Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 3.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Mme Bobinec, M. Chandelier, Céline, Mme Monjole, Mme Duplessy pour la relecture et les corrections apportées.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Suite à des problèmes récurrents d'alimentation en eau pour un des hameaux de sa commune, le maire projette de faire construire un château d'eau.

Partie A : choix du château d'eau.

1. Afin de faire un choix esthétique parmi trois modèles proposés, le maire décide de consulter ses concitoyens. Chaque foyer peut voter une fois, tous les foyers ont voté.

   Voici les résultats de la consultation :

Types de château d'eau	Modèle A	Modèle B	Modèle C
Nombre de foyers	12	60	18

   Calculer la proportion, en pourcentage, de voix recueillies parmi les foyers de ce hameau pour chacun des trois modèles proposés. Les pourcentages seront arrondis à l'unité de pourcentage.

   Déterminons les proportions de voix.

   Notons p_A la proportion de voix recueillies par le modèle A.
   Pour une proportion l'idée est de faire $\frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$.
   En notant E l'ensemble des habitants du hameau et A l'ensemble de ceux qui ont choisi le modèle A nous avons :

$$p_A = \frac{|A|}{|E|}$$

en notant $|A|$ le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre de personne ayant fait le choix du modèle A.

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{12}{12+60+18} \\ &= \frac{2}{15} \\ &= 0{,}1333\ldots \\ &\approx 13\ \% \end{aligned}$$

En procédant de même pour les deux autres modèles :

Types de château d'eau	Modèle A	Modèle B	Modèle C
Proportion	13 %	67 %	20 %

2. Pour sélectionner le réservoir au volume le plus adapté, le maire décide d'étudier la consommation annuelle d'eau des foyers du hameau et observe qu'en 2019 elle était égale à 10 500 m^3.

   (a) Montrer que la consommation moyenne annuelle d'eau par foyer est d'environ 116,67 m^3.

   Calculons la consommation moyenne $\overline{x}$.

   La moyenne peut être obtenue par diverses formules. Ici il s'agit simplement de partager équitablement la consommation totale entre chaque foyer.

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{10\,500\ \text{m}^3}{12+60+18} \\ &= \frac{350}{3}\ \text{m}^3 \\ &= 116{,}666\ldots\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} \approx 116{,}67\ \text{m}^3.}$$

Sachant qu'un lotissement de 17 logements va être bientôt terminé, le maire décide d'intégrer ces logements à son étude en attribuant à chacun d'entre eux la consommation annuelle d'eau moyenne par foyer du hameau.

(b) Calculer la consommation annuelle estimée du hameau intégrant les nouveaux logements. On donnera le résultat en mètre cube, arrondi à l'unité.

Calculons la consommation annuelle estimée du hameau C_{ae}.

Chacun des 17 nouveaux foyers consommera 116,67 m³. La consommation de ces 17 nouveaux foyers sera de

$$17 \times 116{,}67 \text{ m}^3 = 1983{,}39 \text{ m}^3$$

Donc en prenant en compte tout le hameau :

$$\begin{aligned} C_{ae} &= 10\,500 \text{ m}^3 + 1983{,}39 \text{ m}^3 \\ &= 12\,483{,}39 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{C_{ae} \approx 12\,483 \text{ m}^3.}$$

3. Suite à son enquête et aux conseils d'un bureau d'étude, le maire souhaite choisir un réservoir pouvant contenir au minimum la consommation moyenne de 5 jours du hameau intégrant les nouveaux logements.

(a) Déterminer la consommation moyenne en 5 jours de l'ensemble des foyers du hameau intégrant les nouveaux logements.

Déterminons la consommation moyenne en 5 jours C_5.

On fait implicitement l'hypothèse que la consommation quotidienne est toujours la même ce qui nous permet de répondre à la question par proportionnalité. De plus nous ferons l'hypothèse simplificatrice d'une année à 365 jours plutôt qu'à 365,25 jours.

Par proportionnalité :

Jours	365	5
Consommation (m³)	12 483,39	171,01

$$\boxed{C_5 \approx 171{,}01 \text{ m}^3.}$$

Une entreprise propose de construire un réservoir ayant la forme d'une sphère de 7 mètres de diamètre.

(b) Déterminer le volume de ce réservoir. On donnera l'arrondi du volume au mètre cube.
On rappelle que le volume V d'une boule de rayon r est donné par $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$.

Calculons le volume V_s de la sphère.

D'après la formule de l'énoncé :

$$\begin{aligned} V_S &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{7\ \text{m}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{7}{2}\right)^3\ \text{m}^3 \\ &\approx 179{,}59 \end{aligned}$$

$$\boxed{V_S \approx 180\ \text{m}^3.}$$

(c) Ce réservoir répond-il aux souhaits du maire ?

$V_S > 171{,}01\ \text{m}^3$ donc

$$\boxed{\text{ce réservoir répond aux souhaits du maire.}}$$

4. On considère que le réservoir choisi contient 180 m^3 d'eau. Le débit de la pompe qui permet de le remplir est de 40 m^3/h.
Déterminer le temps nécessaire pour remplir ce réservoir aux trois quarts. Donner la réponse en heure, minute et seconde.

Déterminons le temps de remplissage t_r.

Nous pouvons raisonner par proportionnalité :

Volume (m^3)	40	$\frac{3}{4} \times 180 = 135$
Temps (h)	1	3,375

Ainsi

$$\begin{aligned} t_r &= 3{,}375 \text{ h} \\ &= 3 \text{ h} + 0{,}375 \text{ h} \\ &= 3 \text{ h} + 0{,}375 \times 60 \text{ min} \\ &= 3 \text{ m} + 22{,}5 \text{ min} \\ &= 3 \text{ h} + 22 \text{ min} + 0{,}5 \text{ min} \end{aligned}$$

$$\boxed{t_r = 3 \text{ h} + 22 \text{ min} + 30 \text{ s.}}$$

Partie B : nuisances et impact paysager.

1. Pour éviter toute polémique quant au lieu d'implantation du projet, le maire décide d'installer le château à égale distance des trois habitations les plus proches. Pour expliciter ce choix aux habitants, il souhaite représenter la situation par un tracé géométrique. Il désigne par les points H_1, H_2 et H_3 les trois habitations.

