Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 1.

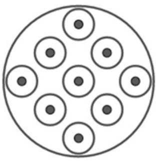
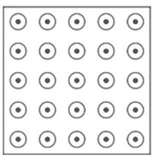
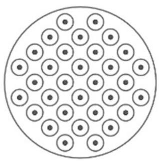
Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

Première partie (13 points).

Dans tout ce problème, on s'intéresse à la société AMP'OUL, qui fabrique des ampoules à diodes électroluminescentes. Le fabricant propose trois modèles :

Modèle		Nombre de diodes	Dimensions	Coût de fabrication du support
A		9	Cylindre Diamètre 4,5 cm Hauteur 6 cm	93 centimes
B		25	Pavé droit Carré lumineux de 5 cm de côté Hauteur 6 cm	98 centimes
C		32	Cylindre Diamètre 5 cm Hauteur 6 cm	112 centimes

Partie A : coût de fabrication.

1. Le modèle A est formé de 9 diodes et de son support. Sachant que le coût d'une diode est de 18 centimes, montrer que le coût de fabrication d'une ampoule de modèle A est de 2,55 €.

   Déterminons le coût de fabrication, c_A, pour le modèle A.

* Le coût des diodes est : $9 \times 0{,}18$ € = 1,62 €.

* Le coût du support est 0,93 €.

Nous en déduisons le coût de fabrication :

$$c_A = 1{,}62 \text{ €} + 0{,}93 \text{ €}$$

$$\boxed{c_A = 2{,}55 \text{ €}.}$$

2. Une feuille de calcul a été produite pour calculer les coûts de fabrication des ampoules :

	A	B	C	D	E	F
1	**Modèle**	**Nombre de diodes**	**Coût de fabrication du support (€)**	**Coût de fabrication du modèle (€)**	**Nombre de modèles produits**	**Coût total**
2	**A**	9	0,93		19 000	
3	**B**	25	0,98		14 900	
4	**C**	32	1,12		3 094	

(a) Quelle formule peut-on écrire dans la cellule D2 puis étirer vers le bas, pour calculer le coût de fabrication d'une ampoule du modèle correspondant ?

Une formule possible en D2 est :

$$\boxed{= 0{,}18 * \mathtt{B2} + \mathtt{C2}.}$$

(b) Quelle formule peut-on écrire dans la cellule F2 puis étirer vers le bas pour obtenir le coût total de production des ampoules du modèle correspondant ?

Une formule possible en F2 est :

$$\boxed{= \mathtt{D2} * \mathtt{E2}.}$$

3. Calculer le coût total de production pour fabriquer 19 000 ampoules de modèle A, 14 900 ampoules de modèle B et 3 094 ampoules de modèle C. On l'appellera la commande « DUPONT ».

   Déterminons le coût, c_D, de la commande Dupont.

   * Le coût de fabrication d'une ampoule de modèle B est

$$\begin{aligned} c_B &= 25 \times 0{,}18 \text{ €} + 0{,}98 \text{ euro} \\ &= 5{,}48 \text{ €} \end{aligned}$$

   * Le coût de fabrication d'une ampoule de modèle C est

$$\begin{aligned} c_C &= 32 \times 0{,}18 \text{ €} + 1{,}12 \text{ euro} \\ &= 6{,}88 \text{ €} \end{aligned}$$

   Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} c_D &= 19\,000 c_A + 14\,900 c_B + 3\,094 c_C \\ &= 19\,000 \times 2{,}55 \text{ €} + 14\,900 \times 5{,}48 \text{ €} + 3\,094 \times 6{,}88 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_D = 151\,388{,}72 \text{ €}.}$$

Partie B : emballage.

1. Calculer le volume d'une ampoule de modèle A. Donner le résultat arrondi au millimètre cube.

   On rappelle que le volume d'un cylindre dont l'aire de la base est B et de hauteur h est égale à $B \times h$.

   Calculons $\mathscr{V}_A$ le volume de l'ampoule A.

   L'ampoule étant un cylindre son volume est donné par :

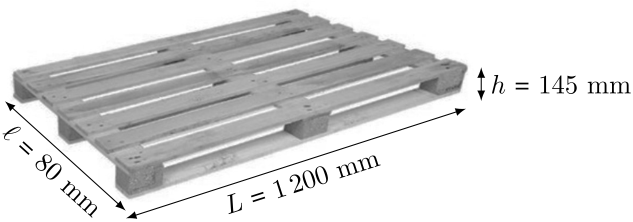
$$\begin{aligned}\mathscr{V}_A &= \pi R^2 \times h\\ &= \pi\left(\frac{4{,}5}{2}\text{ cm}\right)^2 \times 6 \text{ cm}\\ &= \pi \times 2{,}25^2 \times 6 \text{ cm}^3\\ &= 30{,}375\pi \text{ cm}^3\\ &\approx 95{,}425876 \text{ cm}^3 \text{ en tronquant.}\end{aligned}$$

En arrondissant au m^3 :

$$\boxed{\mathscr{V}_A \approx 95{,}426 \text{ cm}^3.}$$

Les ampoules sont conditionnées dans des boîtes en carton parallélépipédiques, puis stockées sur des palettes. L'entreprise choisit, pour ses trois types d'ampoules, des boites parallélépipédiques de dimensions $L = 5$ cm, $\ell = 5$ cm et $h = 7$ cm, au prix unitaire de 0,12 €.

2. La palette EURO vide, possède des dimensions standards, soit $L = 1\,200$ mm, $\ell = 800$ mm et $h = 145$ mm.



(a) Montrer que le nombre maximum de boites d'ampoules sur un étage de palette est de 384.

Déterminons le nombre n_e de boîte sur un étage de palette.

Pour que le nombre de boîtes disposées sur la palette soit maximal il faut les placer avec la face carrée (qui est celle d'aire minimale) à l'horizontale.

* Comme 1200 mm = 120 cm = 24 × 5 cm, il est possible de placer 24 boîtes dans le sens de la longueur.

* Comme 800 mm = 80 cm = 16 × 5 cm, il est possible de placer 16 boîtes dans le sens de la largeur.

Sur un étage de palette le nombre de boîte est donc :

$$n_e = 24 \times 16$$

$$n_e = 384.$$

(b) Sachant que la hauteur d'une palette chargée ne dépassera pas 1,20 m au total (palette comprise), combien d'étages de 384 boites d'ampoules peut-on positionner au maximum sur une telle palette ?

