Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 2.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Première partie (13 points).

Partie A.

1. Calculons l'aire $\mathscr{A}_{terrain}$ du terrain.

   Puisque le terrain est rectangulaire :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{terrain} &= 100 \text{ m} \times 68 \text{ m} \\ &= 100 \times 68 \text{ m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_{terrain} = 6\,800 \text{ m}^2.}$$

2. Déterminons la longueur de la diagonale du terrain.

   Notons $ABCD$ le rectangle formé par le terrain.
   Le triangle ABD est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore, nous avons

$$AB^2 + AD^2 = BD^2.$$

   Nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned}BD^2 &= 100^2 + 68^2 \\ &= 14624\end{aligned}$$

   BD étant une longueur c'est un nombre positif donc :

$$BD = \sqrt{14624}$$

   Donc

$$\boxed{\begin{aligned}BD &= 4\sqrt{914} \text{ m} \\ BD &\approx 121 \text{ m.}\end{aligned}}$$

3. Déterminons la vitesse moyenne v.

$$\begin{aligned} v &\approx \frac{121\ \text{m}}{18\ \text{s}} \\ &\approx \frac{121}{18}\ \text{m/s} \\ &\approx 6{,}722\ \text{m/s} \end{aligned}$$

$$\boxed{v \approx 6{,}72\ \text{m/s.}}$$

4. Convertissons la vitesse en km/h.

$$\begin{aligned} v &\approx 6{,}72\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 6{,}72\ \frac{\frac{1}{1000}\ \text{m}}{\frac{1}{3600}\ \text{h}} \\ &\approx 6{,}72 \times \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{3600}}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &\approx 6{,}72 \times \frac{3600}{1000}\ \text{km/h} \\ &\approx 24{,}192\ \text{km/h} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Elle ne court pas à plus de 30 km/h.}}$$

5. Déterminons le temps $t_{Thompson}$ que mettrait la championne pour parcourir la diagonale.

   Puisque la diagonale mesure 121 m et que la vitesse de la championne est $\frac{100\ \text{m}}{10{,}93\ \text{s}}$ nous en déduisons

$$\begin{aligned}
t_{Thompson} &= \frac{121 \text{ m}}{\frac{100 \text{ m}}{10{,}93 \text{ s}}} \\
&= \frac{\frac{121 \text{ m}}{1}}{\frac{100 \text{ m}}{10{,}93 \text{ s}}} \\
&= \frac{121 \text{ m}}{1} \times \frac{10{,}93 \text{ s}}{100 \text{ m}} \\
&= \frac{121 \text{ m} \times 10{,}93 \text{ s}}{1 \times 100 \text{ m}} \\
&= \frac{121 \times 10{,}93}{100} \text{ s} \\
&= 13{,}2253
\end{aligned}$$

La diagonale aurait parcourue en 13,2 s.

Partie B.

Calculons PH.

- Configuration de Thalès. S, T et P d'une part, S, A et H d'autre part sont alignés dans le même ordre.
- Hypothèse pour la forme directe du théorème. Puisque $(PH) \perp (PS)$ et $(TA) \perp (PS)$ nous en déduisons $(PH) \parallel (TA)$.

Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{AT}{HP} = \frac{TS}{PS}.$$

Nous en déduisons successivement (toutes les longueurs étant exprimées en mètres) :

