Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Partie A : coût de fabrication.

1. Déterminons le coût de fabrication, c_A, pour le modèle A.

   * Le coût des diodes est : $9 \times 0{,}18$ € $= 1{,}62$ €.
   * Le coût du support est $0{,}93$ €.

   Nous en déduisons le coût de fabrication :

$$c_A = 1{,}62\text{ €} + 0{,}93\text{ €}$$

$$\boxed{c_A = 2{,}55\text{ €.}}$$

2. (a) Une formule possible en `D2` est :

$$\boxed{= 0{,}18 * \texttt{B2} + \texttt{C2}.}$$

   (b) Une formule possible en `F2` est :

$$\boxed{= \texttt{D2} * \texttt{E2}.}$$

3. Déterminons le coût, c_D, de la commande Dupont.

   * Le coût de fabrication d'une ampoule de modèle B est

$$\begin{aligned} c_B &= 25 \times 0{,}18\text{ €} + 0{,}98\text{ euro} \\ &= 5{,}48\text{ €} \end{aligned}$$

   * Le coût de fabrication d'une ampoule de modèle C est

$$\begin{aligned} c_C &= 32 \times 0{,}18\text{ €} + 1{,}12\text{ euro} \\ &= 6{,}88\text{ €} \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} c_D &= 19\,000c_A + 14\,900c_B + 3\,094c_C \\ &= 19\,000 \times 2{,}55 \text{ €} + 14\,900 \times 5{,}48 \text{ €} + 3\,094 \times 6{,}88 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_D = 151\,388{,}72 \text{ €}.}$$

Partie B : emballage.

1. Calculons $\mathscr{V}_A$ le volume de l'ampoule A.

   L'ampoule étant un cylindre son volume est donné par :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_A &= \pi R^2 \times h \\ &= \pi \left(\frac{4{,}5}{2} \text{ cm}\right)^2 \times 6 \text{ cm} \\ &= \pi \times 2{,}25^2 \times 6 \text{ cm}^3 \\ &= 30{,}375\pi \text{ cm}^3 \\ &\approx 95{,}425876 \text{ cm}^3 \text{ en tronquant.} \end{aligned}$$

   En arrondissant au m^3 :

$$\boxed{\mathscr{V}_A \approx 95{,}426 \text{ cm}^3.}$$

2. (a) Déterminons le nombre n_e de boîte sur un étage de palette.

   Pour que le nombre de boîtes disposées sur la palette soit maximal il faut les placer avec la face carrée (qui est celle d'aire minimale) à l'horizontale.

   * Comme 1200 mm = 120 cm = 24 × 5 cm, il est possible de placer 24 boîtes dans le sens de la longueur.
   * Comme 800 mm = 80 cm = 16 × 5 cm, il est possible de placer 16 boîtes dans le sens de la largeur.

Sur un étage de palette le nombre de boîte est donc :

$$n_e = 24 \times 16$$

$$\boxed{n_e = 384.}$$

(b) Déterminons le nombre x_h d'étages qu'il sera possible de disposer sur une palette.

Puisque la hauteur de la palette est de 14,5 cm et que la hauteur totale ne doit pas excéder 120 cm, nous devons avoir :

$$14{,}5 + x_h \times 7 \leqslant 120$$

ce qui équivaut successivemetn à :

$$\begin{aligned} 14{,}5 + x_h \times 7 - 14{,}5 &\leqslant 120 - 14{,}5 \\ x_h \times 7 &\leqslant 105{,}5 \\ \frac{x_h \times 7}{7} &\leqslant \frac{105{,}5}{7} \text{ car } 7 > 0 \\ x_h &\leqslant \frac{105{,}5}{7} \end{aligned}$$

Or, en tronquant, $\frac{105{,}5}{7} \approx 15{,}07$ donc, x_h étant un nombre entier, $x_h \leqslant 15$.

$$\boxed{\text{Il est possible d'empiler 15 étages au maximum.}}$$

(c) Déterminons le coût c_P en palettes.

Commençons par chercher le nombre de palettes nécessaire pour chaque type d'ampoules.
Sur une palette il est possible de mettre $384 \times 15 = 5760$ boîtes.

* Modèle A. $19000 = 5760 \times 3 + 1720$. Il faudra 4 palettes.
* Modèle B. $14900 = 5760 \times 2 + 3380$. Il faudra 3 palettes.
* Modèle C. $3094 = 5760 \times 0 + 3094$. Il faudra une palette.

La commande nécessitera $4 + 3 + 1 = 8$ palettes.
Le coût en palettes est donc : $c_P = 8 \times 15$ €.

$$\boxed{c_P = 120 \text{ €.}}$$

3. Déterminons le coût total c_E d'emballage.

   En plus des palettes il faut payer 0,12 € pour chacune des $19000 + 14900 + 3094 = 36994$ boîtes, donc

$$\begin{aligned} c_E &= c_P + 36994 \times 0{,}12 \text{ €} \\ &= 120 \text{ €} + 36994 \times 0{,}12 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_E = 4559{,}28 \text{ €.}}$$

Partie C : coût de fonctionnement.

1. Déterminons l'étendue de cette série.

   Ordonnons les salaires :
   $1\,488{,}11 < 1\,539{,}45 < 1\,593{,}38 < 1\,864{,}37 < 1\,938{,}36 < 1\,948{,}37 < 1\,994{,}38 < 1\,998{,}93 < 2\,048{,}37 < 2\,192{,}48$
   Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} e &= max - min \\ &= 2\,192{,}48 - 1\,488{,}11 \end{aligned}$$

$$\boxed{e = 704{,}37 \text{ €.}}$$

2. Déterminons le salaire médian Me.

   * La série ordonnée des $8 + 3 + 2 = 13$ salaires est $1\,488{,}11 < 1\,539{,}45 < 1\,593{,}38 \leqslant 1\,593{,}38 < 1\,864{,}37 \leqslant 1\,864{,}37 \leqslant 1\,864{,}37 < 1\,938{,}36 < 1\,948{,}37 < 1\,994{,}38 < 1\,998{,}93 < 2\,048{,}37 < 2\,192{,}48$.
   * Puisque $\frac{13}{2} = 6{,}5$ la médiane est la septième valeur de la série ordonnée.
   * Nous voyons, dans la série ordonnée, que la septième valeur est $1\,864{,}37$.

$$\boxed{Me = 1\,864{,}37 \text{ €}.}$$

3. Calculons le salaire moyen, $\overline{x}$, dans l'entreprise.

$$\overline{x} = \frac{1\,488{,}11 + 1\,539{,}45 + 2 \times 1\,593{,}38 + 3 \times 1\,864{,}37 + \cdots + 2\,192{,}48}{13}$$

$$\boxed{\overline{x} = 1\,840{,}64 \text{ €}.}$$

4. Déterminons le coût global, c_G, du salarié.

$$\begin{aligned} c_G &= \frac{1\,864{,}37}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &\approx 3\,465{,}816\,0 \text{ en tronquant.} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_G \approx 3\,465{,}82 \text{ €}.}$$

5. (a) Déterminons le salaire s' après augmentation.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 3 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{3}{100} \\ &= 1{,}03 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} s' &= 1\,488{,}11 \times CM \\ &= 1\,488{,}11 \times 1{,}03 \\ &= 1\,532{,}753\,3 \end{aligned}$$

$$\boxed{s' \approx 1\,532{,}75 \text{ €.}}$$

(b) Calculons le coût global, c', après augmentation.

$$\begin{aligned} c' &= \frac{s'}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= \frac{1\,532{,}753\,3}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &\approx 2\,849{,}349\,08 \end{aligned}$$

$$\boxed{c' \approx 2\,849{,}35 \text{ €.}}$$

(c) Calculons le taux d'évolution, t_c, du coût.

Notons c le coût global avant augmentation.

$$\begin{aligned} c' &= \frac{s'}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= \frac{CM \times s}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= CM \times \frac{s}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= CM \times c \end{aligned}$$

Donc le coût global a augment de 3 %.

Voici une autre rédaction plus élémentaire.

$$\begin{aligned} c &= \frac{s}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= \frac{1\,488{,}11}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &\approx 2766{,}36 \end{aligned}$$

D'où le taux d'évolution :

$$\begin{aligned} t_c &= \frac{c' - c}{c} \times 100 \\ &\approx \frac{2849{,}35 - 2766{,}36}{2766{,}36} \times 100 \\ &\approx 2{,}9999 \end{aligned}$$

Le coût global a augmenté de 3 %.

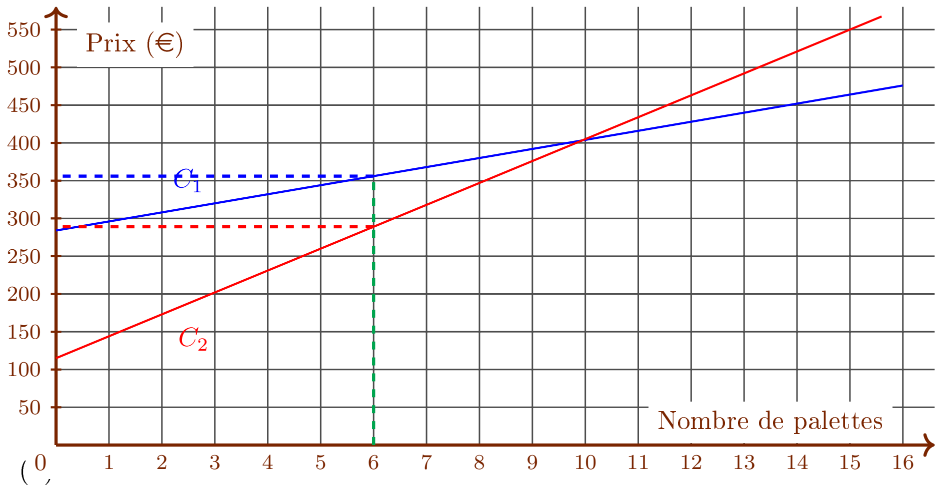
Partie D : transport et livraison.

