac{40}{100} \times 30$$

$$\boxed{n_g = 12.}$$

(b) Déterminer le nombre, n_{gnu}, de garçons qui ne sont pas des enfants uniques.

$\frac{1}{3}$ des garçons sont des enfants uniques donc $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ des garçons ne sont pas de enfants uniques :

$$\begin{aligned} n_{gnu} &= \frac{2}{3} \times n_g \\ &= \frac{2}{3} \times 12 \end{aligned}$$

$$\boxed{n_{gnu} = 8.}$$

(c) D'après les questions précédentes :

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique			
Enfant non unique		8	
Total		12	30

On complète alors par addition sur les lignes et les colonnes.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique		4	
Enfant non unique		8	
Total	18	12	30

Puisque 25 %, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ des enfants uniques sont des garçons, il y a donc $4 \times 4 = 16$ enfants uniques.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique		4	16
Enfant non unique		8	
Total	18	12	30

On complète alors par addition sur les lignes et les colonnes.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique	12	4	16
Enfant non unique		8	14
Total	18	12	30

Finalement :

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique	12	4	16
Enfant non unique	6	8	14
Total	18	12	30

2. (a) Choisissons un modèle probabiliste cohérent avec la situation.
Notons Ω l'ensemble des 30 élèves et munissons-le de l'équiprobabilité (chaque enfant à la même chance d'être choisi).
Notons encore A l'événement « obtenir un enfant unique ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, que l'univers contient 30 issues et que A est réalisé par 16 issues (d'après le tableau précédent) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{16}{30} \\ &= \frac{4}{15} \\ &\approx 0{,}266 \text{ par troncature}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \approx 0{,}27.}$$

(b) Notons encore B l'événement « obtenir un garçon qui est enfant unique ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, que l'univers contient 30 issues et que B est réalisé par 4 issues (d'après le tableau précédent) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{4}{30} \\ &= \frac{2}{15} \\ &\approx 0{,}133 \text{ par troncature}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \approx 0{,}13.}$$

(c) Choisissons un modèle probabiliste cohérent avec la situation.
Notons Ω' l'ensemble des 18 filles et munissons-le de l'équiprobabilité (chaque fille à la même chance d'être choisie).
Notons encore C l'événement « obtenir un enfant unique ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, que l'univers contient 18 issues et que C est réalisé par 12 issues (d'après le tableau précédent) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \frac{12}{19}\\ &= \frac{2}{3}\\ &\approx 0{,}666 \text{ par troncature}\end{aligned}$$

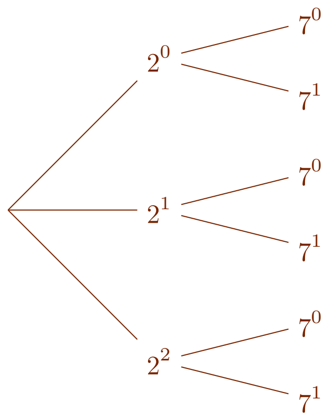
$$\boxed{\mathbb{P}(C) \approx 0{,}67.}$$

Il était bien sûr possible de raisonner en parlant de probabilité conditionnelle.

Exercice 3.

1. Déterminons les diviseurs de 28.

   Procédons à sa décomposition en facteurs premiers : $28 = 2^2 \times 7$.



Donc l'ensemble des diviseurs de 28 est $\{1; 7; 2; 14; 4; 28\}$.
Or $\frac{1+7+2+14+4+28}{2} = 28$ donc

L'affirmation 1 est vraie.

2. Pour que ce résultat soit vrai il faudrait que 6 et 9 soient premiers ente eux. Ce n'est pas le cas démontrons que l'affirmation est fausse en exhibant un contre-exemple.

   18 est divisible par 6 et par 9 mais il n'est clairement pas divisible par 54.

   L'affirmation 2 est fausse.

3. Nous pouvons penser aux situations dévolution successives pour imaginer que ce ne serait peut être pas vrai.

   Considérons un rectangle dont les côtés mesurent $\ell = 20$ et $L = 30$.
   Si nous détaillons ici le calcul des coefficients multiplicateurs les augmentations et diminutions de 10 % se calculent aisément mentalement.
   Le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 10 % est

$$\begin{aligned} CM_b &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-10}{100} \\ &= 0{,}9 \end{aligned}$$

Celui correspondant à une augmentation de 10 % est

$$\begin{aligned} CM_a &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{10}{100} \\ &= 1{,}1 \end{aligned}$$

Après une diminution de 10 % sa largeur est $\ell' = 0{,}9 \times 20 = 18$ et après une augmentation de 10 % sa longueur est $L' = 1{,}1 \times 30 = 33$.
$\ell \times L = 20 \times 30 = 600$ mais $\ell' \times L' = 18 \times 33 = 594$.
ainsi $\ell \times L \neq \ell' \times L'$.

L'affirmation 3 est fausse.

4. Le périmètre du rectangle originale est

$$\begin{aligned} p &= 2 \times (L + \ell) \\ &= 2\,(5 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) \\ &= 2 \times 9 \text{ cm} \\ &= 18 \text{ cm} \end{aligned}$$

En procédant comme à la question précédente :

$$\begin{aligned} L' &= 1{,}1 \times L \\ &= 1{,}1 \times 5 \text{ cm} \\ &= 5{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \ell' &= 0{,}9 \times \ell \\ &= 0{,}9 \times 4 \text{ cm} \\ &= 3{,}6 \text{ cm} \end{aligned}$$

D'où le nouveau périmètre

$$
\begin{aligned}
p' &= 2 \times (L' + \ell') \\
&= 2\,(5{,}5 \text{ cm} + 3{,}6 \text{ cm}) \\
&= 2 \times 9{,}1 \text{ cm} \\
&= 18{,}2 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

Ainsi : $p < p'$.

L'affirmation 4 est fausse.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1. (a)
   (b)
2. (a)
   (b)
3.

Situation 2.

1.
2.
3.

Situation 3.

1.
2.
3.
4. (a)
   (b)