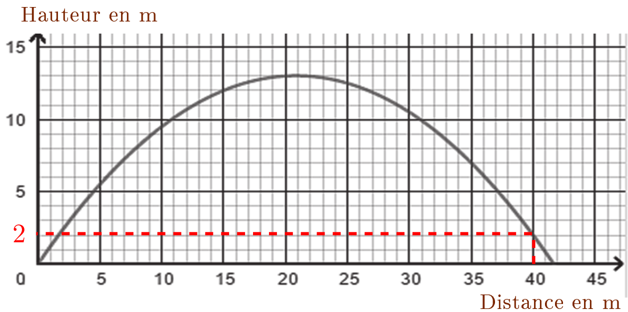
$$\frac{1{,}74}{HP} = \frac{2{,}78}{PT + TS}$$
$$\frac{1{,}74}{HP} = \frac{2{,}78}{9{,}51 + 2{,}78}$$
$$\frac{1{,}74}{HP} \times HP = \frac{2{,}78}{9{,}51 + 2{,}78} \times HP$$
$$1{,}74 = \frac{2{,}78}{9{,}51 + 2{,}78} \times HP$$
$$\frac{12{,}29}{2{,}78} \times 1{,}74 = \frac{12{,}29}{2{,}78} \times \frac{2{,}78}{12{,}29} \times HP$$
$$\frac{12{,}29}{2{,}78} \times 1{,}74 = HP$$

$HP \approx 7{,}7$ m.

Partie C.

1. Pour que le ballon passe au-dessus de la barre transversale il faut qu'il soit à plus de 3 m de haut lorsqu'il a parcouru 40 m au sol.

Coup de pied A.



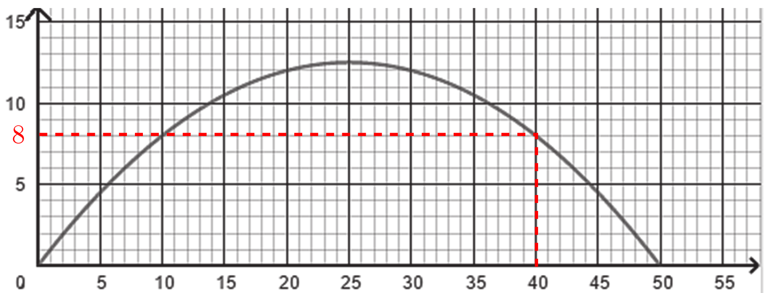
Coup de pied B.

Hauteur en m

Distance en m

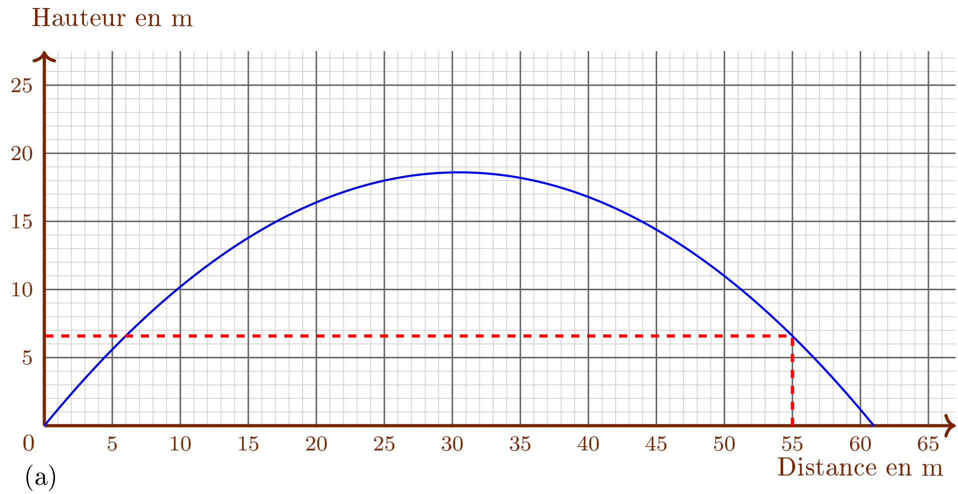
Coup de pied C.