   On sait que les distances entre les habitations sont $H_1H_2 = 1$ km, $H_2H_3 = 820$ m et $H_1H_3 = 730$ m.

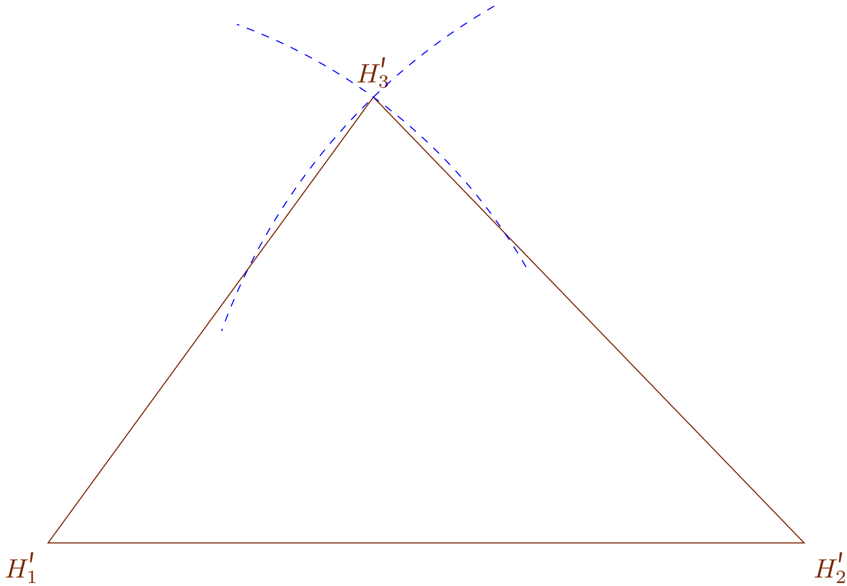
   (a) Représenter la situation à l'échelle $1/10\,000$.

   En notant H_1', H_2' et H_3' les points correspondant respectivement H_1, H_2 et H_3 après la mise à l'échelle nous avons, par exemple :

$$\begin{aligned} H_1'H_2' &= \frac{1}{10\,000} \times 1 \text{ km} \\ &= \frac{1}{10\,000} \times 1 \times 100\,000 \text{ cm} \\ &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

   De même ou en raisonnant par proportionnalité

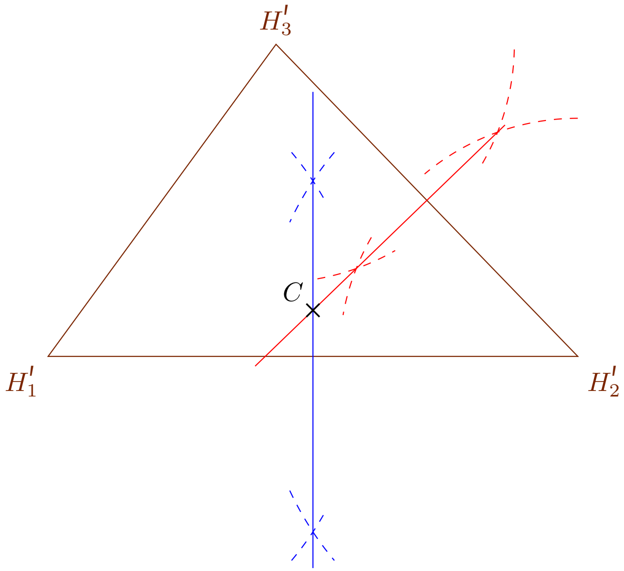
Réel (km)	1	0,820	0,730
À l'échelle (cm)	10	8,2	7,3



(b) Placer le point C, tel qu'il soit à égale distance des trois points représentant les habitations. On veillera à laisser les traits de construction et on justifiera le tracé sur la copie.

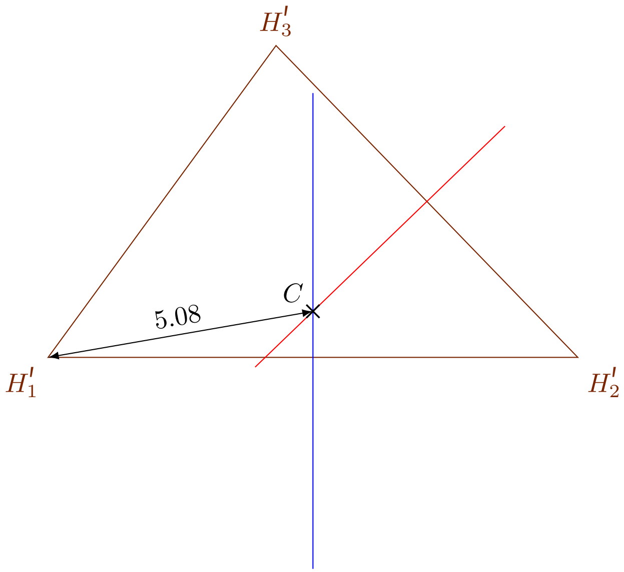
Si le point C est équidistant des points H_1, H_2 et H_3 alors cela signifie qu'il est le centre du cercle circonscrit au triangle $H_1H_2H_3$. Autrement dit C est le point d'intersection des médiatrices du triangle.

La figure suivante est une réduction à l'échelle $7/10$ *de la figure demandée.*



(c) En utilisant la figure construite, estimer la distance entre le château d'eau et chacune des 3 habitations.

La figure suivante est une réduction à l'échelle 7/10 de la figure demandée.



Donc par proportionnalité

Réel (km)	1	0,508
À l'échelle (cm)	10	5,08

Entre le château d'eau et les habitations la distance est approximativement de 510 m.