Déterminons le nombre x_h d'étages qu'il sera possible de disposer sur une palette.

Puisque la hauteur de la palette est de 14,5 cm et que la hauteur totale ne doit pas excéder 120 cm, nous devons avoir :

$$14{,}5 + x_h \times 7 \leqslant 120$$

ce qui équivaut successivemetn à :

$$\begin{aligned} 14{,}5 + x_h \times 7 - 14{,}5 &\leqslant 120 - 14{,}5 \\ x_h \times 7 &\leqslant 105{,}5 \\ \frac{x_h \times 7}{7} &\leqslant \frac{105{,}5}{7} \text{ car } 7 > 0 \\ x_h &\leqslant \frac{105{,}5}{7} \end{aligned}$$

Or, en tronquant, $\frac{105{,}5}{7} \approx 15{,}07$ donc, x_h étant un nombre entier, $x_h \leqslant 15$.

Il est possible d'empiler 15 étages au maximum.

(c) Une palette contient seulement un modèle d'ampoule et coûte 15 €. Quel sera le coût en palettes pour la commande « DUPONT » ?

Déterminons le coût c_P en palettes.

Commençons par chercher le nombre de palettes nécessaire pour chaque type d'ampoules.
Sur une palette il est possible de mettre $384 \times 15 = 5760$ boîtes.

* Modèle A. $19000 = 5760 \times 3 + 1720$. Il faudra 4 palettes.
* Modèle B. $14900 = 5760 \times 2 + 3380$. Il faudra 3 palettes.
* Modèle C. $3094 = 5760 \times 0 + 3094$. Il faudra une palette.

La commande nécessitera $4 + 3 + 1 = 8$ palettes.
Le coût en palettes est donc : $c_P = 8 \times 15$ €.

$$c_P = 120 \text{ €}.$$

3. Quel sera le coût total de l'emballage pour la commande « DUPONT » (boîtes + palettes) ?

Déterminons le coût total c_E d'emballage.

En plus des palettes il faut payer 0,12 € pour chacune des $19000 + 14900 + 3094 = 36994$ boîtes, donc

$$\begin{aligned} c_E &= c_P + 36994 \times 0{,}12 \text{ €} \\ &= 120 \text{ €} + 36994 \times 0{,}12 \text{ €} \end{aligned}$$

$$c_E = 4559{,}28 \text{ €}.$$

Partie C : coût de fonctionnement.

L'entreprise AMP'OUL emploie treize personnes : 8 pour la chaîne de fabrication, 3 pour l'emballage et l'organisation des livraisons (dont les salaires sont identiques), 2 pour la comptabilité et la gestion (dont les salaires sont identiques).

Les salaires nets suivants, en euros, ont été reçus par les salariés en février 2020 :

Chaîne de fabrication			
1 938,36	1 488,11	1 994,38	2 048,37
2 192,48	1 998,93	1 539,45	1 948,37

Emballage et organisation des livraisons	1 864,37	Comptabilité et gestion	1 593,38

1. Quelle est l'étendue de cette série ?

   Déterminons l'étendue de cette série.

   Ordonnons les salaires :
   $1\,488{,}11 < 1\,539{,}45 < 1\,593{,}38 < 1\,864{,}37 < 1\,938{,}36 < 1\,948{,}37 < 1\,994{,}38 < 1\,998{,}93 < 2\,048{,}37 < 2\,192{,}48$
   Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} e &= max - min \\ &= 2\,192{,}48 - 1\,488{,}11 \end{aligned}$$

$$\boxed{e = 704{,}37 \text{ €.}}$$

2. Déterminer le salaire médian de cette entreprise.

   Déterminons le salaire médian Me.

   * La série ordonnée des $8 + 3 + 2 = 13$ salaires est $1\,488{,}11 < 1\,539{,}45 < 1\,593{,}38 \leqslant 1\,593{,}38 < 1\,864{,}37 \leqslant 1\,864{,}37 \leqslant 1\,864{,}37 < 1\,938{,}36 < 1\,948{,}37 < 1\,994{,}38 < 1\,998{,}93 < 2\,048{,}37 < 2\,192{,}48$.
   * Puisque $\frac{13}{2} = 6{,}5$ la médiane est la septième valeur de la série ordonnée.
   * Nous voyons, dans la série ordonnée, que la septième valeur est $1\,864{,}37$.

$$\boxed{Me = 1\,864{,}37 \text{ €.}}$$

3. Calculer le salaire moyen dans cette entreprise.

   Calculons le salaire moyen, $\overline{x}$, dans l'entreprise.

$$\overline{x} = \frac{1\,488{,}11 + 1\,539{,}45 + 2 \times 1\,593{,}38 + 3 \times 1\,864{,}37 + \cdots + 2\,192{,}48}{13}$$

$$\boxed{\overline{x} = 1\,840{,}64 \text{ €.}}$$

4. Le coût global d'un salarié en février 2020 est donné par la formule suivante pour cette entreprise :

$$\boxed{\text{Coût global d'un salarié} = \frac{\text{salaire net}}{0{,}78} \times 1{,}45.}$$

Quel est le coût global en euros, pour un salarié de l'emballage et de l'organisation des livraisons ?

Déterminons le coût global, c_G, du salarié.

$$\begin{aligned} c_G &= \frac{1\,864{,}37}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &\approx 3\,465{,}816\,0 \text{ en tronquant.} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_G \approx 3\,465{,}82 \text{ €.}}$$

5. On souhaite augmenter de 3 % le salaire net de l'employé gagnant 1488,11 €.

   (a) Quel est le salaire net de cet employé après augmentation ?

   Déterminons le salaire s' après augmentation.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 3 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{3}{100} \\ &= 1{,}03 \end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned} s' &= 1\,488{,}11 \times CM \\ &= 1\,488{,}11 \times 1{,}03 \\ &= 1\,532{,}753\,3 \end{aligned}$$

$$\boxed{s' \approx 1\,532{,}75 \text{ €.}}$$

(b) Calculer le coût global de ce salaire après augmentation.

Calculons le coût global, $c^{'}$, après augmentation.

$$\begin{aligned} c^{'} &= \frac{s^{'}}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= \frac{1\,532{,}753\,3}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &\approx 2\,849{,}349\,08 \end{aligned}$$

$$\boxed{c^{'} \approx 2\,849{,}35 \text{ €}.}$$

(c) De quel pourcentage le coût global a-t-il augmenté ?

Calculons le taux d'évolution, t_c, du coût.