Hauteur en m



Distance en m

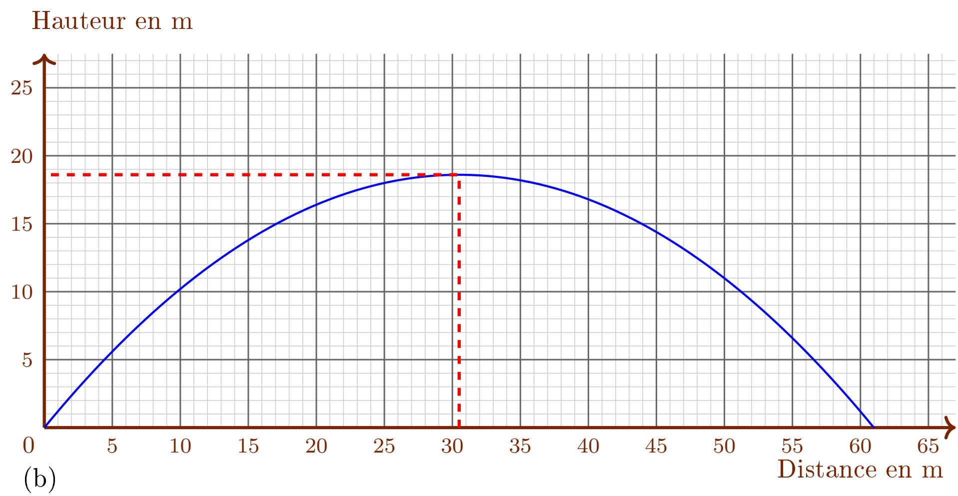
Seul le coup de pied C permet de faire passer le ballon au-dessus de la barre transversale.



2. (a)

Le ballon franchit la ligne de la barre transversale à plus de 6 m donc très au-delà des 3 m de hauteur de la barre transversale.

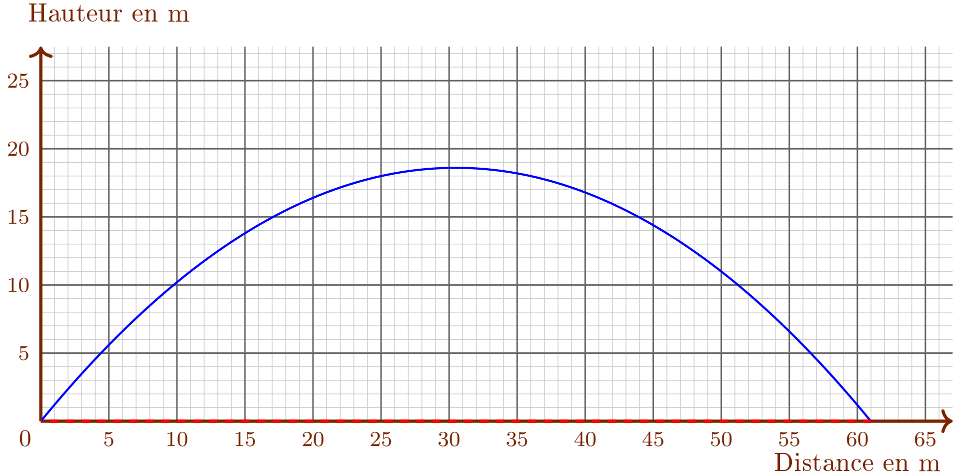
Il a réussi à faire passer le ballon au-dessus de la barre transversale.



(b)

Le ballon a atteint une hauteur maximale de 18,5 m.

(c) Dire que le ballon retombera au sol c'est dire que sa hauteur sera de 0 m.



Le ballon est retombé à 61 m du lanceur or la ligne de but est à 55 m du lanceur donc

le ballon est retombé 6 m derrière la ligne de but.

3. (a) La formule de calcul entrée en `B2` est :

$= -0{,}02 * \texttt{B1} \wedge 2 + 1{,}22 * \texttt{B1}.$

(b) Déterminons le contenu de `F2`.

$$\begin{aligned} f(25) &= -0{,}02 \times 25^2 + 1{,}22 \times 25 \\ &= 18 \end{aligned}$$

La valeur affichée en `F2` devrait être 18.

(c) La cellule `H2` permet de confirmer que le ballon passe au-dessus de la barre transversale.

4. Le ballon retombera lorsque sa hauteur sera de 0 m. Autrement dit lorsque $f(x) = 0$.

   Résolvons (E) : $-0{,}02x^2 + 1{,}22 = 0$.