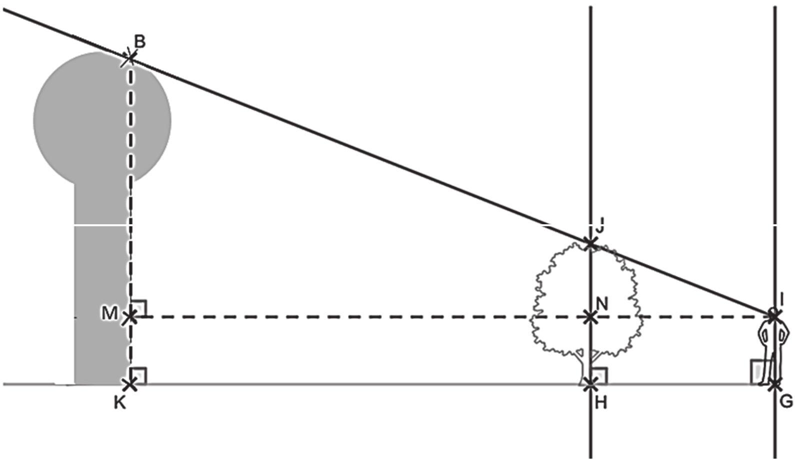
2. Afin de masquer la vue du château d'eau, un des habitants décide de planter une haie. Afin de choisir l'essence d'arbres à planter, il souhaite connaître la hauteur que devront atteindre ces arbres pour masquer la vue du château d'eau depuis sa terrasse.

   La figure ci-après, qui n'est pas à l'échelle, représente la situation. Cet habitant est au point G sur sa terrasse, le château d'eau est implanté au point K et on a noté H le point où il souhaite planter une haie pour masquer le château d'eau.

   On connaît les dimensions suivantes : KG = 510 m, GI = 1,80 m et HG = 20 m. La hauteur KB est de 45 mètres.

   Le point I correspond à l'œil de l'homme et le point J correspond à la hauteur que doivent atteindre les arbres pour masquer la vue du château d'eau.

   Les points M et N sont situés à 1,80 m du sol. On a ainsi, $MI = KG$ = 510 m et $NI = HG$ = 20 m.



   Calculer la hauteur minimale HJ des arbres pour que cet habitant ne voie plus le château d'eau lorsqu'il se tient debout sur sa terrasse. On arrondira le résultat au centimètre.

   Calculons JN.

* Les points I, N, M d'une part et I, J, B d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* (JN) et (MB) sont des verticales donc $(JN) \parallel (MB)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{JN}{BM} = \frac{IN}{IM}.$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{JN}{BM} \times BM &= \frac{IN}{IM} \times BM \\
JN &= \frac{20 \text{ m}}{510 \text{ m}} \times (KB - KM) \\
JN &= \frac{20}{510} \times (45 \text{ m} - 1{,}80 \text{ m}) \\
JN &= \frac{20}{510} \times 43{,}2 \text{ m} \\
&= \frac{144}{85} \text{ m}
\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
HJ &= HN + NJ \\
&= 1{,}80 \text{ m} + \frac{144}{85} \text{ m} \\
&\approx 3{,}49411 \text{ m par troncature.}
\end{aligned}$$

$$\boxed{HJ \approx 3{,}49 \text{ cm.}}$$

Partie C : entretien du château d'eau.

1. Le réservoir d'eau choisi a une contenance de 180 m^3. L'ingénieur informe le maire que l'eau du château d'eau, bien que puisée dans une source, doit être chlorée. Il faut prévoir 0,1 mg de chlore par litre d'eau.
   Déterminer la quantité de chlore, en gramme, à prévoir au minimum pour 180 m^3 d'eau.

   Déterminons la quantité Q_c de chlore nécessaire.

$$\begin{aligned} Q_c &= \left(180 \text{ m}^3\right) \times \left(0{,}1 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}\right) \\ &= (180 \times 1000 \text{ L}) \times \left(0{,}1 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}\right) \\ &= 180 \times 1000 \times 0{,}1 \text{ L} \cdot \text{mg} \cdot \text{L}^{-1} \\ &= 18000 \text{ mg} \end{aligned}$$

$$\boxed{Q_c = 18 \text{ g}.}$$

2. Pour assurer l'entretien annuel de ce château d'eau, la commune sollicite deux entreprises.

   - La société *Qualiteau* propose un forfait annuel de 700 € pour les déplacements puis toute intervention est facturée 350 €.
   - La société *Calmwater* propose également un forfait annuel pour les déplacements au tarif de 500 € puis toute intervention est facturée 450 €.

   On note x le nombre d'interventions annuelles.

   (a) Montrer que le montant annuel $Q(x)$ à payer à la société *Qualiteau*, en fonction de x, est donné par l'expression $Q(x) = 350x + 700$.

   Pour une année il faudra payer l'abonnement de 700 € auquel il faudra ajouter 350 € pour chaque intervention. Donc pour x interventions :

   $$\boxed{Q(x) = 350 \times x + 700.}$$

   (b) Exprimer, en fonction de x, le montant annuel $C(x)$ à payer à la société *Calmwater*.