Notons c le coût global avant augmentation.

$$\begin{aligned} c^{'} &= \frac{s^{'}}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= \frac{CM \times s}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= CM \times \frac{s}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= CM \times c \end{aligned}$$

Donc le coût global a augment de 3 %.

Voici une autre rédaction plus élémentaire.

$$\begin{aligned} c &= \frac{s}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= \frac{1\,488{,}11}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &\approx 2766{,}36 \end{aligned}$$

D'où le taux d'évolution :

$$\begin{aligned} t_c &= \frac{c' - c}{c} \times 100 \\ &\approx \frac{2849{,}35 - 2766{,}36}{2766{,}36} \times 100 \\ &\approx 2{,}9999 \end{aligned}$$

Le coût global a augmenté de 3 %.

Partie D : transport et livraison.

L'entreprise AMP'OUL travaille avec deux sociétés de livraison, qui lui proposent des tarifs adaptés à ses besoins.

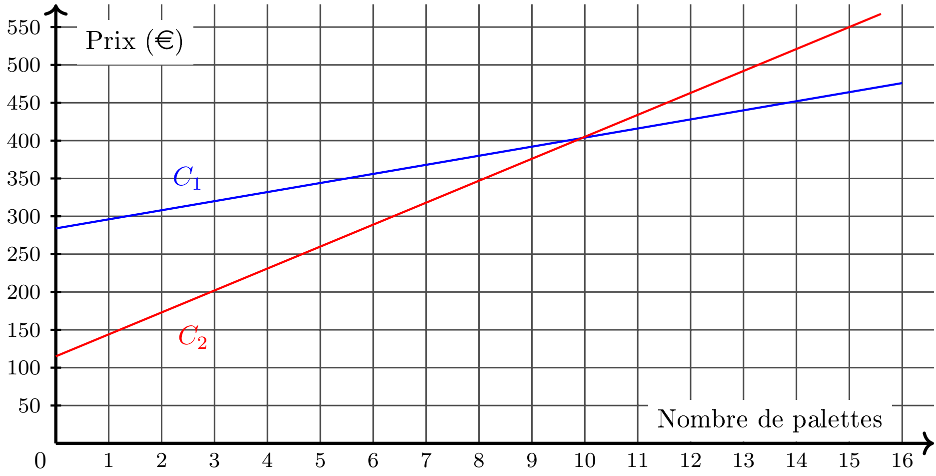
Société	Tarif par palette (€)	Frais de gestion (€)
Société A	12	284
Société B	29	115

On définit les fonctions f et g par les expressions algébriques suivantes :

- $f(x) = 12x + 284$,
- $g(x) = 29x + 115$.

Ainsi, si x désigne un nombre de palettes alors $f(x)$ et $g(x)$ désignent respectivement le prix à payer pour la livraison de ces x palettes par les sociétés A et B.

On a tracé les courbes correspondant à f et g dans le repère ci-dessous.



1. Répondre, en vous aidant du graphique, aux questions suivantes :

   (a) Identifier la courbe qui correspond à chaque fonction.

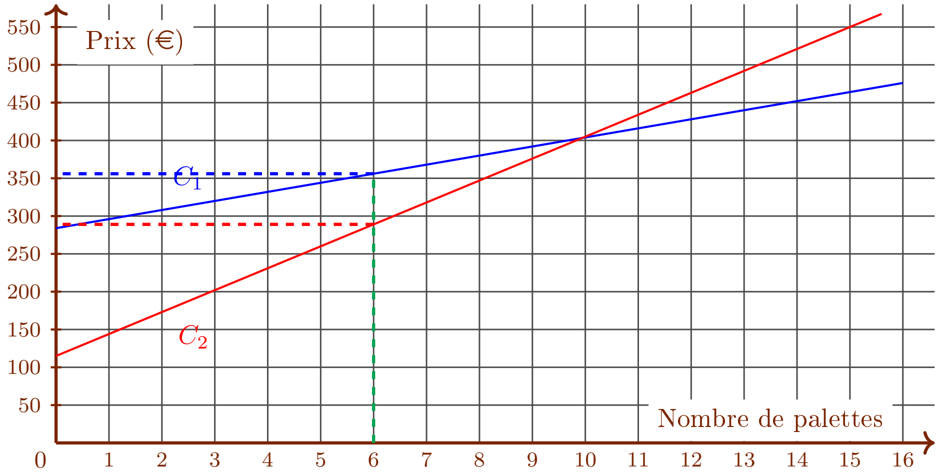
   Identifions les fonctions.

   Il s'agit de deux fonctions affines. Nous pourrions les identifier avec leur coefficient directeur ou leur ordonnée à l'origine. Nous allons utiliser l'ordonnée à l'origine.

   $f(0) = 12 \times 0 + 284 = 284$ et $g(0) = 29 \times 0 + 115 = 115$ donc la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(0; 284)$ et la courbe représentative de g passe par le point de coordonnées $(0; 115)$.

   $\boxed{C_1 \text{ est la courbe représentative de } f \text{ et } C_2 \text{ celle de } g.}$

   (b) Quelle société de livraison sera la plus économique pour une commande de 6 palettes ?



La société B est la plus économique pour 6 palettes.

(c) Pour une commande donnée, quelle société de livraison sera la plus économique en fonction du nombre de palettes ?

Pour une commande d'un maximum de 9 palettes la société B est la plus économique sinon c'est la A.

2. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Utiliser cette résolution pour affiner la réponse à la question 1.(c).

Résolvons l'équation $f(x) = g(x)$.

Soit $x \in [0; +\infty[$.

$$f(x) = g(x)$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
12x + 284 &= 29x + 115 \\
12x + 284 - 29x &= 29x + 115 - 29x \\
-17x + 284 &= 115 \\
-17x + 284 - 284 &= 115 - 284 \\
-17x &= -169 \\
\frac{-17x}{-17} &= \frac{-169}{-17} \\
x &= \frac{169}{17}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$x \approx 9{,}941$$

> Pour une commande d'un maximum de 9 palettes la société B est la plus économique sinon c'est la A.

Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

Rémi joue avec un dé truqué. Il sait qu'il a la même probabilité d'obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5. Il sait également que la probabilité d'obtenir 6 est de $\frac{1}{2}$.

Rémi lance le dé.

1. Quelle est la probabilité qu'il obtienne 3 ?

   Calculons $\mathbb{P}(3)$.