   Il s'agit de résoudre une équation qui n'est pas linéaire. A priori la première chose à tenter est de se ramener à une équation produit-nul et donc éventuellement factoriser.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff -0{,}02x^2 + 1{,}2xx = 0\\
&\iff -0{,}02x\times x + 1{,}22x = 0\\
&\iff (-0{,}02x + 1{,}22)\times x\\
&\iff -0{,}02x + 1{,}22 = 0 \text{ ou } x = 0\\
&\iff -0{,}02x + 1{,}22 - 1{,}22 = 0 - 1{,}22 \text{ ou } x = 0\\
&\iff -0{,}02x = -1{,}22 \text{ ou } x = 0\\
&\iff \frac{-0{,}02x}{-0{,}02} = \frac{-1{,}22}{-0{,}02} \text{ ou } x = 0\\
&\iff x = 61 \text{ ou } x = 0
\end{aligned}$$

   Le cas $x = 0$ correspond au point de départ du ballon donc la seule solution qui convienne est $x = 61$. Donc

   $\boxed{\text{le ballon retombera 6 m derrière la ligne de but.}}$

Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Déterminons la hauteur h_1 du parallélépipède rectangle.

   D'une part :

$$\begin{aligned}
V_1 &= V_T - V_2\\
&= 12{,}26 \text{ m}^3 - 2 \text{ m}^3\\
&= 10{,}26 \text{ m}^3 \quad (1)
\end{aligned}$$

   et d'autre part, en utilisant la formule du volume d'un pavé droit :

$$\begin{aligned} V_1 &= h_1 \times \ell \times L \\ &= h_1 \times 1{,}5 \text{ m} \times 1{,}8 \\ &= h_1 \times 2{,}7 \text{ m}^2 \ (2) \end{aligned}$$

De (1) et (2) nous déduisons par transitivité :

$$10{,}26 \text{ m}^3 = h_1 \times 2{,}7 \text{ m}^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{10{,}26 \text{ m}^3}{2{,}7 \text{ m}^2} &= \frac{h_1 \times 2{,}7 \text{ m}^2}{2{,}7 \text{ m}^2} \\ \frac{10{,}26}{2{,}7} \text{ m} &= h_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{h_1 = 3{,}8 \text{ m.}}$$

2. Déterminons la hauteur h_T du silo.

   Puisque la hauteur de la pyramide est 1,2 m la hauteur du silo est

$$\begin{aligned} h_T &= 1{,}2 \text{ m} + h_1 \\ &= 1{,}2 \text{ m} + 3{,}8 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\boxed{h_1 = 5 \text{ m.}}$$

3. Notons r le rayon d'un cylindre de hauteur 5 m et de volume 12,26 m^3.

   Déterminons r.

   Nous avons donc

$$12{,}26 \text{ m}^3 = \pi \times r^2 \times 5 \text{ m}^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{12{,}26\ \mathrm{m}^3}{\pi \times 5\ \mathrm{m}} = \frac{\pi \times r^2 \times 5\ \mathrm{m}}{\pi \times 5\ \mathrm{m}}$$
$$\frac{12{,}26}{\pi \times 5}\ \mathrm{m}^2 = r^2$$

Puisque r représente une longueur c'est un nombre positif :

$$\sqrt{\frac{12{,}26}{5\pi}}\ \mathrm{m} = r$$

Ainsi en tronquant :

$$r \approx 0{,}883456\ \mathrm{m}$$

Le diamètre du silo cylindrique serait de 1,8 m.

Exercice 2.

1. D'après le graphique $4 + 3 + 1 = 8$ personne travaillent à Toulouse.
   Puisqu'il y a 19 employés à Toulouse cela représente une proportion, exprimée en pourcentage, de
   $$\frac{8}{19} \times 100 \approx 42{,}11.$$

   L'affirmation du chef est vraie.

2. (a) L'étendue est définie par : $e = max - min$.
   Donc ici :
   $$1890 = max - 1410$$
   ce qui équivaut successivement à :
   $$1890 + 1410 = max - 1410 + 1410$$
   $$3300 = max$$

Le salaire maximal dans l'entreprise est de 3 000 €.