   En procédant comme à la question précédente

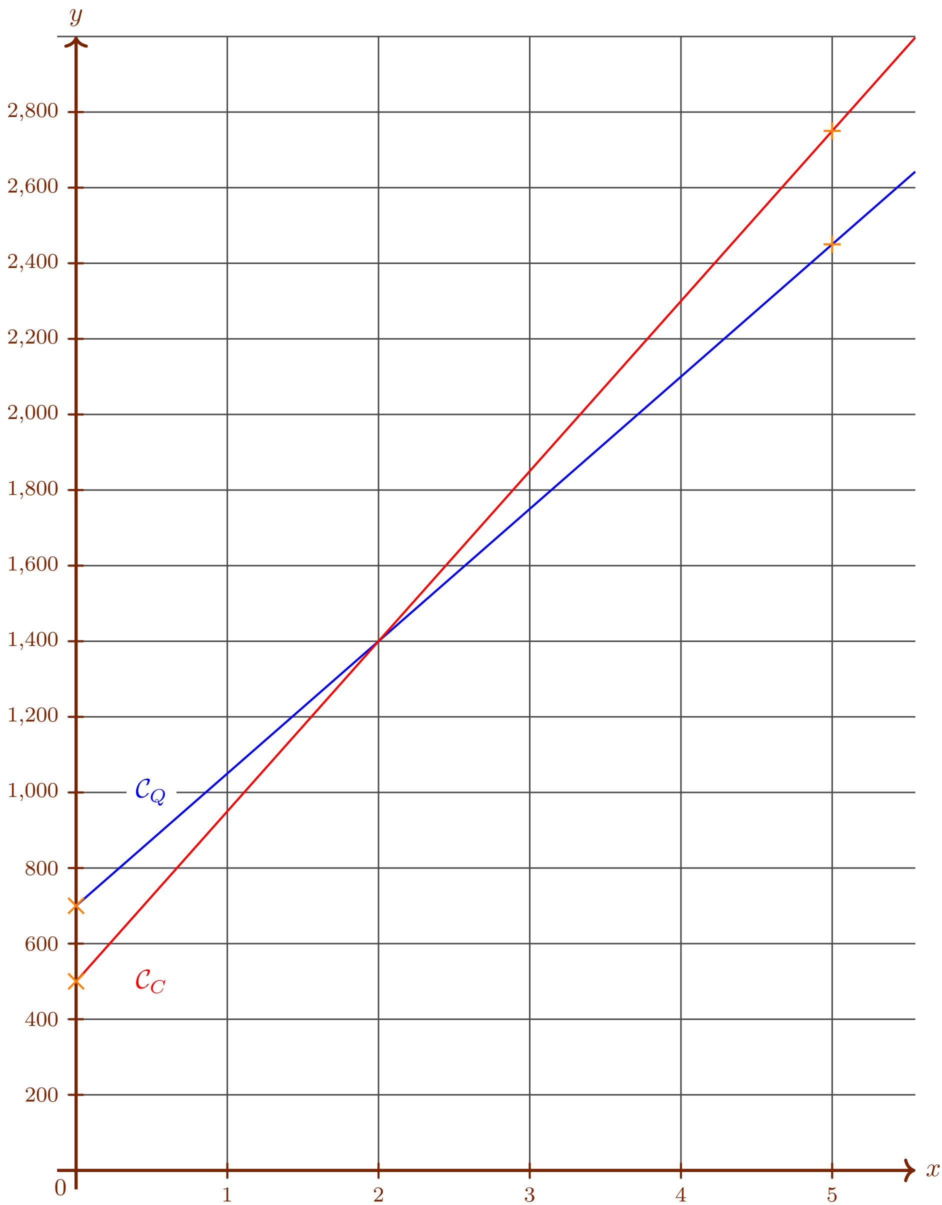
   $$\boxed{C(x) = 450x + 500.}$$

   (c) Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement les fonctions Q et C. On prendra en abscisse 2 cm pour une intervention et en ordonnée 1 cm pour 200 €.

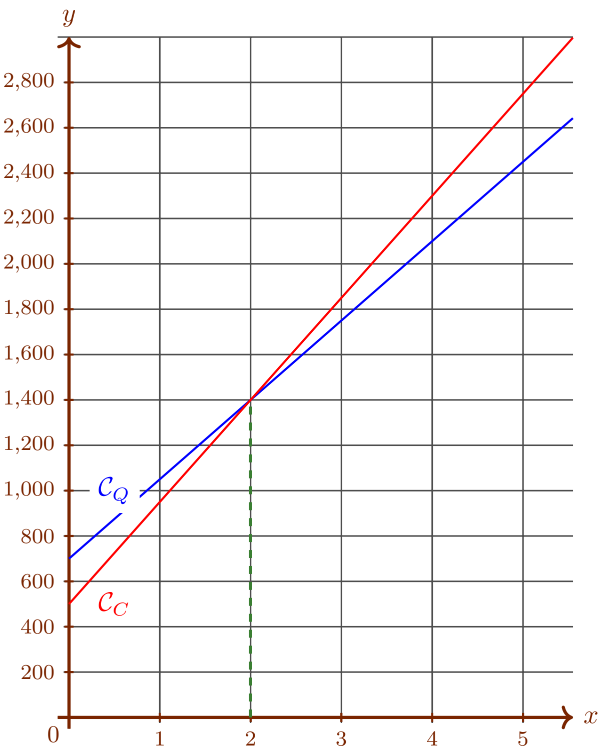
   La représentation graphique d'une fonction f est formée de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$.

Les fonctions que nous devons représenter sont des fonctions affines donc leurs courbe représentatives sont des droites. Il nous suffit de trouver les coordonnées de deux points distincts pour chacune d'entre elles.

$Q(0) = 700$ et $Q(5) = 2450$. $C(0) = 500$ et $C(5) = 2750$.



(d) À partir du graphique construit à la question 2.c., lire le nombre d'interventions annuelles pour lequel le montant de la facture sera le même pour les deux sociétés.
Vérifier le résultat trouvé par un calcul.



Résolvons $C(x) = Q(x)$ dans l'ensemble des nombres réels positifs.

$$\begin{aligned}
C(x) = Q(x) &\iff 450x + 500 = 350x + 700 \\
&\iff 450x + 500 - 500 = 350x + 700 - 500 \\
&\iff 450x = 350x + 200 \\
&\iff 450 - 350x = 350x + 200 - 350x \\
&\iff 100x &= 200 \\
&\iff \frac{100x}{100} = \frac{200}{100} \\
&\iff x = 2
\end{aligned}$$

La facture sera la même pour deux interventions annuelles.

(e) Quelle société devient alors la plus avantageuse pour la commune pour un nombre supérieur d'interventions ?

Par lecture graphique, pour plus de deux interventions annuelles, la courbe représentative de Q est en dessous de celle de C donc

pour plus de deux interventions l'entreprise *Qualiteau* est plus avantageuse.

