Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Première partie (13 points).

Partie A : coût de fabrication.

1. Déterminons le coût de fabrication, c_A, pour le modèle A.

   * Le coût des diodes est : $9 \times 0{,}18$ € = 1,62 €.
   * Le coût du support est 0,93 €.

   Nous en déduisons le coût de fabrication :

   $$c_A = 1{,}62 \text{ €} + 0{,}93 \text{ €}$$

   $$\boxed{c_A = 2{,}55 \text{ €}.}$$

2. (a) Une formule possible en `D2` est :

   $$\boxed{= 0{,}18 * \texttt{B2} + \texttt{C2}.}$$

   (b) Une formule possible en `F2` est :

   $$\boxed{= \texttt{D2} * \texttt{E2}.}$$

3. Déterminons le coût, c_D, de la commande Dupont.

   * Le coût de fabrication d'une ampoule de modèle B est

   $$\begin{aligned} c_B &= 25 \times 0{,}18 \text{ €} + 0{,}98 \text{ euro} \\ &= 5{,}48 \text{ €} \end{aligned}$$

   * Le coût de fabrication d'une ampoule de modèle C est

   $$\begin{aligned} c_C &= 32 \times 0{,}18 \text{ €} + 1{,}12 \text{ euro} \\ &= 6{,}88 \text{ €} \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} c_D &= 19\,000c_A + 14\,900c_B + 3\,094c_C \\ &= 19\,000 \times 2{,}55 \text{ €} + 14\,900 \times 5{,}48 \text{ €} + 3\,094 \times 6{,}88 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_D = 151\,388{,}72 \text{ €}.}$$

Partie B : emballage.

1. Calculons $\mathscr{V}_A$ le volume de l'ampoule A.

   L'ampoule étant un cylindre son volume est donné par :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_A &= \pi R^2 \times h \\ &= \pi \left(\frac{4{,}5}{2} \text{ cm}\right)^2 \times 6 \text{ cm} \\ &= \pi \times 2{,}25^2 \times 6 \text{ cm}^3 \\ &= 30{,}375\pi \text{ cm}^3 \\ &\approx 95{,}425876 \text{ cm}^3 \text{ en tronquant.} \end{aligned}$$

   En arrondissant au m^3 :

$$\boxed{\mathscr{V}_A \approx 95{,}426 \text{ cm}^3.}$$

2. (a) Déterminons le nombre n_e de boîte sur un étage de palette.

   Pour que le nombre de boîtes disposées sur la palette soit maximal il faut les placer avec la face carrée (qui est celle d'aire minimale) à l'horizontale.

   * Comme 1200 mm = 120 cm = 24 × 5 cm, il est possible de placer 24 boîtes dans le sens de la longueur.
   * Comme 800 mm = 80 cm = 16 × 5 cm, il est possible de placer 16 boîtes dans le sens de la largeur.

Sur un étage de palette le nombre de boîte est donc :

$$n_e = 24 \times 16$$

$$\boxed{n_e = 384.}$$

(b) Déterminons le nombre x_h d'étages qu'il sera possible de disposer sur une palette.

Puisque la hauteur de la palette est de 14,5 cm et que la hauteur totale ne doit pas excéder 120 cm, nous devons avoir :

$$14{,}5 + x_h \times 7 \leqslant 120$$

ce qui équivaut successivemetn à :

$$\begin{aligned} 14{,}5 + x_h \times 7 - 14{,}5 &\leqslant 120 - 14{,}5 \\ x_h \times 7 &\leqslant 105{,}5 \\ \frac{x_h \times 7}{7} &\leqslant \frac{105{,}5}{7} \text{ car } 7 > 0 \\ x_h &\leqslant \frac{105{,}5}{7} \end{aligned}$$

Or, en tronquant, $\frac{105{,}5}{7} \approx 15{,}07$ donc, x_h étant un nombre entier, $x_h \leqslant 15$.

Il est possible d'empiler 15 étages au maximum.

(c) Déterminons le coût c_P en palettes.

Commençons par chercher le nombre de palettes nécessaire pour chaque type d'ampoules.
Sur une palette il est possible de mettre $384 \times 15 = 5760$ boîtes.

* Modèle A. $19000 = 5760 \times 3 + 1720$. Il faudra 4 palettes.
* Modèle B. $14900 = 5760 \times 2 + 3380$. Il faudra 3 palettes.
* Modèle C. $3094 = 5760 \times 0 + 3094$. Il faudra une palette.