1. (a) Identifions les fonctions.

Il s'agit de deux fonctions affines. Nous pourrions les identifier avec leur coefficient directeur ou leur ordonnée à l'origine. Nous allons utiliser l'ordonnée à l'origine.

$f(0) = 12 \times 0 + 284 = 284$ et $g(0) = 29 \times 0 + 115 = 115$ donc la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(0; 284)$ et la courbe représentative de g passe par le point de coordonnées $(0; 115)$.

C_1 est la courbe représentative de f et C_2 celle de g.



La société B est la plus économique pour 6 palettes.

(c) Pour une commande d'un maximum de 9 palettes la société B est la plus économique sinon c'est la A.

2. Résolvons l'équation $f(x) = g(x)$.

   Soit $x \in [0; +\infty[$.

$$f(x) = g(x)$$

   équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 12x + 284 &= 29x + 115 \\ 12x + 284 - 29x &= 29x + 115 - 29x \\ -17x + 284 &= 115 \\ -17x + 284 - 284 &= 115 - 284 \\ -17x &= -169 \\ \frac{-17x}{-17} &= \frac{-169}{-17} \\ x &= \frac{169}{17} \end{aligned}$$

   Ainsi

$$x \approx 9{,}941$$

Pour une commande d'un maximum de 9 palettes la société B est la plus économique sinon c'est la A.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Calculons $\mathbb{P}(3)$.

Les issues 1, 2, 3, 4 et 5 ont toutes la même probabilité d'être réalisée que nous noterons p.
Par définition d'une probabilité (sur un univers fini) la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1 donc :

$$5 \times p + \frac{1}{2} = 1$$

ce qui équivaut succcessivement à :

$$\begin{aligned} 5p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} &= 1 - \frac{1}{2} \\ 5p &= \frac{1}{2} \\ \frac{5p}{5} &= \frac{\frac{1}{2}}{5} \\ p &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \\ p &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(3) = 0{,}1.}$$

2. L'univers est ici $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
D'après la question précédente, la loi de probabilité sur cet univers peut être résume par le tableau :

ω	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\omega)$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5

Il n'y a pas équiprobabilité entre les issues dans cette modélisation. Nous ne pourrons donc pas utiliser les méthodes de dénombrement.

Notons A l'événement « obtenir un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$A = \{2; 4; 6\}$.
Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(6) \\ &= 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}5 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(A) = 0{,}7.$$

3. Notons B l'événement « obtenir un nombre strictement supérieur à 4.

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$B = \{5; 6\}$.
Donc

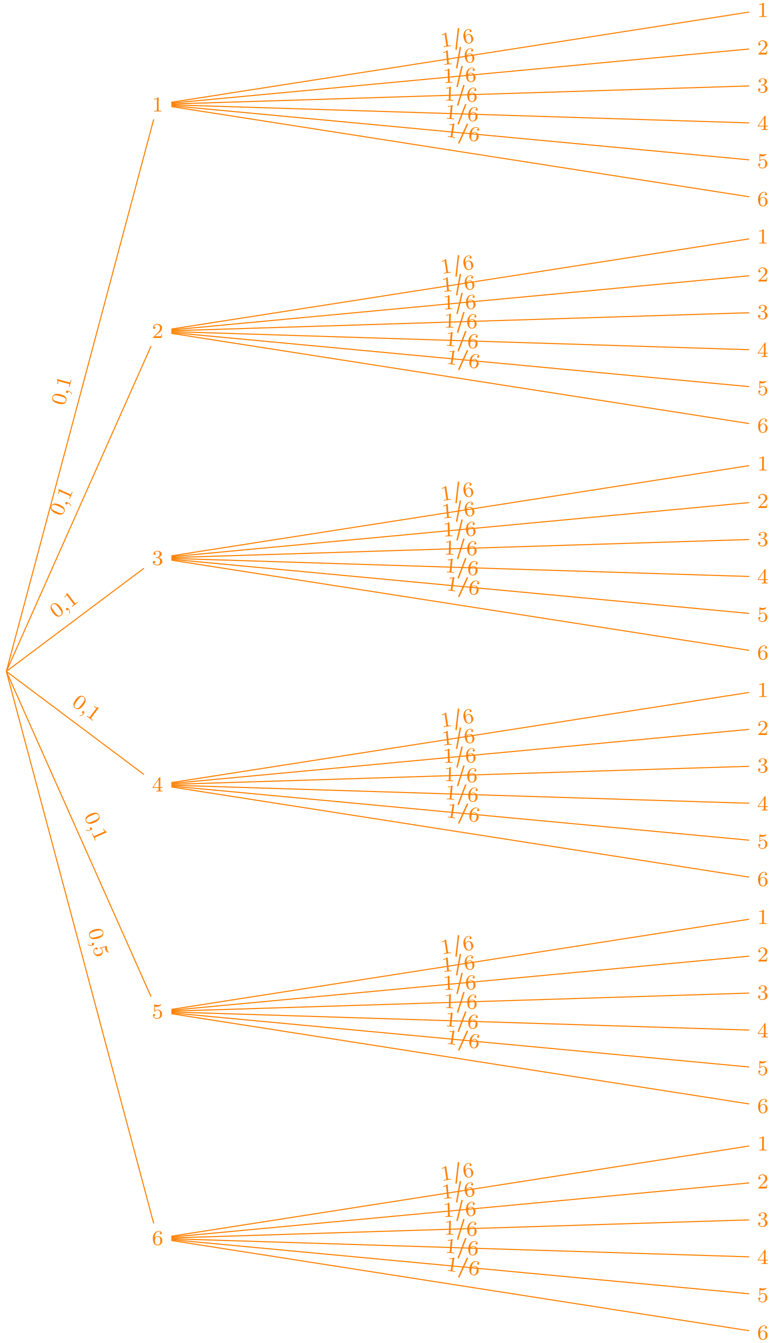
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(6)\\ &= 0{,}1 + 0{,}5\\ &= 0{,}6\end{aligned}$$

Avec un dé parfaitement équilibré (et donc avec la loi d'équiprobabilité $\mathbb{P}'$) B étant réalisé par 2 issues sur un total de 6 la probabilité de B serait :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}'(B) &= \frac{2}{6}\\ &= \frac{1}{3}\\ &= 0{,}333\ldots\end{aligned}$$

Pour obtenir un résultat strictement supérieur à 4 il a intérêt à utiliser son dé truqué.

4. (a) La façon la plus simple de raisonner est de dessiner un arbre pondéré mais l'arbre étant très grand je me suis contenté de faire les calculs. Par acquis de conscience voici à quoi ressemblerait l'arbre.



0,1
0,1
0,1
0,1
0,1
0,5
1
2
3
4
5
6
1/6
1
2
3
4
5
6

Avec un petit effort d'imagination l'arbre est inutile.

Les deux lancers sont indépendants (d'après le contexte) donc on peut considérer que les lancers sont successifs : on lance d'abord le dé truqué et ensuite le dé équilibré.
L'univers est donc formé de couples dont la première valeur est le résultat du lancer du dé truqué (avec la loi de probabilité $\mathbb{P}$ vue plus haut) et la seconde valeur est le résultat du lancer du dé équilibré (avec la loi de probabilité $\mathbb{P}'$ qui est l'équiprobabilité. Munissons cet ensemble de couples de la loi de probabilité $\mathbb{P}''$ induite par les lois $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$.

Calculons $\mathbb{P}''(6{,}6)$.

$\mathbb{P}(6) = 0{,}5 >$ donc, d'après la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}''(6{,}6) = \mathbb{P}'_6(6) \times \mathbb{P}(6)$$

Et puisque les lancers sont indépendants :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}''(6{,}6) &= \mathbb{P}'(6) \times \mathbb{P}(6)\\ &= 0{,}5 \times \frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir 12 est $\frac{1}{12}$.

(b) Reprenons la modélisation précédente.
Notons X la variable aléatoire qui a chaque couple associe la somme des valeurs.

Calculons $\mathbb{P}''(X = 10)$.

$\{X = 10\} = \{(6{,}4),(5{,}5),(4{,}6)\}$.
Donc :

$$\mathbb{P}''(X = 10) = \mathbb{P}''(6{,}4) + \mathbb{P}''(5{,}5) + \mathbb{P}''(4{,}6)$$

Puis en procédant comme à la question précédente :

$$\mathbb{P}''(X = 10) = 0{,}5 \times \frac{1}{6} + 0{,}1 \times \frac{1}{6} + 0{,}1 \times \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}''(X = 10) = \frac{7}{60}.$$

Exercice 2.

1. Puisque $EO = AC = 2AO$ il suffit de

   calculons AO.