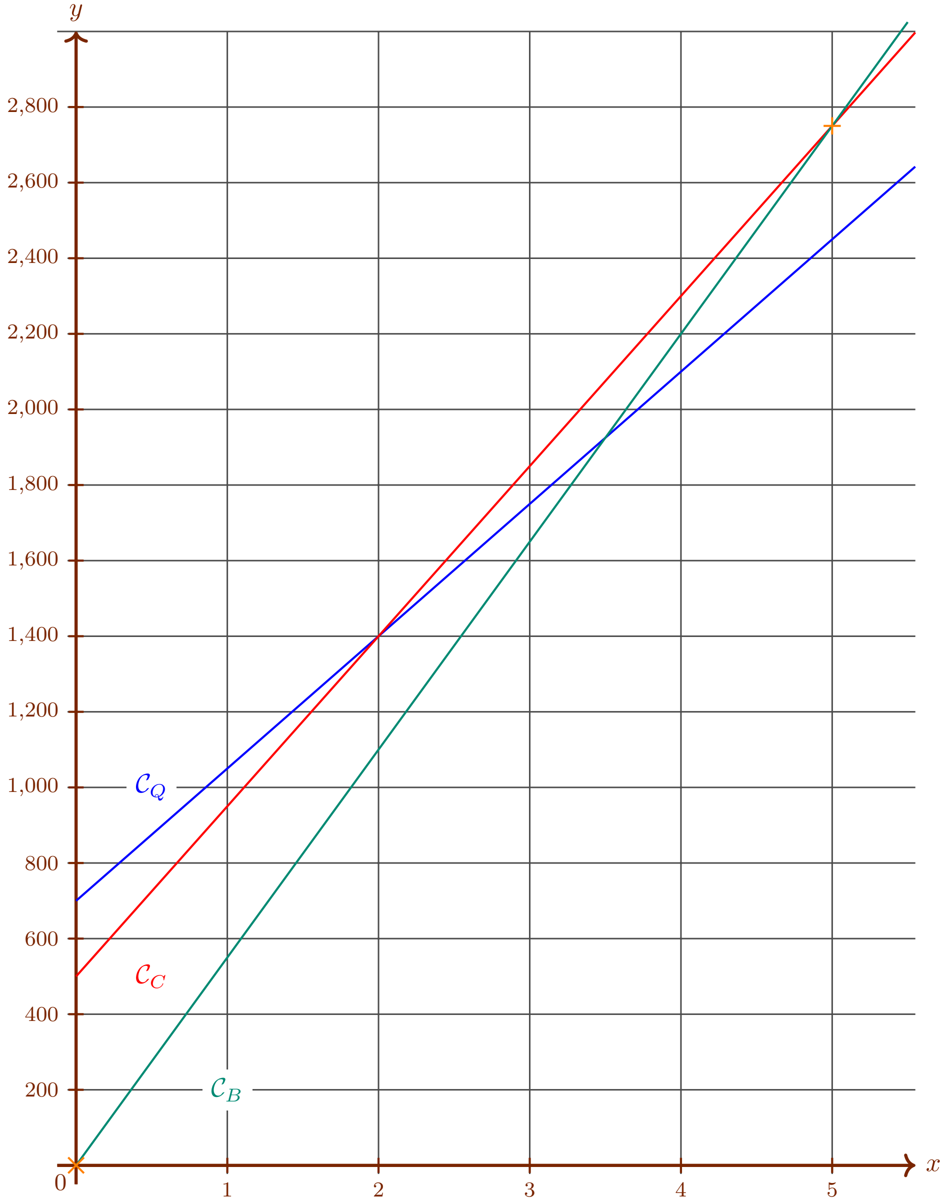
3. Une troisième entreprise, la société *Bellacqua*, vient de s'implanter dans la région. Elle ne facture aucun déplacement mais propose un tarif par intervention de 550 €.

(a) Exprimer, en fonction de x le montant annuel $B(x)$ à payer à la société *Bellacqua*.

$B(x) = 550x$.

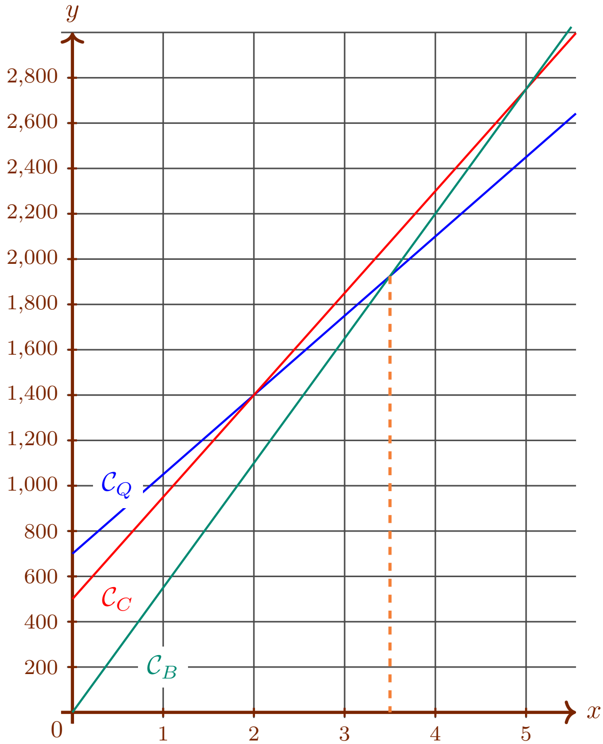
(b) Dans le repère orthogonal construit à la question 2.c., représenter graphiquement le tarif de la société *Bellacqua* en fonction du nombre x d'interventions.

La fonction B est une fonction affine donc sa courbe représentative est une droite. De plus $B(0) = 0$ et $B(5) = 2750$.



(c) La commune souhaiterait faire travailler la société *Bellacqua*. Lire sur le graphique le nombre maximum d'interventions pour lequel le prix à payer sera plus intéressant que celui des deux autres sociétés. Justifier la démarche.

Tant que la courbe représentative de B reste en dessous de celles de C et Q cela signifie que les valeurs prisent par B sont inférieures à celles de C et Q.



Donc d'après la représentation graphique il faut moins de 3,5 interventions.

Bellacqua pourra être choisie pour un maximum de trois interventions.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif.
- Calculer le carré C_1 du nombre entier qui le suit.
- Calculer le carré C_2 du nombre entier qui le précède.
- Calculer la différence $C_1 - C_2$.

1. Vérifier qu'en prenant 5 comme nombre de départ, on obtient 20.

Notons $C0$ le nombre choisi et dressons le tableau d'état des variables correspondant à cet algorithme.

Instructions	C_0	C_1	C_2	$C_1 - C_2$
Choisir un entier positif	5			
Calcul du carré de l'entier qui suit C_0	5	$6^2 = 36$		
Calcul du carré de l'entier qui précède C_0	5	36	$4^2 = 16$	
Calcul de $C_1 - C_2$	5	36	16	$36 - 16 = 20.$

En entrant 5 le programme de calcul renvoie 20.

2. On appelle x le nombre de départ, montrer que le résultat obtenu est égal à $4x$.

Notons $C0$ le nombre choisi et dressons le tableau d'état des variables correspondant à cet algorithme.