La commande nécessitera $4 + 3 + 1 = 8$ palettes.
Le coût en palettes est donc : $c_P = 8 \times 15$ €.

$$\boxed{c_P = 120 \text{ €.}}$$

3. Déterminons le coût total c_E d'emballage.

En plus des palettes il faut payer 0,12 € pour chacune des $19000 + 14900 + 3094 = 36994$ boîtes, donc

$$\begin{aligned} c_E &= c_P + 36994 \times 0{,}12 \text{ €} \\ &= 120 \text{ €} + 36994 \times 0{,}12 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_E = 4559{,}28 \text{ €.}}$$

Partie C : coût de fonctionnement.

1. Déterminons l'étendue de cette série.

Ordonnons les salaires :
$1\,488{,}11 < 1\,539{,}45 < 1\,593{,}38 < 1\,864{,}37 < 1\,938{,}36 < 1\,948{,}37 < 1\,994{,}38 < 1\,998{,}93 < 2\,048{,}37 < 2\,192{,}48$
Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} e &= max - min \\ &= 2\,192{,}48 - 1\,488{,}11 \end{aligned}$$

$$\boxed{e = 704{,}37 \text{ €.}}$$

2. Déterminons le salaire médian Me.

* La série ordonnée des $8 + 3 + 2 = 13$ salaires est $1\,488{,}11 < 1\,539{,}45 < 1\,593{,}38 \leqslant 1\,593{,}38 < 1\,864{,}37 \leqslant 1\,864{,}37 \leqslant 1\,864{,}37 < 1\,938{,}36 < 1\,948{,}37 < 1\,994{,}38 < 1\,998{,}93 < 2\,048{,}37 < 2\,192{,}48$.
* Puisque $\frac{13}{2} = 6{,}5$ la médiane est la septième valeur de la série ordonnée.
* Nous voyons, dans la série ordonnée, que la septième valeur est $1\,864{,}37$.

$$Me = 1\,864{,}37 \text{ €}.$$

3. Calculons le salaire moyen, $\overline{x}$, dans l'entreprise.

$$\overline{x} = \frac{1\,488{,}11 + 1\,539{,}45 + 2 \times 1\,593{,}38 + 3 \times 1\,864{,}37 + \cdots + 2\,192{,}48}{13}$$

$$\overline{x} = 1\,840{,}64 \text{ €}.$$

4. Déterminons le coût global, c_G, du salarié.

$$\begin{aligned} c_G &= \frac{1\,864{,}37}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &\approx 3\,465{,}816\,0 \text{ en tronquant.} \end{aligned}$$

$$c_G \approx 3\,465{,}82 \text{ €}.$$

5. (a) Déterminons le salaire s' après augmentation.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 3 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{3}{100} \\ &= 1{,}03 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} s' &= 1\,488{,}11 \times CM \\ &= 1\,488{,}11 \times 1{,}03 \\ &= 1\,532{,}753\,3 \end{aligned}$$

$$s' \approx 1\,532{,}75 \text{ €}.$$

(b) Calculons le coût global, c', après augmentation.

$$\begin{aligned} c' &= \frac{s'}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= \frac{1\,532{,}753\,3}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &\approx 2\,849{,}349\,08 \end{aligned}$$

$$c' \approx 2\,849{,}35 \text{ €}.$$

(c) Calculons le taux d'évolution, t_c, du coût.

Notons c le coût global avant augmentation.

$$\begin{aligned} c' &= \frac{s'}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= \frac{CM \times s}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= CM \times \frac{s}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= CM \times c \end{aligned}$$

Donc le coût global a augment de 3 %.

Voici une autre rédaction plus élémentaire.

$$\begin{aligned} c &= \frac{s}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= \frac{1\,488{,}11}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &\approx 2766{,}36 \end{aligned}$$

D'où le taux d'évolution :

$$\begin{aligned} t_c &= \frac{c' - c}{c} \times 100 \\ &\approx \frac{2849{,}35 - 2766{,}36}{2766{,}36} \times 100 \\ &\approx 2{,}9999 \end{aligned}$$

Le coût global a augmenté de 3 %.