   Puisque AOB est rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

   Comme de plus AOB est isocèle en O :

$$2AO^2 = AB^2$$

   nous en déduisons successivement à :

$$\begin{aligned} 2AO^2 &= 4^2 \\ \frac{2AO^2}{2} &= \frac{16}{2} \\ AO^2 &= 8 \end{aligned}$$

   Et puisque AO est une longueur donc un nombre positif :

$$\begin{aligned} AO &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$EO = 4\sqrt{2}$$

2. Calculons AE.

   Puisque AOE est rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$$AE^2 = AO^2 + OE^2$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} AE^2 &= \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 40 \end{aligned}$$

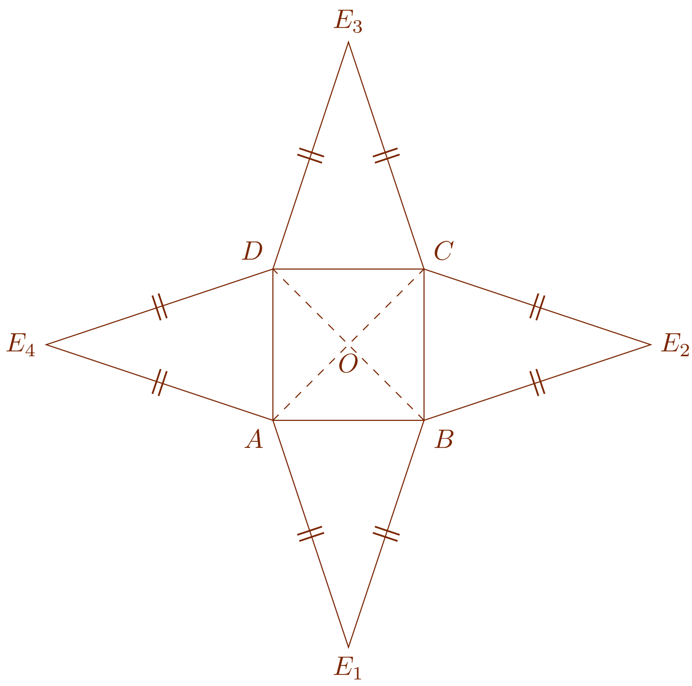
AE étant une longueur c'est un nombre positif :

$$AE = \sqrt{40}$$

$$\boxed{AE = 2\sqrt{10} \text{ cm.}}$$

$$\boxed{AE \approx 6{,}3 \text{ cm.}}$$

3. Ici à l'échelle 1/2.



Exercices 3.

1. (a) Considérons le tableau d'état des variables du programme.

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5
mettre ma variable à réponse	5	5
ajouter à ma variable -4	$5 + (-4) = 1$	5
mettre ma variable à 3 * ma variable	$3 \times 1 = 3$	5
ajouter à ma variable 3	$3 + 3 = 6$	5

Et comme le programme renvoie le contenu de ma variable :

si on entre 5 alors le programme A renvoie 6.

(b) Considérons le tableau d'état des variables du programme.

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5
mettre ma variable à 3 * réponse	$3 \times 5 = 15$	5
ajouter à ma variable -9	$15 - 9 = 6$	5

Et comme le programme renvoie le contenu de ma variable :

si on entre 5 alors le programme B renvoie 6.

(c) Considérons le tableau d'état des variables du programme A :

	ma variable	réponse
demander (Entrer un nombre) et attendre		5,2
mettre [ma variable] à (réponse)	5,2	5,2
ajouter à [ma variable] (-4)	$5{,}2 + (-4) = 1{,}2$	5,2
mettre [ma variable] à ((3) * (ma variable))	$3 \times 1{,}2 = 3{,}6$	5,2
ajouter à [ma variable] (3)	$3{,}6 + 3 = 6{,}6$	5,2

Puis celui du programme B :

	ma variable	réponse
demander (Entrer un nombre) et attendre		5,2
mettre [ma variable] à ((3) * (réponse))	$3 \times 5{,}2 = 15{,}6$	5,2
ajouter à [ma variable] (-9)	$15{,}6 - 9 = 6{,}6$	5,2

Finalement

si on entre 5,2 alors les deux programmes A et B renvoient 6,6.

(d) Les questions précédentes nous incitent à conjecturer :

il semble que les deux programmes renvoient le même résultat.

Cette conjecture est émise à partir de deux exemples seulement et des exemples qui n'ont peut être pas été choisis au hasard par les créateurs du sujet. Essayons une autre valeur comme 0. Nous voyons que les deux programmes renvoient 0. Le résultat semble général démontrons-le.

Démontrons que les deux programmes renvoient le même résultat.

Si le nombre choisi est x alors pour le programme A :

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		x
mettre ma variable à réponse	x	x
ajouter à ma variable -4	$x+(-4)=x-4$	x
mettre ma variable à 3 * ma variable	$3\times(x-4)$	x
ajouter à ma variable 3	$3(x-4)+3$	x

et pour le programme B :

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		x
mettre ma variable à 3 * réponse	$3\times x$	x
ajouter à ma variable -9	$3x-9$	x

Ainsi le programme A renvoie le nombre $A = 3(x-4)-9$ et le B renvoie le nombre $B = 3x-9$.

Démontrons que les nombres A et B sont égaux.

Pour montrer que ces deux expressions sont égales il faut les exprimer sous forme développée et réduite. Comme B est déjà développé partons de A.

$$\begin{aligned}
A &= 3(x-4)+3\\
&= 3\times x - 3\times 4 + 3\\
&= 3x-12+3\\
&= 3x-9
\end{aligned}$$

Ainsi $A = B$.

> Nous avons démontré que les programme renvient le même résultat.

2. Déterminons la valeur x a choisir pour que le programme B (par exemple) renvoie 14.

Nous souhaitons donc que x, le nombre de départ, vérifie :

$$3x - 9 = 14$$

C'est une équation linéaire il faut donc la résoudre en isolant l'inconnue x.
Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 3x - 9 + 9 &= 14 + 9 \\ 3x &= 23 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{23}{3} \\ x &= \frac{23}{3} \end{aligned}$$

> Il faut entrer $\frac{23}{3}$ pour que le programme renvoie 14.

3. Pour démontrer un résultat général sur le résultat du programme il faut utiliser une expression générale du résultat du programme : $3x - 9$.
Le résultat sera divisible s'il peut s'écrire $3\times?$ (? désignant un nombre entier).
Il faut donc que nous trouvions $3x - 9 = 3\times?$.

Démontrons que le résultat est divisible par trois.

Soit x un entier.
Nous allons factoriser en utilisant la distributivité.

$$\begin{aligned} 3x - 9 &= 3\times x - 3\times 3 \\ &= 3\times(x - 3) \end{aligned}$$

x étant un entier $x - 3$ est aussi un entier et nous pouvons conclure :

> Si le nombre entré dans le programme est un entier le résultat est un multiple de 3.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.

Situation 2.

1.
2.
3.

Situation 3.

1.
2.
3.
4.

Situation 4.

1.
2.
3.
4.

Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 2.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Partie A.

1. Calculons l'aire $\mathscr{A}_{terrain}$ du terrain.

   Puisque le terrain est rectangulaire :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{terrain} &= 100 \text{ m} \times 68 \text{ m}\\ &= 100 \times 68 \text{ m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_{terrain} = 6\,800 \text{ m}^2.}$$

2. Déterminons la longueur de la diagonale du terrain.

   Notons $ABCD$ le rectangle formé par le terrain.
   Le triangle ABD est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore, nous avons
   $$AB^2 + AD^2 = BD^2.$$
   Nous en déduisons successivement
   $$\begin{aligned} BD^2 &= 100^2 + 68^2 \\ &= 14624 \end{aligned}$$
   BD étant une longueur c'est un nombre positif donc :
   $$BD = \sqrt{14624}$$
   Donc
   $$\boxed{\begin{gathered} BD = 4\sqrt{914} \text{ m} \\ BD \approx 121 \text{ m.} \end{gathered}}$$

3. Déterminons la vitesse moyenne v.

   $$\begin{aligned} v &\approx \frac{121 \text{ m}}{18 \text{ s}} \\ &\approx \frac{121}{18} \text{ m/s} \\ &\approx 6{,}722 \text{ m/s} \end{aligned}$$
   $$\boxed{v \approx 6{,}72 \text{ m/s.}}$$

4. Convertissons la vitesse en km/h.

$$\begin{aligned}
v &\approx 6{,}72\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\\
&\approx 6{,}72\ \frac{\frac{1}{1000}\ \text{km}}{\frac{1}{3600}\ \text{h}}\\
&\approx 6{,}72 \times \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{3600}}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\\
&\approx 6{,}72 \times \frac{3600}{1000}\ \text{km/h}\\
&\approx 24{,}192\ \text{km/h}
\end{aligned}$$

Elle ne court pas à plus de 30 km/h.

5. Déterminons le temps $t_{Thompson}$ que mettrait la championne pour parcourir la diagonale.

Puisque la diagonale mesure 121 m et que la vitesse de la championne est $\frac{100\ \text{m}}{10{,}93\ \text{s}}$ nous en déduisons

$$\begin{aligned}
t_{Thompson} &= \frac{121\ \text{m}}{\frac{100\ \text{m}}{10{,}93\ \text{s}}}\\
&= \frac{\frac{121\ \text{m}}{1}}{\frac{100\ \text{m}}{10{,}93\ \text{s}}}\\
&= \frac{121\ \text{m}}{1} \times \frac{10{,}93\ \text{s}}{100\ \text{m}}\\
&= \frac{121\ \text{m} \times 10{,}93\ \text{s}}{1 \times 100\ \text{m}}\\
&= \frac{121 \times 10{,}93}{100}\ \text{s}\\
&= 13{,}2253
\end{aligned}$$

La diagonale aurait parcourue en 13,2 s.

Partie B.

Calculons PH.

- Configuration de Thalès. S, T et P d'une part, S, A et H d'autre part sont alignés dans le même ordre.
- Hypothèse pour la forme directe du théorème. Puisque $(PH) \perp (PS)$ et $(TA) \perp (PS)$ nous en déduisons $(PH) \parallel (TA)$.

Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{AT}{HP} = \frac{TS}{PS}.$$

Nous en déduisons successivement (toutes les longueurs étant exprimées en mètres) :

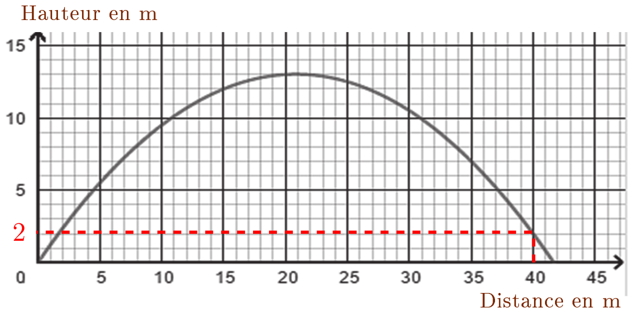
$$\begin{aligned}
\frac{1{,}74}{HP} &= \frac{2{,}78}{PT + TS} \\
\frac{1{,}74}{HP} &= \frac{2{,}78}{9{,}51 + 2{,}78} \\
\frac{1{,}74}{HP} \times HP &= \frac{2{,}78}{9{,}51 + 2{,}78} \times HP \\
1{,}74 &= \frac{2{,}78}{9{,}51 + 2{,}78} \times HP \\
\frac{12{,}29}{2{,}78} \times 1{,}74 &= \frac{12{,}29}{2{,}78} \times \frac{2{,}78}{12{,}29} \times HP \\
\frac{12{,}29}{2{,}78} \times 1{,}74 &= HP
\end{aligned}$$

$$\boxed{HP \approx 7{,}7 \text{ m.}}$$

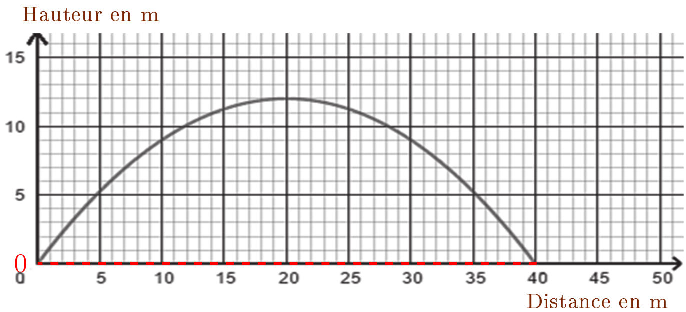
Partie C.

1. Pour que le ballon passe au-dessus de la barre transversale il faut qu'il soit à plus de 3 m de haut lorsqu'il a parcouru 40 m au sol.

Coup de pied A.

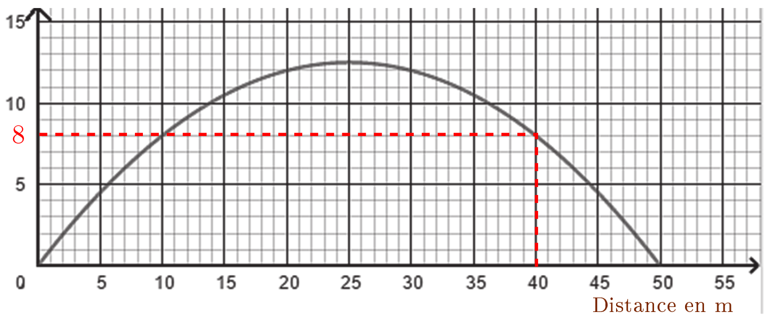


Coup de pied B.

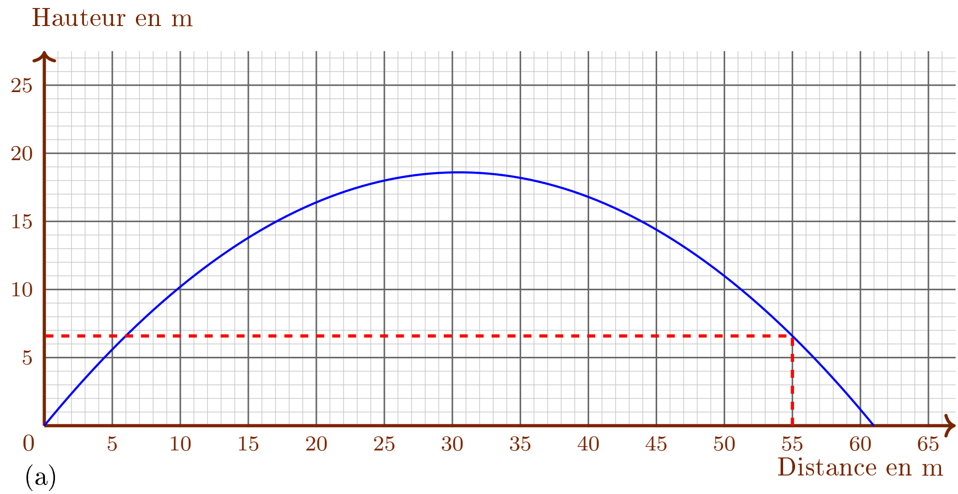


Coup de pied C.

Hauteur en m



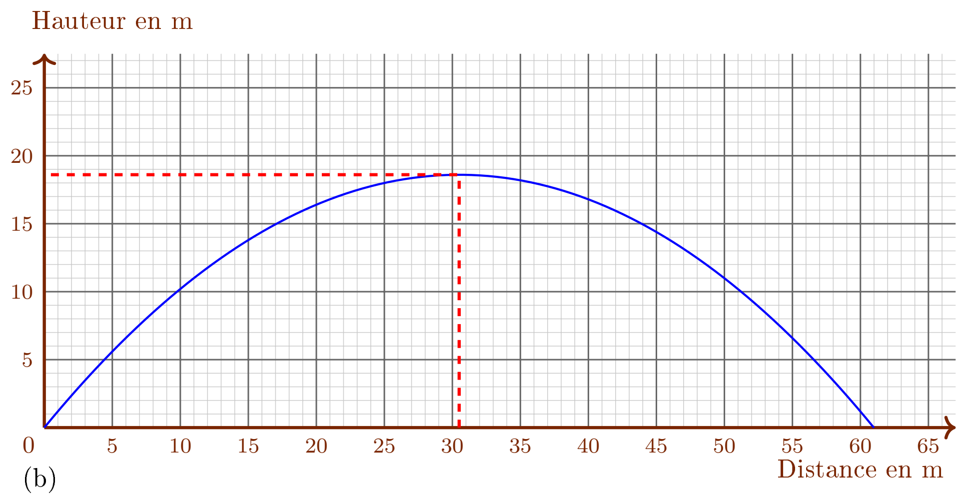
Seul le coup de pied C permet de faire passer le ballon au-dessus de la barre transversale.



2. (a)

Le ballon franchit la ligne de la barre transversale à plus de 6 m donc très au-delà des 3 m de hauteur de la barre transversale.

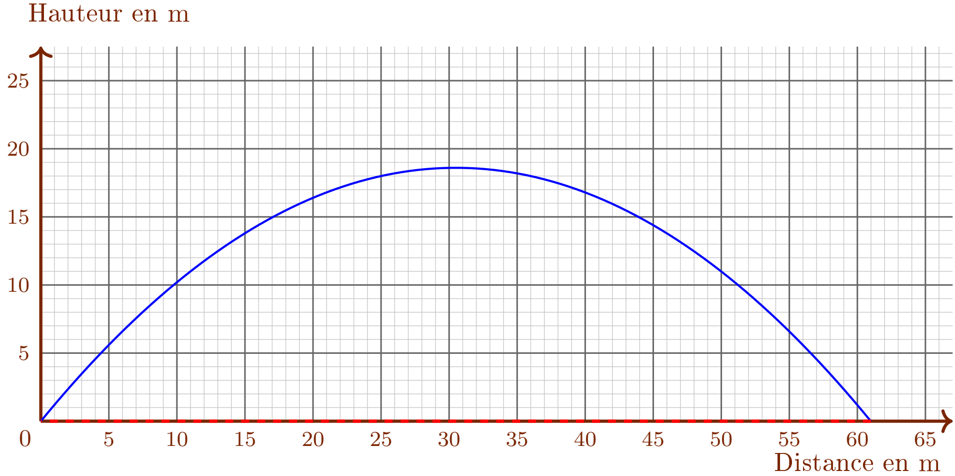
Il a réussi à faire passer le ballon au-dessus de la barre transversale.



(b)

Le ballon a atteint une hauteur maximale de 18,5 m.

(c) Dire que le ballon retombera au sol c'est dire que sa hauteur sera de 0 m.



Le ballon est retombé à 61 m du lanceur or la ligne de but est à 55 m du lanceur donc

le ballon est retombé 6 m derrière la ligne de but.

3. (a) La formule de calcul entrée en `B2` est :

$= -0{,}02 * \texttt{B1} \wedge 2 + 1{,}22 * \texttt{B1}.$

(b) Déterminons le contenu de `F2`.

$$\begin{aligned} f(25) &= -0{,}02 \times 25^2 + 1{,}22 \times 25 \\ &= 18 \end{aligned}$$

La valeur affichée en `F2` devrait être 18.

(c) La cellule `H2` permet de confirmer que le ballon passe au-dessus de la barre transversale.

4. Le ballon retombera lorsque sa hauteur sera de 0 m. Autrement dit lorsque $f(x) = 0$.

   Résolvons (E) : $-0{,}02x^2 + 1{,}22 = 0$.

   Il s'agit de résoudre une équation qui n'est pas linéaire. A priori la première chose à tenter est de se ramener à une équation produit-nul et donc éventuellement factoriser.

$$\begin{aligned}(E) &\iff -0{,}02x^2 + 1{,}2xx = 0\\ &\iff -0{,}02x\times x + 1{,}22x = 0\\ &\iff (-0{,}02x + 1{,}22)\times x\\ &\iff -0{,}02x + 1{,}22 = 0 \text{ ou } x = 0\\ &\iff -0{,}02x + 1{,}22-1{,}22 = 0-1{,}22 \text{ ou } x = 0\\ &\iff -0{,}02x = -1{,}22 \text{ ou } x = 0\\ &\iff \frac{-0{,}02x}{-0{,}02} = \frac{-1{,}22}{-0{,}02} \text{ ou } x = 0\\ &\iff x = 61 \text{ ou } x = 0\end{aligned}$$

   Le cas $x = 0$ correspond au point de départ du ballon donc la seule solution qui convienne est $x = 61$. Donc

le ballon retombera 6 m derrière la ligne de but.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Déterminons la hauteur h_1 du parallélépipède rectangle.