   Les issues 1, 2, 3, 4 et 5 ont toutes la même probabilité d'être réalisée que nous noterons p.
   Par définition d'une probabilité (sur un univers fini) la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1 donc :

$$5 \times p + \frac{1}{2} = 1$$

ce qui équivaut succcessivement à :

$$\begin{aligned} 5p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} &= 1 - \frac{1}{2} \\ 5p &= \frac{1}{2} \\ \frac{5p}{5} &= \frac{\frac{1}{2}}{5} \\ p &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \\ p &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(3) = 0{,}1.}$$

2. Quelle la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

L'univers est ici $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
D'après la question précédente, la loi de probabilité sur cet univers peut être résumée par le tableau :

ω	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\omega)$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5

Il n'y a pas équiprobabilité entre les issues dans cette modélisation. Nous ne pourrons donc pas utiliser les méthodes de dénombrement.

Notons A l'événement « obtenir un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$A = \{2; 4; 6\}$.
Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(6) \\ &= 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}5 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 0{,}7.}$$

3. Rémi souhaite obtenir un résultat strictement supérieur à 4. A-t-il intérêt à utiliser son dé truqué ou un dé équilibré ? Justifier.

   Notons B l'événement « obtenir un nombre strictement supérieur à 4.

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

   $B = \{5; 6\}$.
   Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(6)\\ &= 0{,}1 + 0{,}5\\ &= 0{,}6\end{aligned}$$

   Avec un dé parfaitement équilibré (et donc avec la loi d'équiprobabilité $\mathbb{P}'$) B étant réalisé par 2 issues sur un total de 6 la probabilité de B serait :

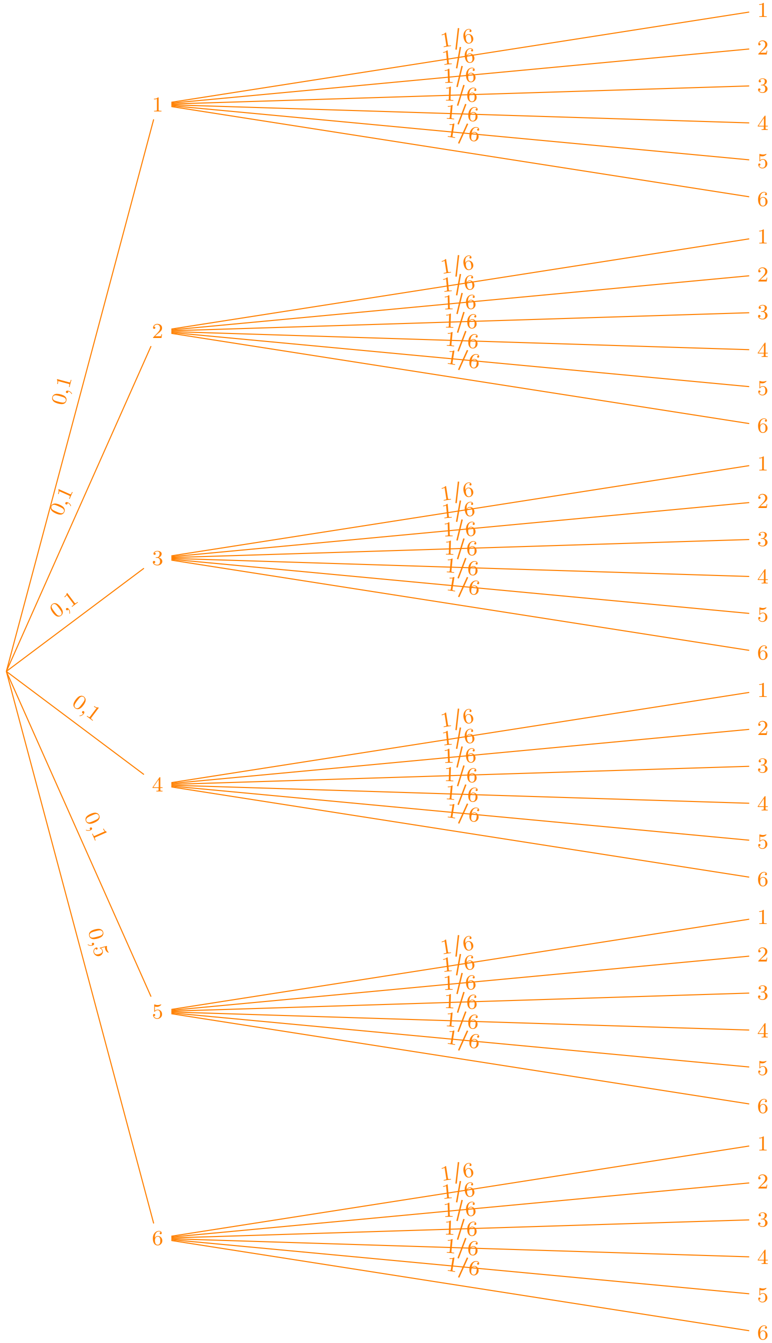
$$\begin{aligned}\mathbb{P}'(B) &= \frac{2}{6}\\ &= \frac{1}{3}\\ &= 0{,}333\ldots\end{aligned}$$

   Pour obtenir un résultat strictement supérieur à 4 il a intérêt à utiliser son dé truqué.

4. Rémi doit lancer son dé truqué et un dé équilibré. Le résultat obtenu sera la somme des résultats obtenus sur chaque dé.

   (a) Quelle est la probabilité qu'il obtienne 12 ?

   La façon la plus simple de raisonner est de dessiner un arbre pondéré mais l'arbre étant très grand je me suis contenté de faire les calculs. Par acquis de conscience voici à quoi ressemblerait l'arbre.


0,1
0,1
0,1
0,1
0,1
0,5
1
2
3
4
5
6
1/6
1
2
3
4
5
6

Avec un petit effort d'imagination l'arbre est inutile.

Les deux lancers sont indépendants (d'après le contexte) donc on peut considérer que les lancers sont successifs : on lance d'abord le dé truqué et ensuite le dé équilibré.
L'univers est donc formé de couples dont la première valeur est le résultat du lancer du dé truqué (avec la loi de probabilité $\mathbb{P}$ vue plus haut) et la seconde valeur est le résultat du lancer du dé équilibré (avec la loi de probabilité $\mathbb{P}'$ qui est l'équiprobabilité. Munissons cet ensemble de couples de la loi de probabilité $\mathbb{P}''$ induite par les lois $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$.

Calculons $\mathbb{P}''(6{,}6)$.