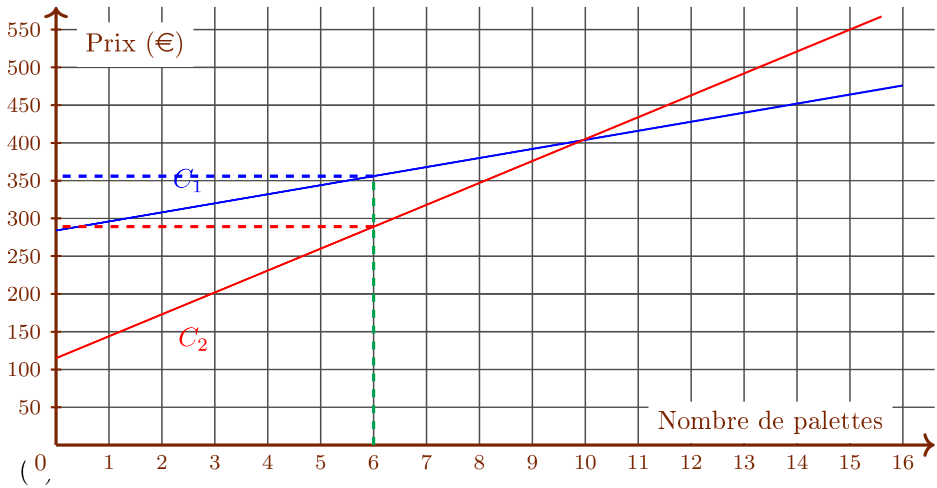
Partie D : transport et livraison.

1. (a) Identifions les fonctions.

Il s'agit de deux fonctions affines. Nous pourrions les identifier avec leur coefficient directeur ou leur ordonnée à l'origine. Nous allons utiliser l'ordonnée à l'origine.

$f(0) = 12 \times 0 + 284 = 284$ et $g(0) = 29 \times 0 + 115 = 115$ donc la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(0; 284)$ et la courbe représentative de g passe par le point de coordonnées $(0; 115)$.

C_1 est la courbe représentative de f et C_2 celle de g.



La société B est la plus économique pour 6 palettes.

(c) Pour une commande d'un maximum de 9 palettes la société B est la plus économique sinon c'est la A.

2. Résolvons l'équation $f(x) = g(x)$.

   Soit $x \in [0; +\infty[$.

$$f(x) = g(x)$$

   équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
12x + 284 &= 29x + 115\\
12x + 284 - 29x &= 29x + 115 - 29x\\
-17x + 284 &= 115\\
-17x + 284 - 284 &= 115 - 284\\
-17x &= -169\\
\frac{-17x}{-17} &= \frac{-169}{-17}\\
x &= \frac{169}{17}
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$x \approx 9{,}941$$

   Pour une commande d'un maximum de 9 palettes la société B est la plus économique sinon c'est la A.

Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Calculons $\mathbb{P}(3)$.

Les issues 1, 2, 3, 4 et 5 ont toutes la même probabilité d'être réalisée que nous noterons p.
Par définition d'une probabilité (sur un univers fini) la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1 donc :

$$5 \times p + \frac{1}{2} = 1$$

ce qui équivaut succcessivement à :

$$\begin{aligned} 5p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} &= 1 - \frac{1}{2} \\ 5p &= \frac{1}{2} \\ \frac{5p}{5} &= \frac{\frac{1}{2}}{5} \\ p &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \\ p &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(3) = 0{,}1.}$$

2. L'univers est ici $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
D'après la question précédente, la loi de probabilité sur cet univers peut être résume par le tableau :

ω	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\omega)$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5

Il n'y a pas équiprobabilité entre les issues dans cette modélisation. Nous ne pourrons donc pas utiliser les méthodes de dénombrement.