   D'une part :

$$\begin{aligned}V_1 &= V_T - V_2\\ &= 12{,}26 \text{ m}^3 - 2 \text{ m}^3\\ &= 10{,}26 \text{ m}^3 \ (1)\end{aligned}$$

   et d'autre part, en utilisant la formule du volume d'un pavé droit :

$$\begin{aligned} V_1 &= h_1 \times \ell \times L \\ &= h_1 \times 1{,}5 \text{ m} \times 1{,}8 \\ &= h_1 \times 2{,}7 \text{ m}^2 \text{ (2)} \end{aligned}$$

De (1) et (2) nous déduisons par transitivité :

$$10{,}26 \text{ m}^3 = h_1 \times 2{,}7 \text{ m}^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{10{,}26 \text{ m}^3}{2{,}7 \text{ m}^2} &= \frac{h_1 \times 2{,}7 \text{ m}^2}{2{,}7 \text{ m}^2} \\ \frac{10{,}26}{2{,}7} \text{ m} &= h_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{h_1 = 3{,}8 \text{ m.}}$$

2. Déterminons la hauteur h_T du silo.

   Puisque la hauteur de la pyramide est 1,2 m la hauteur du silo est

$$\begin{aligned} h_T &= 1{,}2 \text{ m} + h_1 \\ &= 1{,}2 \text{ m} + 3{,}8 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\boxed{h_1 = 5 \text{ m.}}$$

3. Notons r le rayon d'un cylindre de hauteur 5 m et de volume 12,26 m^3.

   Déterminons r.

   Nous avons donc

$$12{,}26 \text{ m}^3 = \pi \times r^2 \times 5 \text{ m}^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{12{,}26\ \text{m}^3}{\pi \times 5\ \text{m}} = \frac{\pi \times r^2 \times 5\ \text{m}}{\pi \times 5\ \text{m}}$$
$$\frac{12{,}26}{\pi \times 5}\ \text{m}^2 = r^2$$

Puisque r représente une longueur c'est un nombre positif :

$$\sqrt{\frac{12{,}26}{5\pi}}\ \text{m} = r$$

Ainsi en tronquant :

$$r \approx 0{,}883456\ \text{m}$$

Le diamètre du silo cylindrique serait de 1,8 m.

Exercice 2.

1. D'après le graphique $4 + 3 + 1 = 8$ personne travaillent à Toulouse.
   Puisqu'il y a 19 employés à Toulouse cela représente une proportion, exprimée en pourcentage, de
   $$\frac{8}{19} \times 100 \approx 42{,}11.$$

   L'affirmation du chef est vraie.

2. (a) L'étendue est définie par : $e = max - min$.
   Donc ici :

   $$1890 = max - 1410$$

   ce qui équivaut successivement à :

   $$1890 + 1410 = max - 1410 + 1410$$
   $$3300 = max$$

Le salaire maximal dans l'entreprise est de 3 000 €.

(b) Déterminons le salaire x correspondant à l'avant dernière barre du graphique.

Le salaire moyen à Toulouse est :

$$1935 = \frac{2 \times 1410 + 4 \times 1590 + +3 \times 1760 + 2 \times 1920 + 4 \times 2100 + 3 \times x + 1 \times 3300}{2 + 4 + 4 + 3 + 1}.$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
1935 &= \frac{3x + 300000}{19} \\
1935 \times 19 &= \frac{3x + 30000}{19} \times 19 \\
36765 &= 3x + 30000 \\
36765 - 30000 &= 3x + 30000 - 30000 \\
6765 &= 3x \\
\frac{6765}{3} &= \frac{3x}{3} \\
2255 &= x
\end{aligned}$$

Le salaire recherché est de 2255 €.

3. Déterminons le salaire médian à Toulouse.

* Les salaires dans le diagramme en barres sont déjà dans l'ordre croissant.
* Il y a 19 employés et $\frac{19}{2} = 9{,}5$ donc le salaire médian est le dixième salaire.
* Or, en cumulant les effectifs, $2 + 4 + 3 = 9$ et $2 + 4 + 3 + 2 = 11$ donc $Me = 1920$.

le salaire médian à Toulouse est de 1920 €.

4. Déterminons le salaire moyen $\overline{x}$ dans l'entreprise.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{19 \times 1935 + 12 \times 1520}{19 + 12} \\ &\approx 1774{,}354 \text{ en tronquant.}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le salaire moyen est de } 1\,774 \text{ €.}}$$

5. (a) Déterminons le salaire minimal m' après augmentation.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 10 % est : $CM = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$.
   Donc

$$m' = 1{,}1 \times 1410$$

$$\boxed{m' = 1551.}$$

   (b) Déterminons le coefficient multiplicateur, CM_1, qu'il faut appliquer aux salaires de Montauban pour que les salaires moyens soient les mêmes sur les deux sites.

$$\begin{aligned}CM_1 &= \frac{V_A}{V_D} \\ &= \frac{1935}{1520} \\ &\approx 1{,}27302 \text{ en tronquant.}\end{aligned}$$

   Par linéarité de la moyenne (autrement dit l'augmentation appliquée à chaque salaire se traduit par la même augmentation appliquée à la moyenne des salaires) il faut que le salaire soit multiplié par 1,2730.
   Le taux d'évolution correspondant à ce coefficient multiplicateur est

$$\begin{aligned}t_1 &\approx 100 \times (CM_1 - 1) \\ &= 100 \times (1{,}2730 - 1) \\ &\approx 27{,}30\end{aligned}$$

il aurait fallut une augmentation de 27,3 %.

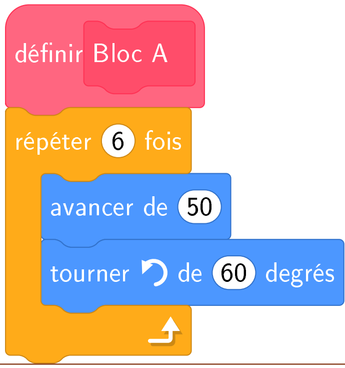
Exercice 3.

1. Le nombre de répétition correspond au nombre de côtés du polygone.

Le bloc A trace le dessin 2.
Le bloc B trace le dessin 1.
Le bloc C trace le dessin 3.

2. Il faudra 6 segments et comme on peut le remarquer sur les précédents l'angle est 360° divisé par le nombre de côtés.

Bloc A modifié



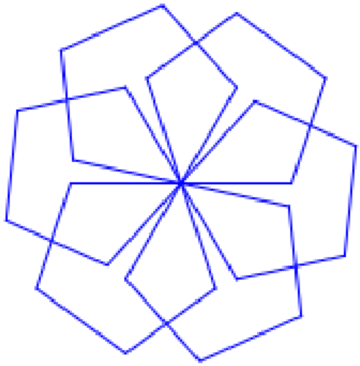
3. Cliquez sur le programme ci-dessus pour le télécharger.

   (a) Lors du tracé du pentagone avec le Bloc A, le lutin part du point de coordonnées $(0;0)$ puis y retourne. Ainsi tous les pentagones commencent à partir de l'origine. Comme chaque tracé est suivi d'une rotation de 60° nous pouvons conclure :

   On passe d'un motif au suivant par une rotation de centre le point de coordonnées $(0;0)$ et d'angle 60°.

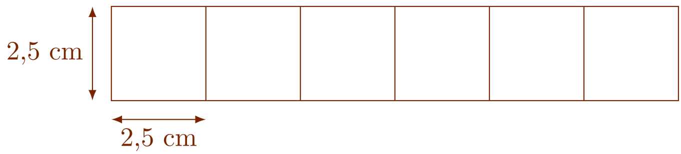
   (b) $6 \times 60 = 360$ donc à la fin du dessin du sixième motif on revient en position de départ.

Cette figure est composée de 6 motifs.

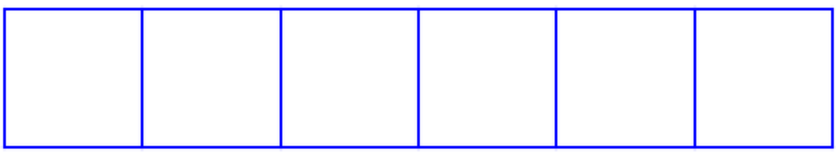


4. Cliquez sur le programme ci-dessus pour le télécharger.

   Voici la figure obtenue (ici dessinée encore à la moitié de ce qui était demandée, mais les longueurs indiquées sont celles attendues).



   Avec le logiciel on obtient :



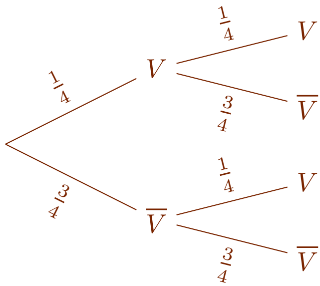
Exercice 4.

1. Les différents lancers sont indépendants les uns des autres. Le résultat du quatrième lancer ne dépend pas des résultats des ris précédents.

Ainsi il s'agit d'un lancer de pile ou face avec une pièce équilibrée et la probabilité d'obtenir face est donc $\frac{1}{2}$.

L'affirmation 1 est vraie.

2. Les deux tirages sont indépendants l'un de l'autre si bien que nous pouvons considérer les tirages comme successifs.
Schématisons la situation par un arbre pondéré probabiliste.



D'après le principe multiplicatif (ou la formule des probabilités composées) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(VV) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16}\end{aligned}$$

L'affirmation 2 est fausse.