$\mathbb{P}(6) = 0{,}5 >$ donc, d'après la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}''(6{,}6) = \mathbb{P}'_6(6) \times \mathbb{P}(6)$$

Et puisque les lancers sont indépendants :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}''(6{,}6) &= \mathbb{P}'(6) \times \mathbb{P}(6)\\ &= 0{,}5 \times \frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir 12 est $\frac{1}{12}$.

(b) Quelle est la probabilité qu'il obtienne 10 ?

Reprenons la modélisation précédente.
Notons X la variable aléatoire qui a chaque couple associe la somme des valeurs.

Calculons $\mathbb{P}''(X = 10)$.

$\{X = 10\} = \{(6{,}4),(5{,}5),(4{,}6)\}$.
Donc :

$$\mathbb{P}''(X = 10) = \mathbb{P}''(6{,}4) + \mathbb{P}''(5{,}5) + \mathbb{P}''(4{,}6)$$

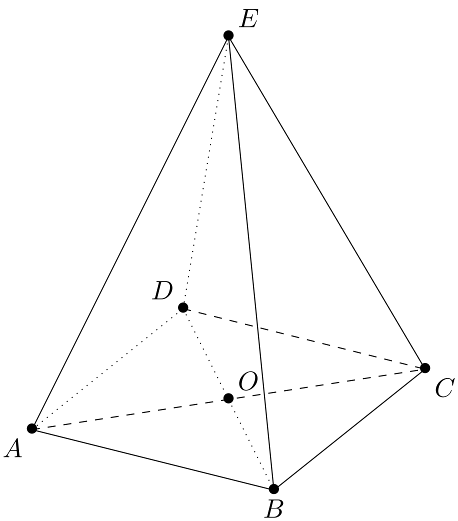
Puis en procédant comme à la question précédente :

$$\mathbb{P}''(X = 10) = 0{,}5 \times \frac{1}{6} + 0{,}1 \times \frac{1}{6} + 0{,}1 \times \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{P}''(X = 10) = \tfrac{7}{60}.}$$

Exercice 2.

$ABCDE$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ telle que $EO = AC$, O étant l'intersection des deux diagonales du carré $ABCD$.



La longueur des côtés du carré $ABCD$ est de 4 cm.

1. Déterminer la valeur exacte de EO.

   Puisque $EO = AC = 2AO$ il suffit de

   calculons AO.

   Puisque AOB est rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

Comme de plus AOB est isocèle en O :

$$2AO^2 = AB^2$$

nous en déduisons successivement à :

$$\begin{aligned} 2AO^2 &= 4^2 \\ \frac{2AO^2}{2} &= \frac{16}{2} \\ AO^2 &= 8 \end{aligned}$$

Et puisque AO est une longueur donc un nombre positif :

$$\begin{aligned} AO &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{EO = 4\sqrt{2}}$$

2. Calculer la valeur exacte de la longueur AE. En déduire que son arrondi au millimètre est de 6,3 cm.

Calculons AE.

Puisque AOE est rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$$AE^2 = AO^2 + OE^2$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} AE^2 &= \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 40 \end{aligned}$$

AE étant une longueur c'est un nombre positif :

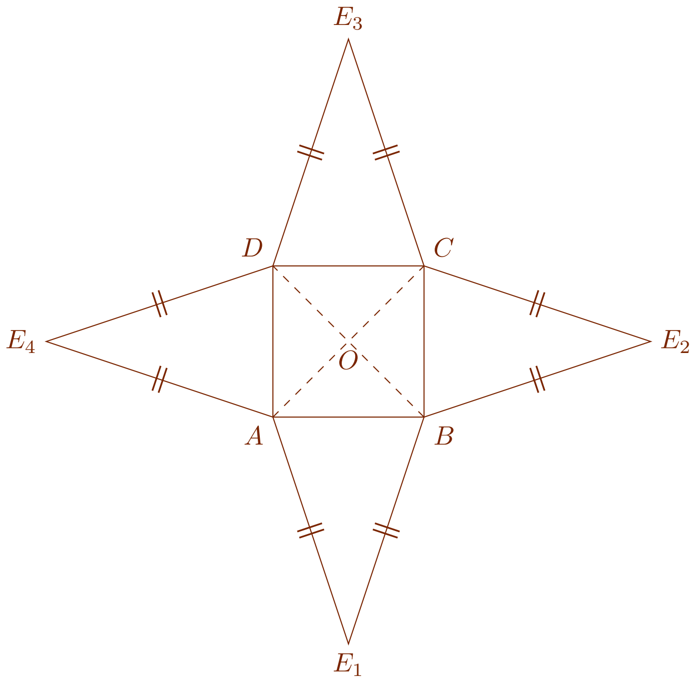
$$AE = \sqrt{40}$$

$$\boxed{AE = 2\sqrt{10} \text{ cm.}}$$

$AE \approx 6{,}3$ cm.

3. Tracer un patron de la pyramide $ABCDE$ en vraie grandeur.

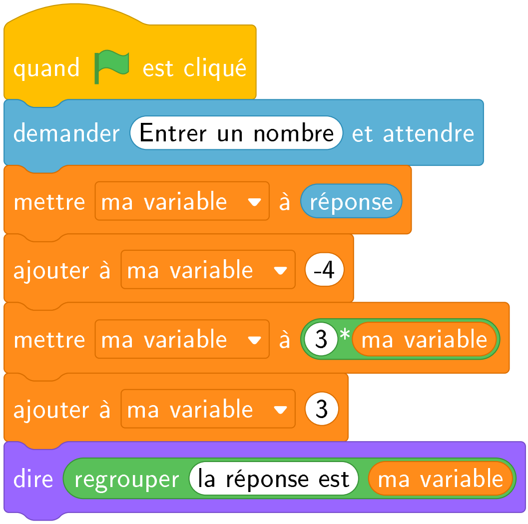
   Ici à l'échelle 1/2.



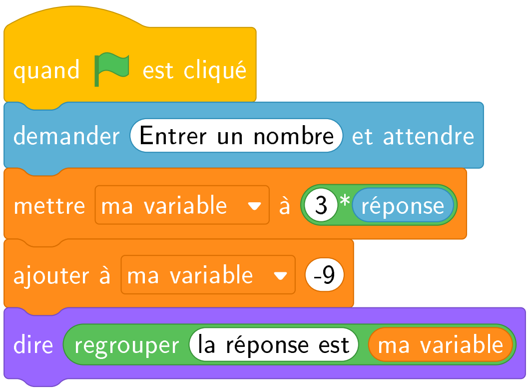
Exercices 3.