Notons A l'événement « obtenir un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$A = \{2; 4; 6\}$.
Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(6) \\ &= 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}5 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(A) = 0{,}7.$$

3. Notons B l'événement « obtenir un nombre strictement supérieur à 4.

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$B = \{5; 6\}$.
Donc

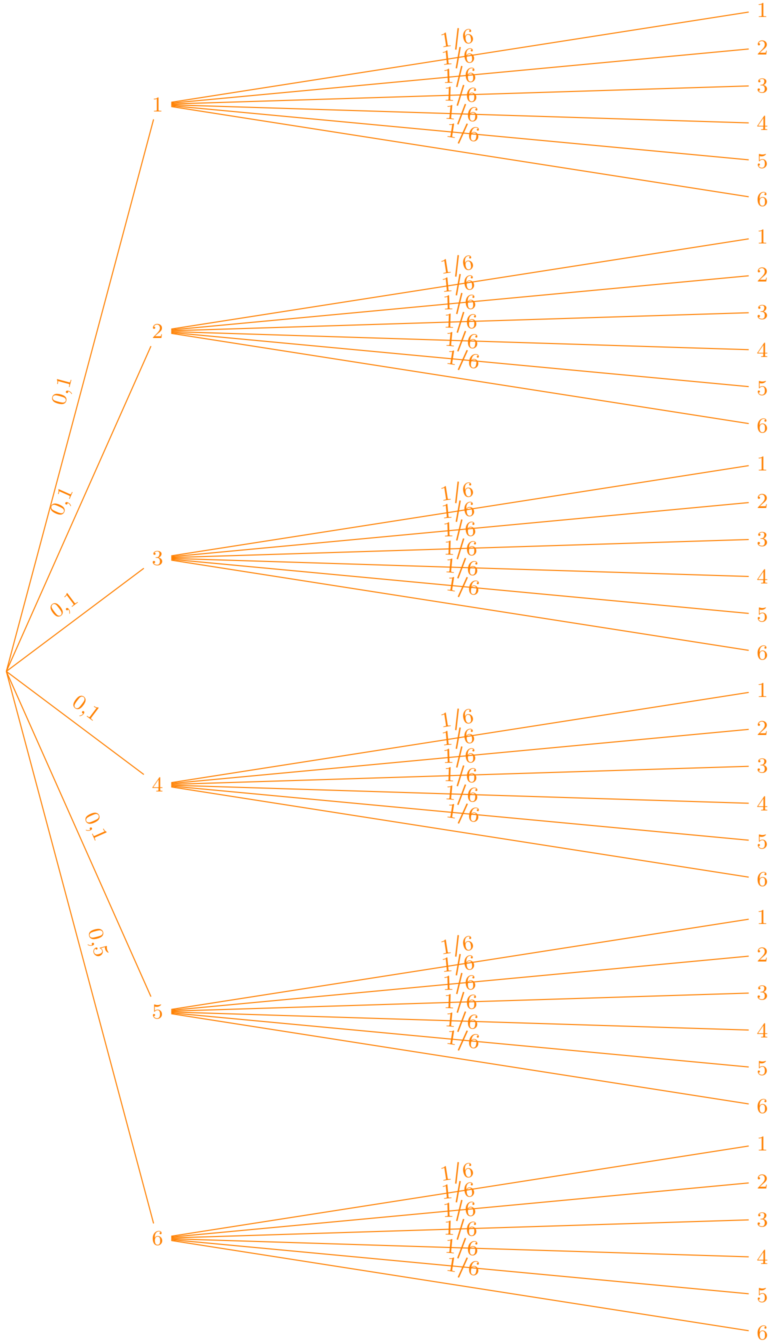
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(6)\\ &= 0{,}1 + 0{,}5\\ &= 0{,}6\end{aligned}$$

Avec un dé parfaitement équilibré (et donc avec la loi d'équiprobabilité $\mathbb{P}'$) B étant réalisé par 2 issues sur un total de 6 la probabilité de B serait :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}'(B) &= \frac{2}{6}\\ &= \frac{1}{3}\\ &= 0{,}333\ldots\end{aligned}$$

Pour obtenir un résultat strictement supérieur à 4 il a intérêt à utiliser son dé truqué.

4. (a) La façon la plus simple de raisonner est de dessiner un arbre pondéré mais l'arbre étant très grand je me suis contenté de faire les calculs. Par acquis de conscience voici à quoi ressemblerait l'arbre.


0,1
0,1
0,1
0,1
0,1
0,5
1
2
3
4
5
6
1/6
1
2
3
4
5
6

Avec un petit effort d'imagination l'arbre est inutile.

Les deux lancers sont indépendants (d'après le contexte) donc on peut considérer que les lancers sont successifs : on lance d'abord le dé truqué et ensuite le dé équilibré.
L'univers est donc formé de couples dont la première valeur est le résultat du lancer du dé truqué (avec la loi de probabilité $\mathbb{P}$ vue plus haut) et la seconde valeur est le résultat du lancer du dé équilibré (avec la loi de probabilité $\mathbb{P}'$ qui est l'équiprobabilité. Munissons cet ensemble de couples de la loi de probabilité $\mathbb{P}''$ induite par les lois $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$.