3. Schématisons le lancer avec un tableau double entrée que nous remplirons des sommes des chiffres affichés par les deux dés.
Pour Arthur :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ω est l'ensemble des couples de chiffres obtenus (en distinguant toutes les faces par un coloriage par exemple).
Les dés étant équilibrés il est raisonnable de faire l'hypothèse que chaque couple de faces représenté par une case du tableau à la même probabilité qu'un autre couple. Il y a équiprobabilité entre les couples. L'univers comporte 36 issues.

Notons A_2 (resp. A_3) l'événement « obtenir 2 » (resp. « obtenir 3 »).

Calculons $\mathbb{P}(A_2)$ (resp. $\mathbb{P}(A_3)$).

I y a équiprobabilité entre les couples. A_2 (resp. A_3) est réalisé par 1 (resp. 2) issues. L'univers comporte 36 issues. Nous en déduisons :

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{36} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_3) = \frac{2}{36}.$$

Donc : $\mathbb{P}(A_2) < \mathbb{P}(A_3)$.

L'affirmation 3 est fausse.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.

Situation 2.

1.
2.
3.
4.
5. (a)
   (b)

Situation 3.

1. (a)
   (b)

(c)

(d)

2. (a)

   (b)

   (c)

3.

Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 3.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Mme Bobinec, M. Chandelier, Céline, Mme Monjole, Mme Duplessy pour la relecture et les corrections apportées.

I Première partie (13 points).

Partie A : choix du château d'eau.

1. Déterminons les proportions de voix.

   Notons p_A la proportion de voix recueillies par le modèle A.
   Pour une proportion l'idée est de faire $\frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$.
   En notant E l'ensemble des habitants du hameau et A l'ensemble de ceux qui ont choisi le modèle A nous avons :

$$p_A = \frac{|A|}{|E|}$$

   en notant $|A|$ le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre de personne ayant fait le choix du modèle A.

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{12}{12+60+18} \\ &= \frac{2}{15} \\ &= 0{,}1333\ldots \\ &\approx 13~\% \end{aligned}$$

   En procédant de même pour les deux autres modèles :

Types de château d'eau	Modèle A	Modèle B	Modèle C
Proportion	13 %	67 %	20 %

2. (a) Calculons la consommation moyenne $\overline{x}$.

La moyenne peut être obtenue par diverses formules. Ici il s'agit simplement de partager équitablement la consommation totale entre chaque foyer.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{10\,500 \text{ m}^3}{12+60+18}\\ &= \frac{350}{3} \text{ m}^3\\ &= 116{,}666\ldots \text{ m}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} \approx 116{,}67 \text{ m}^3.}$$

(b) Calculons la consommation annuelle estimée du hameau C_{ae}.

Chacun des 17 nouveaux foyers consommera 116,67 m^3. La consommation de ces 17 nouveaux foyers sera de

$$17 \times 116{,}67 \text{ m}^3 = 1983{,}39 \text{ m}^3$$

Donc en prenant en compte tout le hameau :

$$\begin{aligned}C_{ae} &= 10\,500 \text{ m}^3 + 1983{,}39 \text{ m}^3\\ &= 12\,483{,}39 \text{ m}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{C_{ae} \approx 12\,483 \text{ m}^3.}$$

3. (a) Déterminons la consommation moyenne en 5 jours C_5.

On fait implicitement l'hypothèse que la consommation quotidienne est toujours la même ce qui nous permet de répondre à la question par proportionnalité. De plus nous ferons l'hypothèse simplificatrice d'une année à 365 jours plutôt qu'à 365,25 jours.

Par proportionnalité :

Jours	365	5
Consommation (m^3)	12 483,39	171,01

$$C_5 \approx 171{,}01 \text{ m}^3.$$

(b) Calculons le volume V_s de la sphère.

D'après la formule de l'énoncé :

$$\begin{aligned} V_S &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{7 \text{ m}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{7}{2}\right)^3 \text{ m}^3 \\ &\approx 179{,}59 \end{aligned}$$

$$V_S \approx 180 \text{ m}^3.$$

(c) $V_S > 171{,}01 \text{ m}^3$ donc

ce réservoir répond aux souhaits du maire.

4. Déterminons le temps de remplissage t_r.

Nous pouvons raisonner par proportionnalité :

Volume (m^3)	40	$\frac{3}{4} \times 180 = 135$
Temps (h)	1	3,375

Ainsi

$$\begin{aligned} t_r &= 3{,}375 \text{ h} \\ &= 3 \text{ h} + 0{,}375 \text{ h} \\ &= 3 \text{ h} + 0{,}375 \times 60 \text{ min} \\ &= 3 \text{ m} + 22{,}5 \text{ min} \\ &= 3 \text{ h} + 22 \text{ min} + 0{,}5 \text{ min} \end{aligned}$$

$$t_r = 3 \text{ h} + 22 \text{ min} + 30 \text{ s}.$$

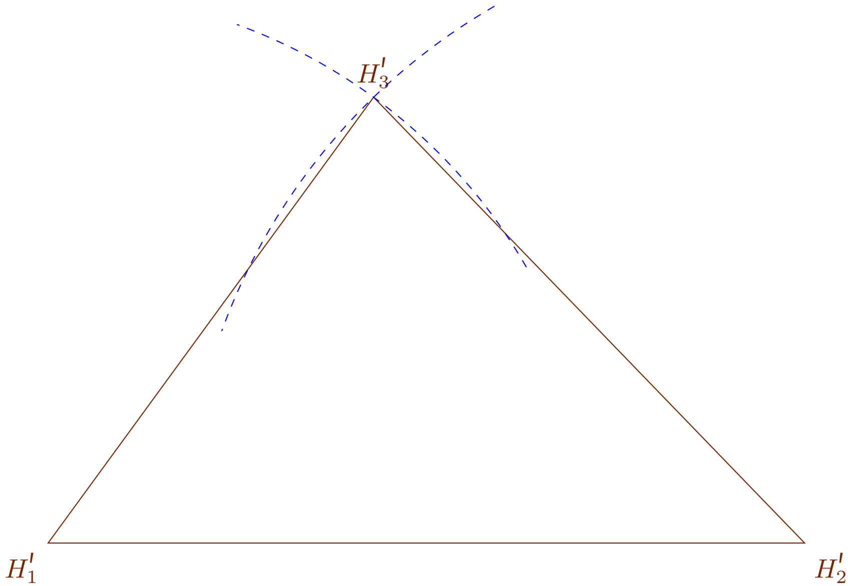
Partie B : nuisances et impact paysager.

1. (a) En notant H_1', H_2' et H_3' les points correspondant respectivement H_1, H_2 et H_3 après la mise à l'échelle nous avons, par exemple :

$$\begin{aligned} H_1'H_2' &= \frac{1}{10\,000} \times 1 \text{ km} \\ &= \frac{1}{10\,000} \times 1 \times 100\,000 \text{ cm} \\ &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

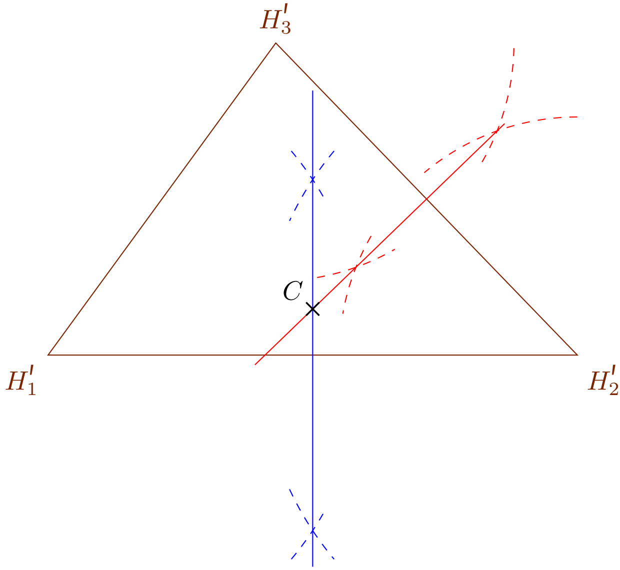
De même ou en raisonnant par proportionnalité

Réel (km)	1	0,820	0,730
À l'échelle (cm)	10	8,2	7,3

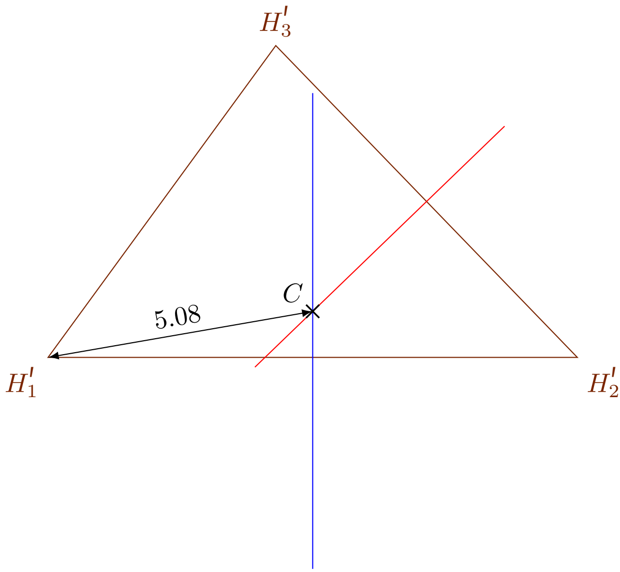


(b) Si le point C est équidistant des points H_1, H_2 et H_3 alors cela signifie qu'il est le centre du cercle circonscrit au triangle $H_1H_2H_3$. Autrement dit C est le point d'intersection des médiatrices du triangle.

La figure suivante est une réduction à l'échelle 7/10 de la figure demandée.