(b) Déterminons le salaire x correspondant à l'avant dernière barre du graphique.

Le salaire moyen à Toulouse est :

$$1935 = \frac{2\times 1410 + 4\times 1590 + +3\times 1760 + 2\times 1920 + 4\times 2100 + 3\times x + 1\times 3300}{2+4+4+3+1}.$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
1935 &= \frac{3x + 300000}{19}\\
1935\times 19 &= \frac{3x + 30000}{19}\times 19\\
36765 &= 3x + 30000\\
36765 - 30000 &= 3x + 30000 - 30000\\
6765 &= 3x\\
\frac{6765}{3} &= \frac{3x}{3}\\
2255 &= x
\end{aligned}$$

Le salaire recherché est de 2255 €.

3. Déterminons le salaire médian à Toulouse.

* Les salaires dans le diagramme en barres sont déjà dans l'ordre croissant.
* Il y a 19 employés et $\frac{19}{2} = 9{,}5$ donc le salaire médian est le dixième salaire.
* Or, en cumulant les effectifs, $2 + 4 + 3 = 9$ et $2 + 4 + 3 + 2 = 11$ donc $Me = 1920$.

le salaire médian à Toulouse est de 1920 €.

4. Déterminons le salaire moyen $\overline{x}$ dans l'entreprise.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{19 \times 1935 + 12 \times 1520}{19 + 12} \\ &\approx 1774{,}354 \text{ en tronquant.}\end{aligned}$$

Le salaire moyen est de 1 774 €.

5. (a) Déterminons le salaire minimal m' après augmentation.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 10 % est : $CM = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$.
   Donc

$$m' = 1{,}1 \times 1410$$

$$m' = 1551.$$

   (b) Déterminons le coefficient multiplicateur, CM_1, qu'il faut appliquer aux salaires de Montauban pour que les salaires moyens soient les mêmes sur les deux sites.

$$\begin{aligned}CM_1 &= \frac{V_A}{V_D} \\ &= \frac{1935}{1520} \\ &\approx 1{,}27302 \text{ en tronquant.}\end{aligned}$$

   Par linéarité de la moyenne (autrement dit l'augmentation appliquée à chaque salaire se traduit par la même augmentation appliquée à la moyenne des salaires) il faut que le salaire soit multiplié par 1,2730.
   Le taux d'évolution correspondant à ce coefficient multiplicateur est

$$\begin{aligned}t_1 &\approx 100 \times (CM_1 - 1) \\ &= 100 \times (1{,}2730 - 1) \\ &\approx 27{,}30\end{aligned}$$

il aurait fallut une augmentation de 27,3 %.

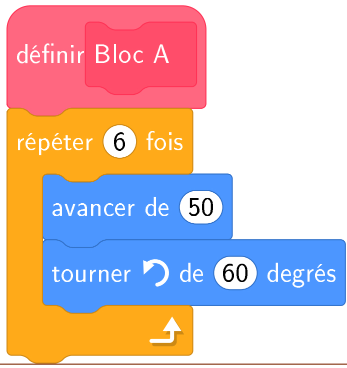
Exercice 3.

1. Le nombre de répétition correspond au nombre de côtés du polygone.

Le bloc A trace le dessin 2.
Le bloc B trace le dessin 1.
Le bloc C trace le dessin 3.

2. Il faudra 6 segments et comme on peut le remarquer sur les précédents l'angle est 360° divisé par le nombre de côtés.

Bloc A modifié



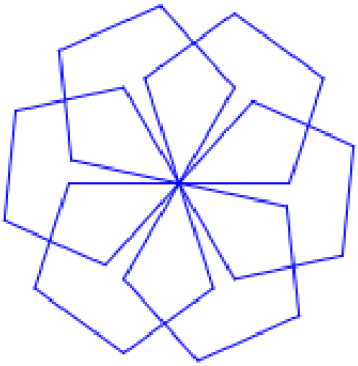
3. Cliquez sur le programme ci-dessus pour le télécharger.