Calculons $\mathbb{P}''(6{,}6)$.

$\mathbb{P}(6) = 0{,}5 >$ donc, d'après la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}''(6{,}6) = \mathbb{P}'_6(6) \times \mathbb{P}(6)$$

Et puisque les lancers sont indépendants :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}''(6{,}6) &= \mathbb{P}'(6) \times \mathbb{P}(6)\\ &= 0{,}5 \times \frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir 12 est $\frac{1}{12}$.

(b) Reprenons la modélisation précédente.
Notons X la variable aléatoire qui a chaque couple associe la somme des valeurs.

Calculons $\mathbb{P}''(X = 10)$.

$\{X = 10\} = \{(6{,}4),(5{,}5),(4{,}6)\}$.
Donc :

$$\mathbb{P}''(X = 10) = \mathbb{P}''(6{,}4) + \mathbb{P}''(5{,}5) + \mathbb{P}''(4{,}6)$$

Puis en procédant comme à la question précédente :

$$\mathbb{P}''(X = 10) = 0{,}5 \times \frac{1}{6} + 0{,}1 \times \frac{1}{6} + 0{,}1 \times \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}''(X=10)=\frac{7}{60}.$$

Exercice 2.

1. Puisque $EO = AC = 2AO$ il suffit de

   calculons AO.

   Puisque AOB est rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

   $$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

   Comme de plus AOB est isocèle en O :

   $$2AO^2 = AB^2$$

   nous en déduisons successivement à :

   $$\begin{aligned} 2AO^2 &= 4^2 \\ \frac{2AO^2}{2} &= \frac{16}{2} \\ AO^2 &= 8 \end{aligned}$$

   Et puisque AO est une longueur donc un nombre positif :

   $$\begin{aligned} AO &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

   $$EO = 4\sqrt{2}$$

2. Calculons AE.

   Puisque AOE est rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

   $$AE^2 = AO^2 + OE^2$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} AE^2 &= \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 40 \end{aligned}$$

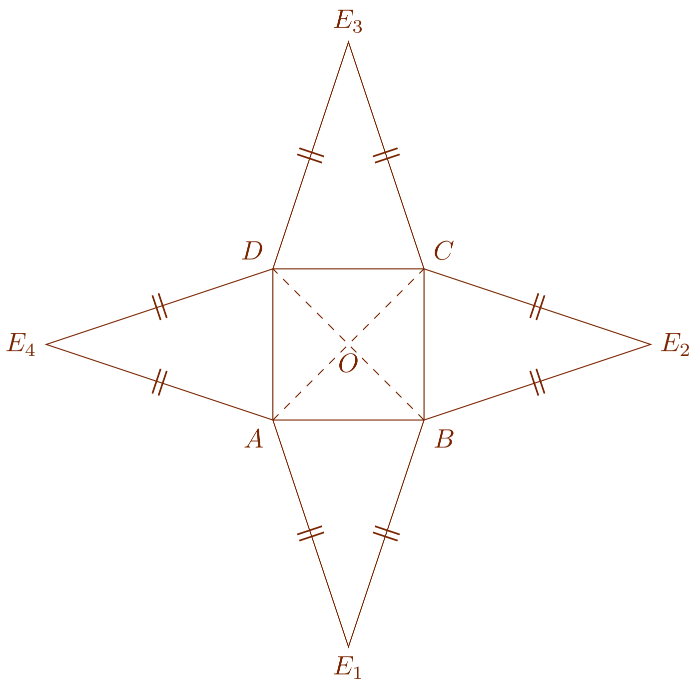
AE étant une longueur c'est un nombre positif :

$$AE = \sqrt{40}$$

$$\boxed{AE = 2\sqrt{10} \text{ cm.}}$$

$$\boxed{AE \approx 6{,}3 \text{ cm.}}$$

3. Ici à l'échelle 1/2.



Exercices 3.

1. (a) Considérons le tableau d'état des variables du programme.