(c) *La figure suivante est une réduction à l'échelle 7/10 de la figure demandée.*



Donc par proportionnalité

Réel (km)	1	0,508
À l'échelle (cm)	10	5,08

Entre le château d'eau et les habitations la distance est approximativement de 510 m.

2. Calculons JN.

* Les points I, N, M d'une part et I, J, B d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* (JN) et (MB) sont des verticales donc $(JN) \parallel (MB)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{JN}{BM} = \frac{IN}{IM}.$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{JN}{BM} \times BM &= \frac{IN}{IM} \times BM \\
JN &= \frac{20 \text{ m}}{510 \text{ m}} \times (KB - KM) \\
JN &= \frac{20}{510} \times (45 \text{ m} - 1{,}80 \text{ m}) \\
JN &= \frac{20}{510} \times 43{,}2 \text{ m} \\
&= \frac{144}{85} \text{ m}
\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
HJ &= HN + NJ \\
&= 1{,}80 \text{ m} + \frac{144}{85} \text{ m} \\
&\approx 3{,}49411 \text{ m par troncature.}
\end{aligned}$$

$HJ \approx 3{,}49$ cm.

Partie C : entretien du château d'eau.

1. Déterminons la quantité Q_c de chlore nécessaire.

$$\begin{aligned} Q_c &= \left(180\ \mathrm{m}^3\right) \times \left(0{,}1\ \mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}\right) \\ &= (180\ \times 1000\ \mathrm{L}) \times \left(0{,}1\ \mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}\right) \\ &= 180 \times 1000 \times 0{,}1\ \mathrm{L} \cdot \mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1} \\ &= 18000\ \mathrm{mg} \end{aligned}$$

$$\boxed{Q_c = 18\ \mathrm{g}.}$$

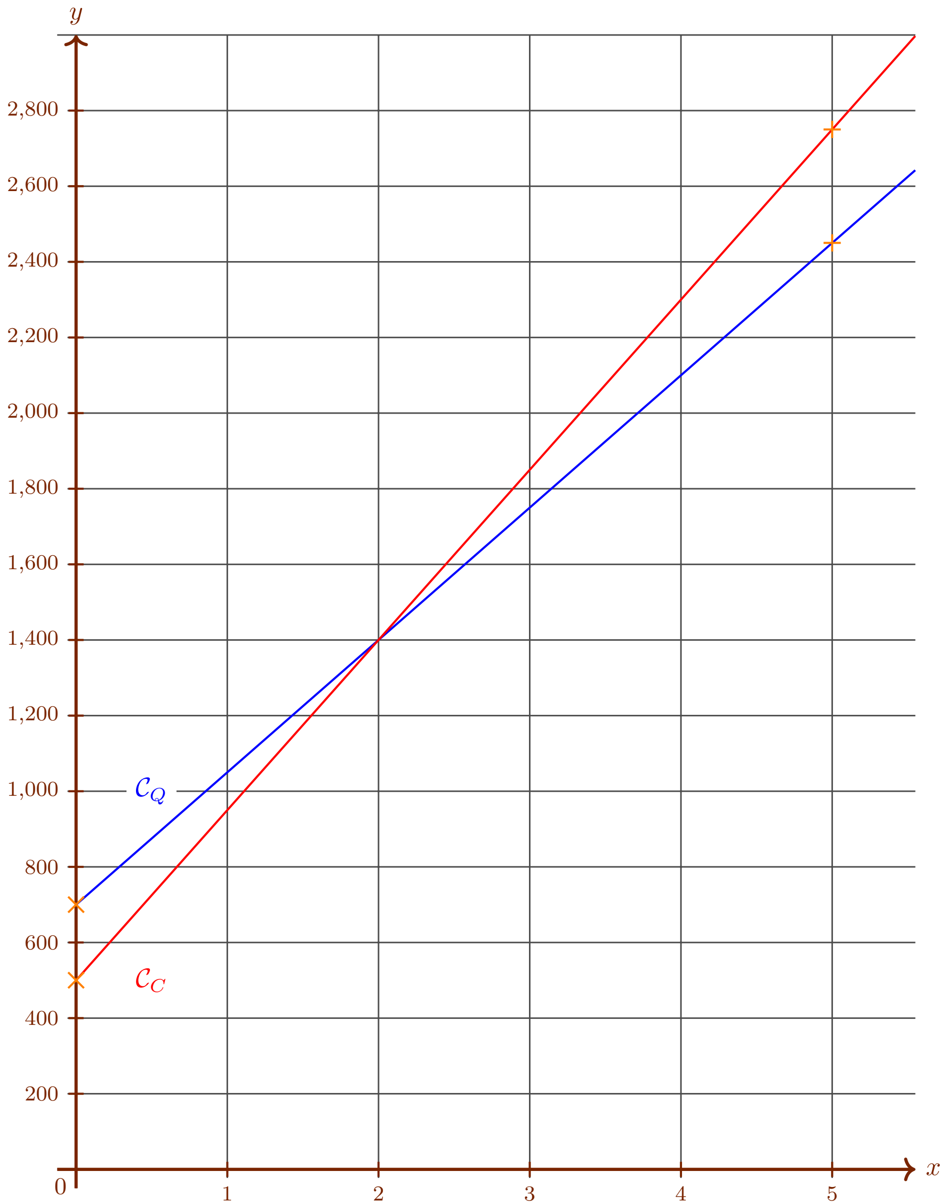
2. (a) Pour une année il faudra payer l'abonnement de 700 € auquel il faudra ajouter 350 € pour chaque intervention. Donc pour x interventions :

$$\boxed{Q(x) = 350 \times x + 700.}$$

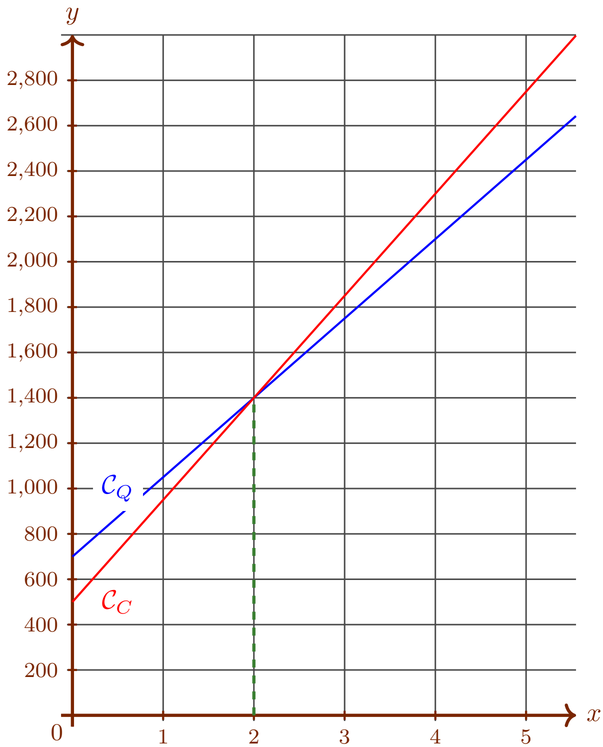
(b) En procédant comme à la question précédente

$$\boxed{C(x) = 450x + 500.}$$

(c) La représentation graphique d'une fonction f est formée de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$.
Les fonctions que nous devons représenter sont des fonctions affines donc leurs courbe représentatives sont des droites. Il nous suffit de trouver les coordonnées de deux points distincts pour chacune d'entre elles.
$Q(0) = 700$ et $Q(5) = 2450$. $C(0) = 500$ et $C(5) = 2750$.


y
2,800
2,600
2,400
2,200
2,000
1,800
1,600
1,400
1,200
1,000
800
600
400
200
0
1
2
3
4
5
x
$\mathcal{C}_Q$
$\mathcal{C}_C$

(d)



Résolvons $C(x) = Q(x)$ dans l'ensemble des nombres réels positifs.

$$\begin{aligned}
C(x) = Q(x) &\iff 450x + 500 = 350x + 700 \\
&\iff 450x + 500 - 500 = 350x + 700 - 500 \\
&\iff 450x = 350x + 200 \\
&\iff 450 - 350x = 350x + 200 - 350x \\
&\iff 100x \qquad = 200 \\
&\iff \frac{100x}{100} = \frac{200}{100} \\
&\iff x = 2
\end{aligned}$$