Voici deux programmes de calcul écrits avec le logiciel Scratch :

Programme A



Programme B



Dans les deux programmes, le nombre entré par l'utilisateur est stocké dans la variable « réponse ».

1. On entre différents nombres dans les deux programmes.

   (a) Avec le programme A, montrer que si on entre le nombre 5, on obtient 6.

Considérons le tableau d'état des variables du programme.

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5
mettre ma variable à réponse	5	5
ajouter à ma variable -4	$5+(-4)=1$	5
mettre ma variable à 3 * ma variable	$3\times1=3$	5
ajouter à ma variable 3	$3+3=6$	5

Et comme le programme renvoie le contenu de ma variable :

si on entre 5 alors le programme A renvoie 6.

(b) Quel est le nombre obtenu si on entre le nombre 5 avec le programme B ?

Considérons le tableau d'état des variables du programme.

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5
mettre ma variable à 3 * réponse	$3\times5=15$	5
ajouter à ma variable -9	$15-9=6$	5

Et comme le programme renvoie le contenu de ma variable :

si on entre 5 alors le programme B renvoie 6.

(c) Calculer le nombre obtenu avec les programmes A et B si on entre le nombre 5,2.

Considérons le tableau d'état des variables du programme A :

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5,2
mettre ma variable à réponse	5,2	5,2
ajouter à ma variable -4	$5{,}2+(-4)=1{,}2$	5,2
mettre ma variable à 3 * ma variable	$3\times 1{,}2=3{,}6$	5,2
ajouter à ma variable 3	$3{,}6+3=6{,}6$	5,2

Puis celui du programme B :

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5,2
mettre ma variable à 3 * réponse	$3\times 5{,}2=15{,}6$	5,2
ajouter à ma variable -9	$15{,}6-9=6{,}6$	5,2

Finalement

si on entre 5,2 alors les deux programmes A et B renvoient 6,6.

(d) Quelle conjecture pouvez-vous émettre ? Valider ou rejeter votre conjecture par une démonstration.

Les questions précédentes nous incitent à conjecturer :

il semble que les deux programmes renvoient le même résultat.

Cette conjecture est émise à partir de deux exemples seulement et des exemples qui n'ont peut être pas été choisis au hasard par les créateurs du sujet. Essayons une autre valeur comme 0. Nous voyons que les deux programmes renvoient 0. Le résultat semble général démontrons-le.

Démontrons que les deux programmes renvoient le même résultat.

Si le nombre choisi est x alors pour le programme A :

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		x
mettre ma variable à réponse	x	x
ajouter à ma variable -4	$x+(-4)=x-4$	x
mettre ma variable à 3 * ma variable	$3\times(x-4)$	x
ajouter à ma variable 3	$3(x-4)+3$	x

et pour le programme B :

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		x
mettre ma variable à 3 * réponse	$3\times x$	x
ajouter à ma variable -9	$3x-9$	x

Ainsi le programme A renvoie le nombre $A=3(x-4)-9$ et le B renvoie le nombre $B=3x-9$.

Démontrons que les nombres A et B sont égaux.

Pour montrer que ces deux expressions sont égales il faut les exprimer sous forme développée et réduite. Comme B est déjà développé partons de A.

$$\begin{aligned} A &= 3(x-4)+3 \\ &= 3\times x - 3\times 4 + 3 \\ &= 3x-12+3 \\ &= 3x-9 \end{aligned}$$

Ainsi $A=B$.

Nous avons démontré que les programme renvient le même résultat.

2. Quel nombre faut-il entrer avec le programme B pour obtenir la réponse 14 ?

Déterminons la valeur x a choisir pour que le programme B (par exemple) renvoie 14.

Nous souhaitons donc que x, le nombre de départ, vérifie :

$$3x - 9 = 14$$

C'est une équation linéaire il faut donc la résoudre en isolant l'inconnue x.
Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 3x - 9 + 9 &= 14 + 9 \\ 3x &= 23 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{23}{3} \\ x &= \frac{23}{3} \end{aligned}$$

Il faut entrer $\frac{23}{3}$ pour que le programme renvoie 14.

3. Montrer que le résultat obtenu avec le programme B est divisible par 3 quel que soit le nombre entier entré dans le programme.

Pour démontrer un résultat général sur le résultat du programme il faut utiliser une expression générale du résultat du programme : $3x - 9$.
Le résultat sera divisible s'il peut s'écrire 3×? (? désignant un nombre entier).
Il faut donc que nous trouvions $3x - 9 = 3\times?$.

Démontrons que le résultat est divisible par trois.

Soit x un entier.
Nous allons factoriser en utilisant la distributivité.

$$\begin{aligned} 3x - 9 &= 3 \times x - 3 \times 3 \\ &= 3 \times (x - 3) \end{aligned}$$

x étant un entier $x - 3$ est aussi un entier et nous pouvons conclure :

Si le nombre entré dans le programme est un entier le résultat est un multiple de 3.

Troisième partie (14 points).

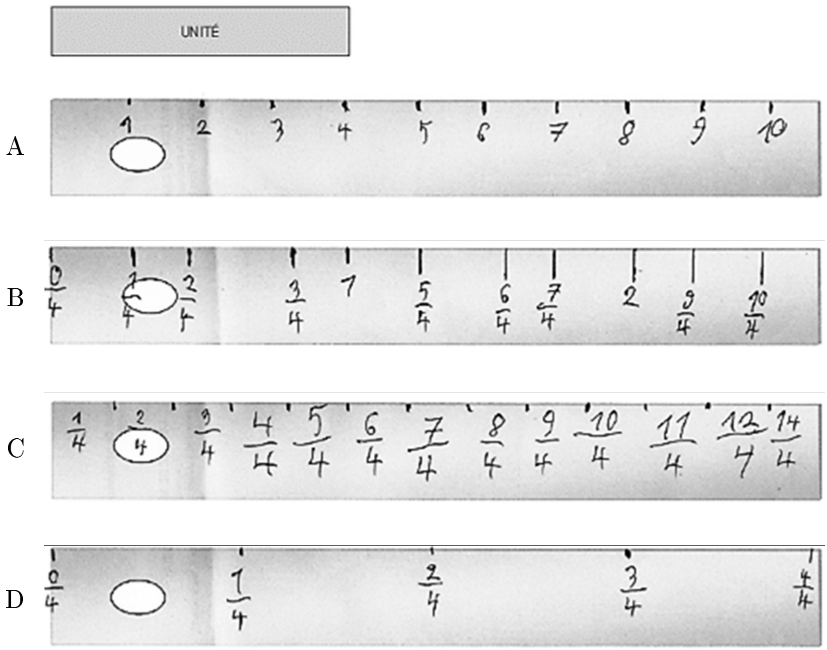
Cette partie est composée de quatre situations indépendantes.