Instructions	C_0	C_1	C_2	$C_1 - C_2$
Choisir un entier positif	x			
Calcul du carré de l'entier qui suit C_0	x	$(x+1)^2$		
Calcul du carré de l'entier qui précède C_0	x	$(x+1)^2$	$(x-1)^2$	
Calcul de $C_1 - C_2$	x	$(x+1)^2$	$(x-1)^2$	$(x+1)^2 - (x-1)^2.$

Or, grâce à une identité remarquable nous aurions pu faire le choix de tout développer, là encore, avec des identités remarquables, mais la factorisation semble moins longue) :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x-1)^1 &= [(x+1) - (x-1)] \times [(x+1) + (x-1)] \\ &= [x + 1 - x + 1] \times [x + 1 + x - 1] \\ &= 2 \times 2x\end{aligned}$$

donc

> en entrant x le programme de calcul renvoie $4x$.

3. Est-il possible d'obtenir 842 ? Si oui, donner le nombre de départ. Sinon, expliquer pourquoi.

Résolvons $4x = 842$ dans $\mathbb{N}$.

Procédons à un raisonnement par analyse-synthèse.
Nous recherchons un nombre x tel que

$$4x = 842$$

Cette équation équivaut successivement à :

$$\frac{4x}{4} = \frac{842}{4}$$
$$x = \frac{421}{2}$$

Il n'y a donc qu'un nombre possible c'est $\frac{421}{2}$, mais, 421 n'étant pas pair, $\frac{421}{2}$ n'est pas un entier.

> Il n'est pas possible d'obtenir 842 avec le programme.

Ou plus sobrement : il est clair que 842 n'est pas un multiple de 4.

4. Déterminer le nombre de départ pour que le programme ait comme résultat 2^{98}. On justifiera la réponse.

Résolvons $4x = 842$ dans $\mathbb{N}$.

Nous recherchons un nombre x tel que

$$4x = 2^{98}$$

Cette équation équivaut successivement à :

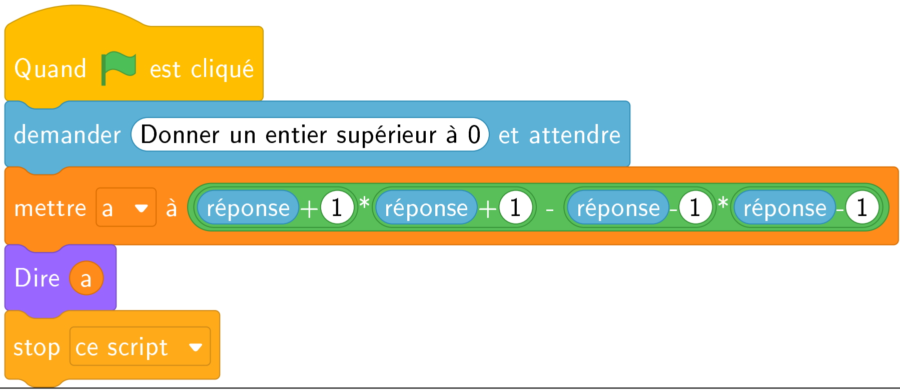
$$\frac{4x}{4} = \frac{2^{98}}{4}$$
$$x = \frac{2^{98}}{2^2}$$
$$x = 2^{98-2}$$
$$x = 2^{96}$$

Et comme 2^{98} est bien un entier naturel :

pour que le programme renvoie 2^{98} il faut choisir 2^{96} comme nombre de départ.

5. Parmi les trois captures d'écran issues du logiciel SCRATCH, donner, sans justifier, le(s) script(s) qui correspond(ent) au programme de calcul proposé.

Script 1.



Script 2.

```
Quand [drapeau] est cliqué
demander (Donner un entier supérieur à 0) et attendre
cacher la variable [a ▾]
cacher la variable [b ▾]
mettre [a ▾] à (((réponse) - (1)) * ((réponse) - (1)))
mettre [b ▾] à (((réponse) + (1)) * ((réponse) + (1)))
mettre [a ▾] à ((a) - (b))
Dire (a)
stop [ce script ▾]
```

Script 3.

```
Quand [drapeau] est cliqué
demander (Donner un entier supérieur à 0) et attendre
mettre [a ▾] à ((réponse) + (1))
mettre [a ▾] à ((a) * (a))
mettre [b ▾] à ((réponse) - (1))
mettre [b ▾] à ((b) * (b))
Dire ((a) - (b))
stop [ce script ▾]
```

Vous pouvez télécharger les scripts : script 1, script 2 et script 3.

Le script 2 calcul $(x-1)^2 - (x+1)^2$ sinon

les scripts 1 et 3 correspondent au programme de calcul proposé.

Exercice 2.

On considère une classe composée de 30 élèves. Certains sont enfants uniques, c'est-à-dire n'ayant ni frère ni sœur, d'autres ne le sont pas.

Dans cette classe,

- 40 % des élèves sont des garçons ;
- un tiers des garçons sont des enfants uniques ;
- 25 % des enfants uniques sont des garçons.

1. (a) Déterminer le nombre total de garçons dans cette classe.

Calculons le nombre de garçon, n_g, dans cette classe.

Il s'agit d'appliquer une proportion.

$$n_g = \frac{40}{100} \times 30$$

$$n_g = 12.$$

(b) Déterminer le nombre de garçons qui ne sont pas des enfants uniques.

Déterminer le nombre, n_{gnu}, de garçons qui ne sont pas des enfants uniques.

$\frac{1}{3}$ des garçons sont des enfants uniques donc $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ des garçons ne sont pas de enfants uniques :

$$\begin{aligned} n_{gnu} &= \frac{2}{3} \times n_g \\ &= \frac{2}{3} \times 12 \end{aligned}$$

$$n_{gnu} = 8.$$

(c) Reproduire, sur la copie, le tableau des effectifs de la classe ci-dessous puis le compléter.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique			
Enfant non unique			
Total			30

D'après les questions précédentes :

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique			
Enfant non unique		8	
Total		12	30

On complète alors par addition sur les lignes et les colonnes.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique		4	
Enfant non unique		8	
Total	18	12	30

Puisque 25 %, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ des enfants uniques sont des garçons, il y a donc $4 \times 4 = 16$ enfants uniques.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique		4	16
Enfant non unique		8	
Total	18	12	30

On complète alors par addition sur les lignes et les colonnes.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique	12	4	16
Enfant non unique		8	14
Total	18	12	30

Finalement :

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique	12	4	16
Enfant non unique	6	8	14
Total	18	12	30

2. On choisit au hasard un élève de cette classe.

(a) Calculer la probabilité que cet élève soit un enfant unique. On arrondira le résultat au centième.