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5
mettre ma variable à réponse	5	5
ajouter à ma variable -4	$5+(-4)=1$	5
mettre ma variable à 3 * ma variable	$3\times 1=3$	5
ajouter à ma variable 3	$3+3=6$	5

Et comme le programme renvoie le contenu de ma variable :

si on entre 5 alors le programme A renvoie 6.

(b) Considérons le tableau d'état des variables du programme.

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5
mettre ma variable à 3 * réponse	$3\times 5=15$	5
ajouter à ma variable -9	$15-9=6$	5

Et comme le programme renvoie le contenu de ma variable :

si on entre 5 alors le programme B renvoie 6.

(c) Considérons le tableau d'état des variables du programme A :

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5,2
mettre ma variable à réponse	5,2	5,2
ajouter à ma variable -4	$5{,}2 + (-4) = 1{,}2$	5,2
mettre ma variable à 3 * ma variable	$3 \times 1{,}2 = 3{,}6$	5,2
ajouter à ma variable 3	$3{,}6 + 3 = 6{,}6$	5,2

Puis celui du programme B :

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5,2
mettre ma variable à 3 * réponse	$3 \times 5{,}2 = 15{,}6$	5,2
ajouter à ma variable -9	$15{,}6 - 9 = 6{,}6$	5,2

Finalement

si on entre 5,2 alors les deux programmes A et B renvoient 6,6.

(d) Les questions précédentes nous incitent à conjecturer :

il semble que les deux programmes renvoient le même résultat.

Cette conjecture est émise à partir de deux exemples seulement et des exemples qui n'ont peut être pas été choisis au hasard par les créateurs du sujet. Essayons une autre valeur comme 0. Nous voyons que les deux programmes renvoient 0. Le résultat semble général démontrons-le.

Démontrons que les deux programmes renvoient le même résultat.

Si le nombre choisi est x alors pour le programme A :

	ma variable	réponse
demander (Entrer un nombre) et attendre		x
mettre ma variable à (réponse)	x	x
ajouter à ma variable (-4)	$x + (-4) = x - 4$	x
mettre ma variable à (3 * ma variable)	$3 \times (x - 4)$	x
ajouter à ma variable (3)	$3(x - 4) + 3$	x

et pour le programme B :

	ma variable	réponse
demander (Entrer un nombre) et attendre		x
mettre ma variable à (3 * réponse)	$3 \times x$	x
ajouter à ma variable (-9)	$3x - 9$	x

Ainsi le programme A renvoie le nombre $A = 3(x-4)-9$ et le B renvoie le nombre $B = 3x - 9$.

Démontrons que les nombres A et B sont égaux.

Pour montrer que ces deux expressions sont égales il faut les exprimer sous forme développée et réduite. Comme B est déjà développé partons de A.

$$\begin{aligned} A &= 3(x-4)+3 \\ &= 3 \times x - 3 \times 4 + 3 \\ &= 3x - 12 + 3 \\ &= 3x - 9 \end{aligned}$$

Ainsi $A = B$.

> Nous avons démontré que les programme renvient le même résultat.

2. Déterminons la valeur x a choisir pour que le programme B (par exemple) renvoie 14.

Nous souhaitons donc que x, le nombre de départ, vérifie :

$$3x - 9 = 14$$

C'est une équation linéaire il faut donc la résoudre en isolant l'inconnue x.
Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 3x - 9 + 9 &= 14 + 9 \\ 3x &= 23 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{23}{3} \\ x &= \frac{23}{3} \end{aligned}$$

Il faut entrer $\frac{23}{3}$ pour que le programme renvoie 14.

3. Pour démontrer un résultat général sur le résultat du programme il faut utiliser une expression générale du résultat du programme : $3x - 9$.
Le résultat sera divisible s'il peut s'écrire $3\times?$ (? désignant un nombre entier).
Il faut donc que nous trouvions $3x - 9 = 3\times?$.

Démontrons que le résultat est divisible par trois.

Soit x un entier.
Nous allons factoriser en utilisant la distributivité.

$$\begin{aligned} 3x - 9 &= 3\times x - 3\times 3 \\ &= 3\times(x-3) \end{aligned}$$

x étant un entier $x - 3$ est aussi un entier et nous pouvons conclure :

Si le nombre entré dans le programme est un entier le résultat est un multiple de 3.

Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.

Situation 2.

1.
2.
3.

Situation 3.

1.
2.
3.
4.

Situation 4.

1.
2.
3.
4.