Situation 1.

Un enseignant propose, en cycle 3, une activité consistant à fabriquer une règle graduée en quarts d'unité à partir d'une bande unité.

Chaque élève reçoit une bande unité manipulable et une bande vierge, tirées du livre *Construire les nouveaux nombres au cycle 3* CANOPÉ/IREM LYON, 2018.

Voici les réponses de quatre élèves.

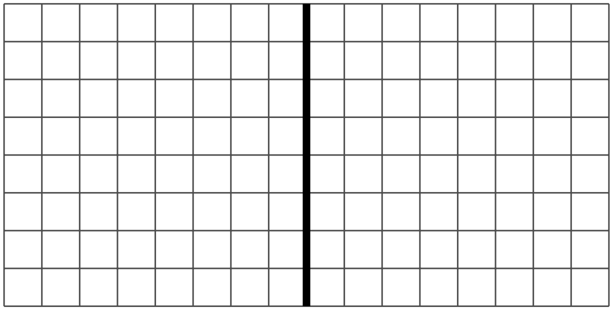


1. Analyser les réponses proposées par les élèves en cherchant à expliciter leurs réussites et leurs erreurs.

2. Citer deux critères qui peuvent être présentés aux élèves pour construire correctement une règle graduée en quarts à l'aide de la bande unité.

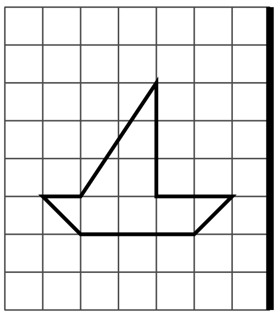
Situation 2.

Un enseignant distribue la fiche ci-dessous à chacun de ses élèves de CM2.



Puis, il leur distribue l'exercice suivant :

Reproduis et complète la figure par symétrie.

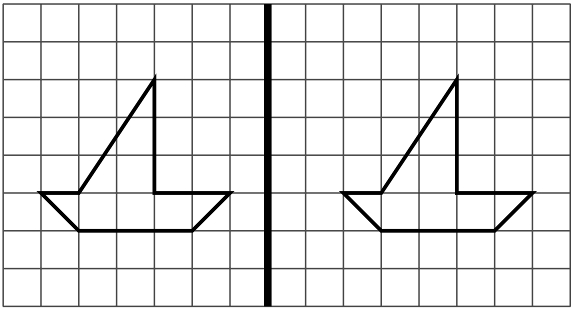


1. Citer deux prérequis nécessaires pour réaliser cet exercice.

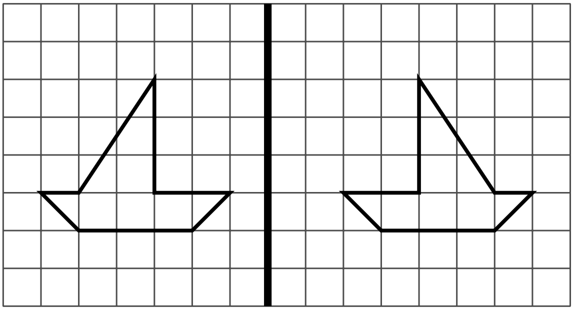
2. Identifier une variable didactique dans le choix de la forme proposée (le « bateau ») par l'enseignant.

3. On a reproduit, ci-dessous, les travaux de plusieurs élèves. Analyser ces productions en identifiant les réussites et en émettant des hypothèses sur les erreurs.

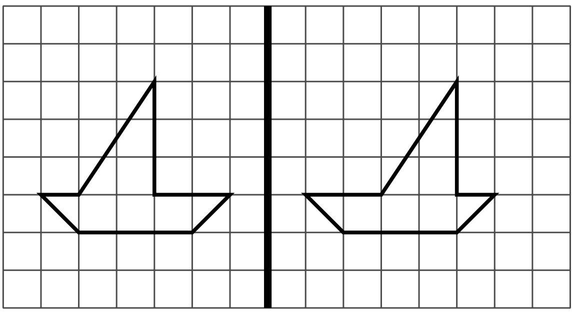
Farid.



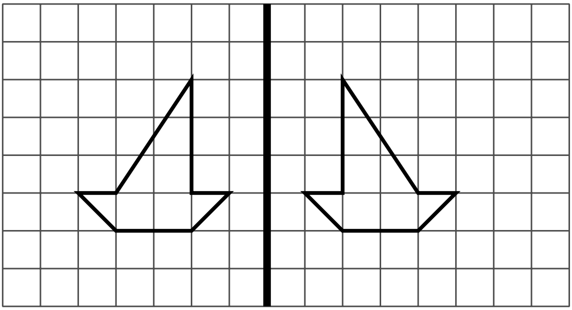
Lise.



Louanne.



Baptiste.

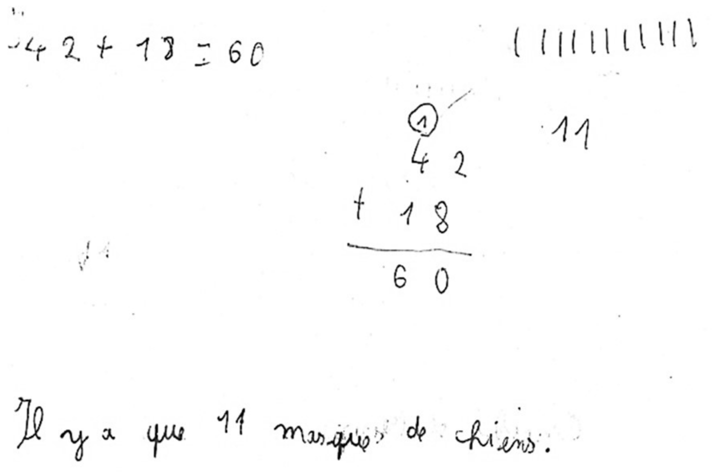


Situation 3.