Choisissons un modèle probabiliste cohérent avec la situation.

Notons Ω l'ensemble des 30 élèves et munissons-le de l'équiprobabilité (chaque enfant à la même chance d'être choisi).

Notons encore A l'événement « obtenir un enfant unique ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, que l'univers contient 30 issues et que A est réalisé par 16 issues (d'après le tableau précédent) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{16}{30}\\ &= \frac{8}{15}\\ &\approx 0{,}533 \text{ par troncature}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \approx 0{,}53.}$$

(b) Calculer la probabilité que cet élève soit un garçon n'ayant ni frère ni sœur. On arrondira le résultat au centième.

Notons encore B l'événement « obtenir un garçon qui est enfant unique ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, que l'univers contient 30 issues et que B est réalisé par 4 issues (d'après le tableau précédent) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{4}{30}\\ &= \frac{2}{15}\\ &\approx 0{,}133 \text{ par troncature}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \approx 0{,}13.}$$

(c) On sait que l'élève choisi est une fille. Calculer la probabilité qu'elle soit une fille unique.
On arrondira le résultat au centième.

Choisissons un modèle probabiliste cohérent avec la situation.
Notons Ω' l'ensemble des 18 filles et munissons-le de l'équiprobabilité (chaque fille à la même chance d'être choisie).
Notons encore C l'événement « obtenir un enfant unique ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, que l'univers contient 18 issues et que C est réalisé par 12 issues (d'après le tableau précédent) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \frac{12}{19} \\ &= \frac{2}{3} \\ &\approx 0{,}666 \text{ par troncature}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C) \approx 0{,}67.}$$

Il était bien sûr possible de raisonner en parlant de probabilité conditionnelle.

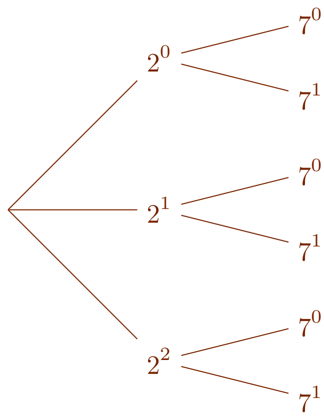
Exercice 3.

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. *Définition : Un nombre parfait est égal à la moitié de la somme de ses diviseurs. Par exemple,* 6 *est parfait car ses diviseurs sont* 1, 2, 3 *et* 6 *et on a :* $1 + 2 + 3 + 6 = 12$ *qui correspond au double de* 6.
   Affirmation 1 : « 28 est un nombre parfait. »

   Déterminons les diviseurs de 28.

   Procédons à sa décomposition en facteurs premiers : $28 = 2^2 \times 7$.



Donc l'ensemble des diviseurs de 28 est $\{1; 7; 2; 14; 4; 28\}$.
Or $\frac{1+7+2+14+4+28}{2} = 28$ donc

L'affirmation 1 est vraie.

2. **Affirmation 2** : « Si un nombre est divisible par 6 et par 9 alors il est divisible par 54. »

   Pour que ce résultat soit vrai il faudrait que 6 et 9 soient premiers ente eux. Ce n'est pas le cas démontrons que l'affirmation est fausse en exhibant un contre-exemple.

   18 est divisible par 6 et par 9 mais il n'est clairement pas divisible par 54.

   L'affirmation 2 est fausse.

3. On augmente la longueur d'un rectangle de 10 % et on diminue sa largeur de 10 %.
   Affirmation 3 : « L'aire du rectangle est inchangée. »

   Nous pouvons penser aux situations dévolution successives pour imaginer que ce ne serait peut être pas vrai.

   Considérons un rectangle dont les côtés mesurent $\ell = 20$ et $L = 30$.
   Si nous détaillons ici le calcul des coefficients multiplicateurs les augmentations et diminutions de 10 % se calculent aisément mentalement.
   Le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 10 % est

$$\begin{aligned} CM_b &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-10}{100} \\ &= 0{,}9 \end{aligned}$$

Celui correspondant à une augmentation de 10 % est

$$\begin{aligned} CM_a &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{10}{100} \\ &= 1{,}1 \end{aligned}$$

Après une diminution de 10 % sa largeur est $\ell' = 0{,}9 \times 20 = 18$ et après une augmentation de 10 % sa longueur est $L' = 1{,}1 \times 30 = 33$.
$\ell \times L = 20 \times 30 = 600$ mais $\ell' \times L' = 18 \times 33 = 594$.
ainsi $\ell \times L \neq \ell' \times L'$.

L'affirmation 3 est fausse.

4. Un rectangle a une longueur de 5 cm et une largeur de 4 cm. On augmente la longueur de 10 % et on diminue la largeur de 10 %.
Affirmation 4 : « Le périmètre du rectangle diminue. »

Le périmètre du rectangle originale est

$$\begin{aligned} p &= 2 \times (L + \ell) \\ &= 2\,(5 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) \\ &= 2 \times 9 \text{ cm} \\ &= 18 \text{ cm} \end{aligned}$$

En procédant comme à la question précédente :

$$\begin{aligned} L' &= 1{,}1 \times L \\ &= 1{,}1 \times 5 \text{ cm} \\ &= 5{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \ell' &= 0{,}9 \times \ell \\ &= 0{,}9 \times 4 \text{ cm} \\ &= 3{,}6 \text{ cm} \end{aligned}$$

D'où le nouveau périmètre

$$\begin{aligned} p' &= 2 \times (L' + \ell') \\ &= 2\,(5{,}5 \text{ cm} + 3{,}6 \text{ cm}) \\ &= 2 \times 9{,}1 \text{ cm} \\ &= 18{,}2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ainsi : $p < p'$.