   (a) Lors du tracé du pentagone avec le Bloc A, le lutin part du point de coordonnées $(0;0)$ puis y retourne. Ainsi tous les pentagones commencent à partir de l'origine. Comme chaque tracé est suivi d'une rotation de 60° nous pouvons conclure :

   On passe d'un motif au suivant par une rotation de centre le point de coordonnées $(0;0)$ et d'angle 60°.

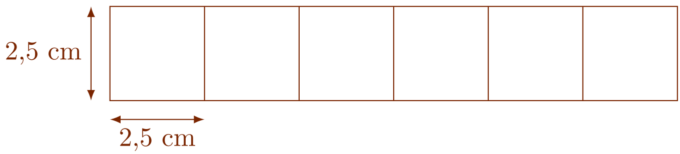
   (b) $6 \times 60 = 360$ donc à la fin du dessin du sixième motif on revient en position de départ.

Cette figure est composée de 6 motifs.

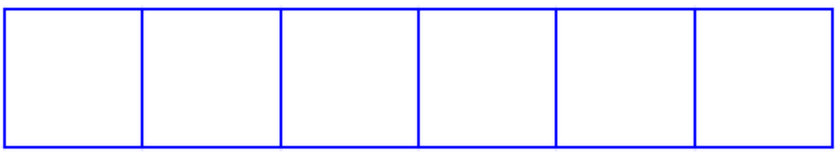


4. Cliquez sur le programme ci-dessus pour le télécharger.

   Voici la figure obtenue (ici dessinée encore à la moitié de ce qui était demandée, mais les longueurs indiquées sont celles attendues).



   Avec le logiciel on obtient :



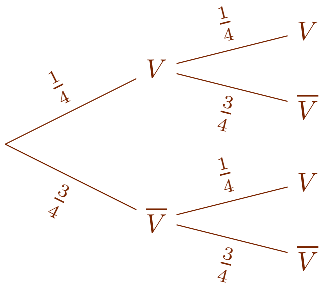
Exercice 4.

1. Les différents lancers sont indépendants les uns des autres. Le résultat du quatrième lancer ne dépend pas des résultats des ris précédents.

Ainsi il s'agit d'un lancer de pile ou face avec une pièce équilibrée et la probabilité d'obtenir face est donc $\frac{1}{2}$.

L'affirmation 1 est vraie.

2. Les deux tirages sont indépendants l'un de l'autre si bien que nous pouvons considérer les tirages comme successifs.
Schématisons la situation par un arbre pondéré probabiliste.



D'après le principe multiplicatif (ou la formule des probabilités composées) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(VV) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16}\end{aligned}$$

L'affirmation 2 est fausse.

3. Schématisons le lancer avec un tableau double entrée que nous remplirons des sommes des chiffres affichés par les deux dés.
Pour Arthur :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ω est l'ensemble des couples de chiffres obtenus (en distinguant toutes les faces par un coloriage par exemple).
Les dés étant équilibrés il est raisonnable de faire l'hypothèse que chaque couple de faces représenté par une case du tableau à la même probabilité qu'un autre couple. Il y a équiprobabilité entre les couples. L'univers comporte 36 issues.

Notons A_2 (resp. A_3) l'événement « obtenir 2 » (resp. « obtenir 3 »).

Calculons $\mathbb{P}(A_2)$ (resp. $\mathbb{P}(A_3)$).

I y a équiprobabilité entre les couples. A_2 (resp. A_3) est réalisé par 1 (resp. 2) issues. L'univers comporte 36 issues. Nous en déduisons :

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{36} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_3) = \frac{2}{36}.$$

Donc : $\mathbb{P}(A_2) < \mathbb{P}(A_3)$.

L'affirmation 3 est fausse.

Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.

Situation 2.

1.
2.
3.
4.
5. (a)
   (b)

Situation 3.

1. (a)
   (b)

(c)

(d)

2. (a)

(b)

(c)

3.