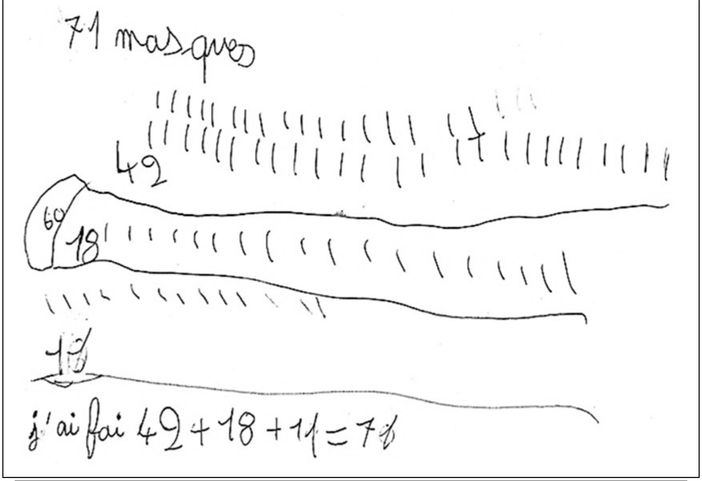
Une enseignante propose la situation suivante en cycle 2 : « *Pour le carnaval, la directrice d'école a acheté* 71 *masques. Il y a* 42 *masques de souris,* 18 *masques de chats et des masques de chiens. Combien y a-t-il de masques de chiens ?* »

Les productions de 4 élèves sont reproduites ci-dessous.

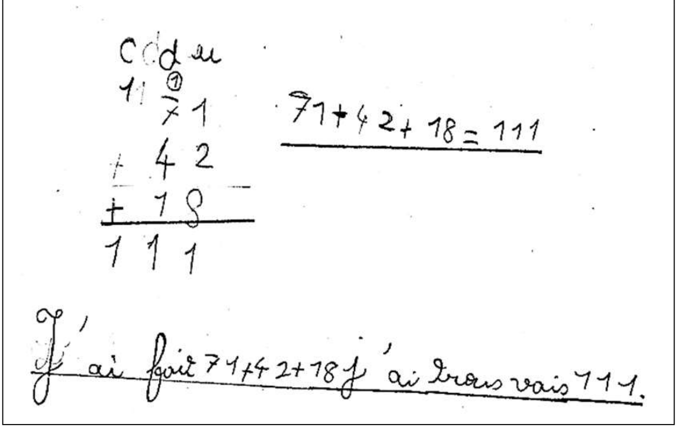
Élève A



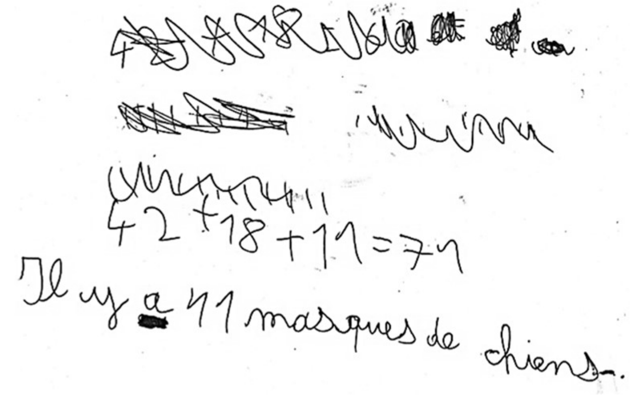
Élève B



Élève C



Élève D



1. En s'appuyant sur l'extrait de la note de service proposé ci-dessous, analyser les propositions d'élèves en termes de réussites et d'échecs pour chacune des compétences « modéliser » et « calculer ».

   Extrait de la note de service n°2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ».

   > **« Modéliser » et « Calculer » sont deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes à l'école élémentaire** qui doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :
   > — difficultés à « modéliser » : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;
   > — difficultés à « calculer » : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calculs utilisés.

2. Voici un autre extrait de la note de service n°2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ». Proposer une représentation que l'on peut envisager pour aider les élèves à modéliser ce problème.

> « La formalisation de ces exemples-types doit être l'occasion **d'introduire des représentations**, sous forme de schémas bien adaptés, permettant **la modélisation** des problèmes proposés. Ces représentations sont systématiquement utilisées lors des résolutions de problèmes menées face à la classe, afin de servir de référence aux élèves. Elles ne sont bien sûr jamais rendues obligatoires (en particulier pour les élèves en réussite qui n'en ont pas besoin), mais doivent servir de point d'appui, lors des séances d'enseignement, avec les élèves rencontrant des difficultés lors de la résolution d'un problème. »

3. En proposant le second problème ci-dessous, quelles erreurs risqueraient de ne pas être détectées ?

   « Pour le carnaval, la directrice d'école a acheté 42 masques de souris et 18 masques de chiens. Combien la directrice achète-t-elle de masques au total ? »

4. Proposer deux pistes de remédiation qui pourraient être mises en œuvre pour l'élève C. Expliciter la démarche envisagée.

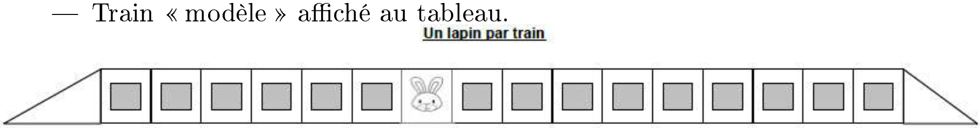
Situation 4.

Voici une situation proposée en moyenne section : le train des lapins.
Consigne donnée aux élèves :

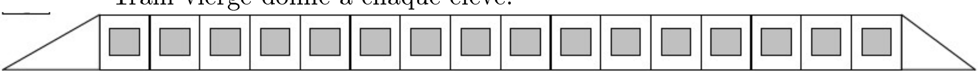
Regardez bien où est placé le lapin dans le « train modèle » situé sur le tableau.
Vous allez devoir placer un lapin dans le même wagon sur votre train.
Vous pouvez revenir voir le « train modèle » si vous le voulez.
Ensuite on vérifiera votre réponse en amenant votre train sous le « train modèle ».

Matériel disponible :

— Train « modèle » affiché au tableau.



— Train vierge donné à chaque élève.



— Lapins à découper.

1. Quel aspect du nombre est travaillé dans cet exercice ?

2. Donner deux prérequis pour qu'un élève puisse réussir la tâche.

3. Proposer deux variations pour simplifier cette situation.

4. Proposer deux variations pour complexifier cette situation.