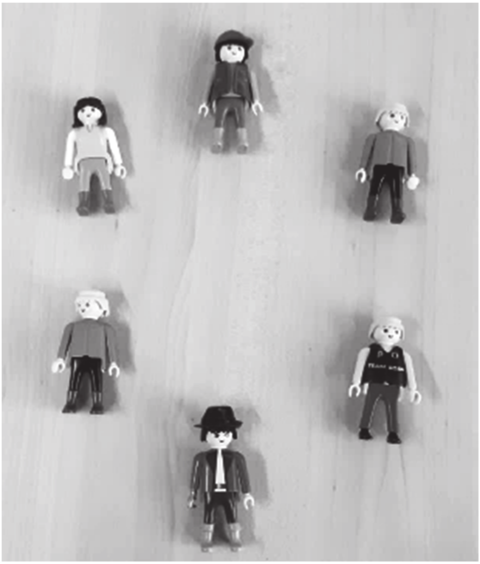
L'affirmation 4 est fausse.

III Troisième partie (14 points).

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

Situation 1.

Un enseignant en classe de grande section présente 6 personnages installés en cercle et demande à 3 élèves d'aller chercher en « un voyage » autant de jetons (« pas plus, pas moins ») que de personnages, sachant que les jetons sont positionnés à une dizaine de mètres des personnages.

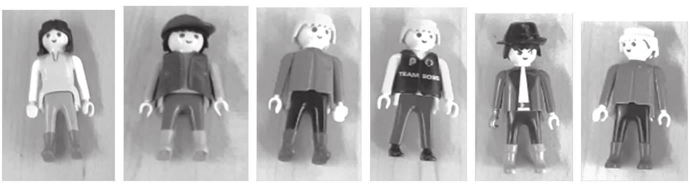


L'enseignant a noté le nombre de jetons apportés lors du premier voyage :

Prénoms des élèves	Nombre de jetons apportés
Mathéo	15
Salomé	7
Fatoulala	6

1. (a) Émettre deux hypothèses sur ce qui a pu conduire Salomé à se tromper.

   (b) Afin d'aider Salomé, le maître propose la situation suivante :

   Expliquer en quoi cette situation pourrait aider cette élève à réussir la tâche proposée.

2. (a) Émettre une hypothèse sur ce qui a pu conduire Mathéo à se tromper.

(b) Proposer une situation qui pourrait aider à vérifier l'hypothèse émise à la question précédente.

3. Proposer une nouvelle tâche que l'enseignant pourrait proposer à Fatoulala, pour lui permettre d'aller plus loin dans ses apprentissages. Justifier cette proposition.

Situation 2.

Un enseignant propose à ses élèves de CM2 l'exercice suivant, issu du manuel « Le nouvel À portée de maths » (Hachette, 2018).

Tracer une figure à partir d'un programme de construction

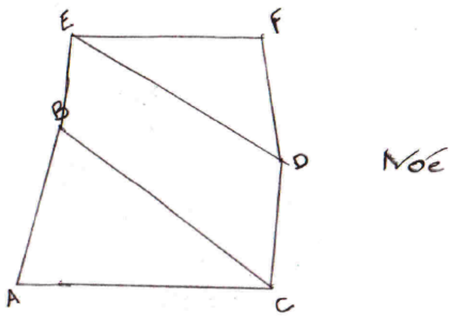
3 • Trace la figure qui correspond à ce programme de construction.

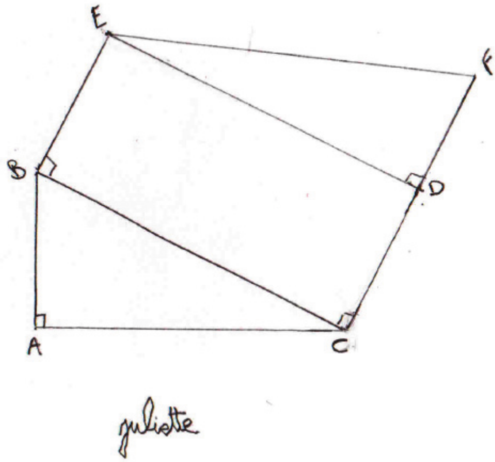
a. Trace un triangle ABC rectangle en A.

b. Trace le rectangle CDEB.

c. Trace le triangle DEF rectangle en D.

Voici 2 productions d'élèves :





1. Analyser les deux productions en terme d'erreurs et de réussites.

2. L'utilisation de papier quadrillé ou pointé pourrait-elle aider Noé ? Justifier la réponse.

3. Donner deux aides, non liées au papier utilisé, qui pourraient être proposées pour Noé.

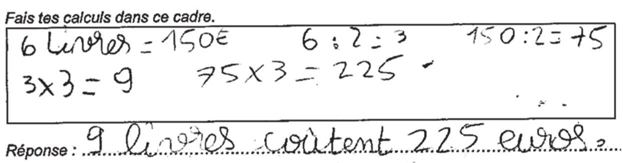
Situation 3.

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves de CM2 par une enseignante.

On commande pour la classe des cahiers et des livres. 6 livres coûtent 150 euros. Combien coûtent 9 livres ?

Voici les réponses de deux élèves : Tama et Hina.

Production de Tama.

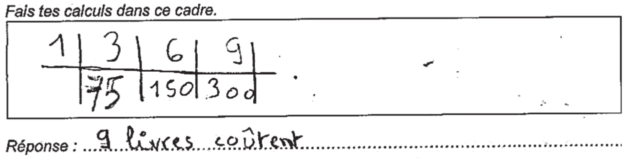

Fais tes calculs dans ce cadre.

6 Livres = 150€ 6 : 2 = 3 150 : 2 = 75

3x3 = 9 75x3 = 225

Réponse : 9 livres coûtent 225 euros.

Production de Hina.


Fais tes calculs dans ce cadre.

1	3	6	9
	75	150	300

Réponse : 9 livces coûtent

1. Quelle est la principale notion mathématique travaillée dans ce problème ?

2. Analyser chacune des deux productions ci-dessus en repérant les réussites et les erreurs éventuelles et en explicitant les propriétés mathématiques mobilisées.

3. Proposer trois procédures permettant à Tama de compléter correctement la case sous le 9 en partant du tableau qu'elle a commencé à compléter et qui est reproduit ci-dessous.

1	3	6	9
	75	150	

4. L'enseignant(e) modifie l'énoncé en demandant de calculer le prix de 8 livres.

   (a) Proposer deux procédures qu'un élève de CM2 pourrait mobiliser pour trouver le prix à payer pour l'achat de ces 8 livres.

   (b) L'enseignant souhaite que les élèves utilisent le passage à l'unité. Proposer une modification à l'énoncé initial qui encourage l'utilisation de cette procédure.