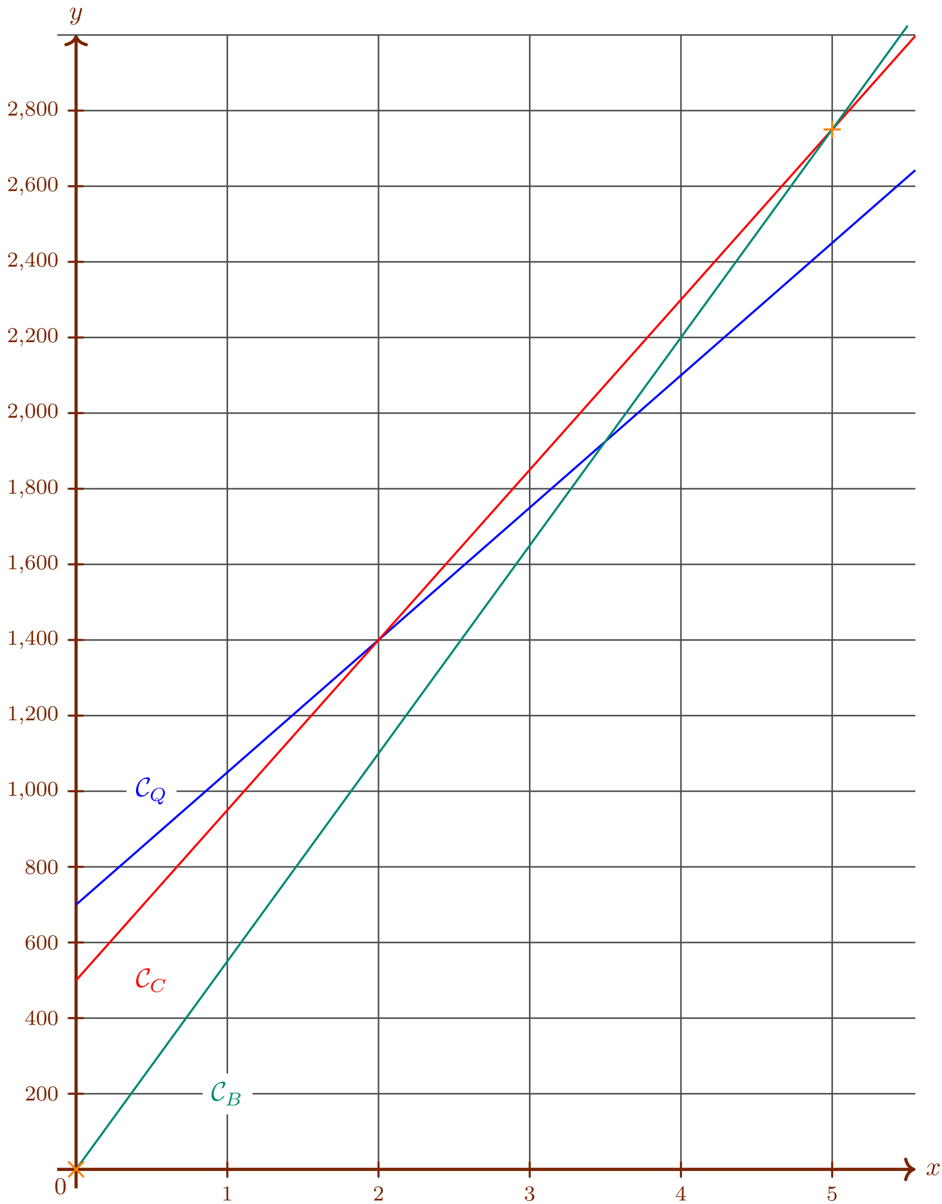
La facture sera la même pour deux interventions annuelles.

(e) Par lecture graphique, pour plus de deux interventions annuelles, la courbe représentative de Q est en dessous de celle de C donc

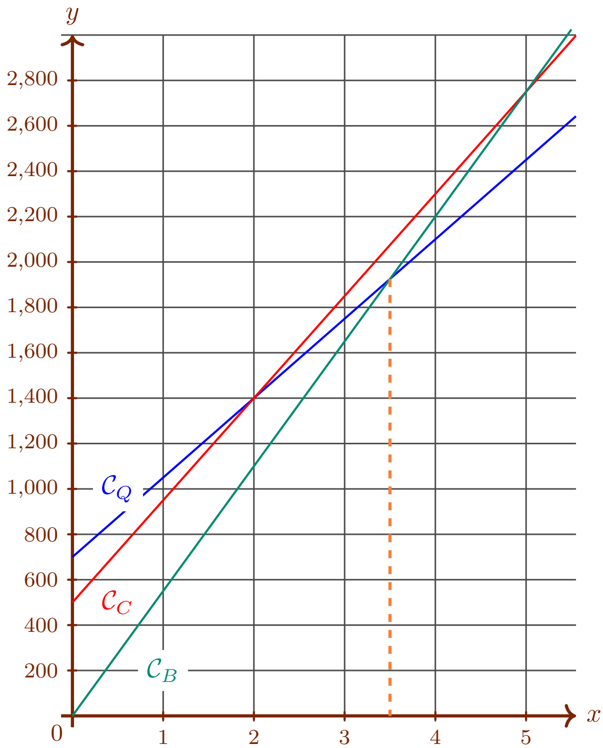
pour plus de deux interventions l'entreprise *Qualiteau* est plus avantageuse.

3. (a) $B(x) = 550x$.

(b) La fonction B est une fonction affine donc sa courbe représentative est une droite. De plus $B(0) = 0$ et $B(5) = 2750$.



(c) Tant que la courbe représentative de B reste en dessous de celles de C et Q cela signifie que les valeurs prisent par B sont inférieures à celles de C et Q.



Donc d'après la représentation graphique il faut moins de 3,5 interventions.

Bellacqua pourra être choisie pour un maximum de trois interventions.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Notons $C0$ le nombre choisi et dressons le tableau d'état des variables correspondant à cet algorithme.

Instructions	C_0	C_1	C_2	$C_1 - C_2$
Choisir un entier positif	5			
Calcul du carré de l'entier qui suit C_0	5	$6^2 = 36$		
Calcul du carré de l'entier qui précède C_0	5	36	$4^2 = 16$	
Calcul de $C_1 - C_2$	5	36	16	$36 - 16 = 2.$

En entrant 5 le programme de calcul renvoie 20.

2. Notons $C0$ le nombre choisi et dressons le tableau d'état des variables correspondant à cet algorithme.

Instructions	C_0	C_1	C_2	$C_1 - C_2$
Choisir un entier positif	x			
Calcul du carré de l'entier qui suit C_0	x	$(x+1)^2$		
Calcul du carré de l'entier qui précède C_0	x	$(x+1)^2$	$(x-1)^2$	
Calcul de $C_1 - C_2$	x	$(x+1)^2$	$(x-1)^2$	$(x+1)^2 - (x-1)^2$.

Or, grâce à une identité remarquable nous aurions pu faire le choix de tout développer, là encore, avec des identités remarquables, mais la factorisation semble moins longue) :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x-1)^1 &= [(x+1)-(x-1)] \times [(x+1)+(x-1)]\\ &= [x+1-x+1] \times [x+1+x-1]\\ &= 2 \times 2x\end{aligned}$$

donc

en entrant x le programme de calcul renvoie $4x$.

3. Résolvons $4x = 842$ dans $\mathbb{N}$.

Procédons à un raisonnement par analyse-synthèse.
Nous recherchons un nombre x tel que

$$4x = 842$$

Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{4x}{4} &= \frac{842}{4}\\ x &= \frac{421}{2}\end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'un nombre possible c'est $\frac{421}{2}$, mais, 421 n'étant pas pair, $\frac{421}{2}$ n'est pas un entier.

Il n'est pas possible d'obtenir 842 avec le programme.

Ou plus sobrement : il est clair que 842 n'est pas un multiple de 4.

4. Résolvons $4x = 842$ dans $\mathbb{N}$.

   Nous recherchons un nombre x tel que

$$4x = 2^{98}$$

   Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{4x}{4} &= \frac{2^{98}}{4} \\ x &= \frac{2^{98}}{2^2} \\ x &= 2^{98-2} \\ x &= 2^{96} \end{aligned}$$

   Et comme 2^{98} est bien un entier naturel :

   pour que le programme renvoie 2^{98} il faut choisir 2^{96} comme nombre de départ.

5. Vous pouvez télécharger les scripts : script 1, script 2 et script 3.

   Le script 2 calcul $(x-1)^2 - (x+1)^2$ sinon

   les scripts 1 et 3 correspondent au programme de calcul proposé.

Exercice 2.

1. (a) Calculons le nombre de garçon, n_g, dans cette classe.

   Il s'agit d'appliquer une proportion.

$$n_g = \frac{40}{100} \times 30$$

$$n_g = 12.$$

(b) Déterminer le nombre, n_{gnu}, de garçons qui ne sont pas des enfants uniques.

$\frac{1}{3}$ des garçons sont des enfants uniques donc $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ des garçons ne sont pas de enfants uniques :

$$\begin{aligned} n_{gnu} &= \frac{2}{3} \times n_g \\ &= \frac{2}{3} \times 12 \end{aligned}$$

$$\boxed{n_{gnu} = 8.}$$

(c) D'après les questions précédentes :

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique			
Enfant non unique		8	
Total		12	30

On complète alors par addition sur les lignes et les colonnes.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique		4	
Enfant non unique		8	
Total	18	12	30

Puisque 25 %, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ des enfants uniques sont des garçons, il y a donc $4 \times 4 = 16$ enfants uniques.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique		4	16
Enfant non unique		8	
Total	18	12	30

On complète alors par addition sur les lignes et les colonnes.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique	12	4	16
Enfant non unique		8	14
Total	18	12	30

Finalement :

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique	12	4	16
Enfant non unique	6	8	14
Total	18	12	30

2. (a) Choisissons un modèle probabiliste cohérent avec la situation.

Notons Ω l'ensemble des 30 élèves et munissons-le de l'équiprobabilité (chaque enfant à la même chance d'être choisi).

Notons encore A l'événement « obtenir un enfant unique ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, que l'univers contient 30 issues et que A est réalisé par 16 issues (d'après le tableau précédent) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{16}{30}\\ &= \frac{8}{15}\\ &\approx 0{,}533 \text{ par troncature}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \approx 0{,}53.}$$

(b) Notons encore B l'événement « obtenir un garçon qui est enfant unique ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, que l'univers contient 30 issues et que B est réalisé par 4 issues (d'après le tableau précédent) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{4}{30}\\ &= \frac{2}{15}\\ &\approx 0{,}133 \text{ par troncature}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \approx 0{,}13.}$$

(c) Choisissons un modèle probabiliste cohérent avec la situation.
Notons Ω' l'ensemble des 18 filles et munissons-le de l'équiprobabilité (chaque fille à la même chance d'être choisie).
Notons encore C l'événement « obtenir un enfant unique ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, que l'univers contient 18 issues et que C est réalisé par 12 issues (d'après le tableau précédent) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \frac{12}{19} \\ &= \frac{2}{3} \\ &\approx 0{,}666 \text{ par troncature}\end{aligned}$$

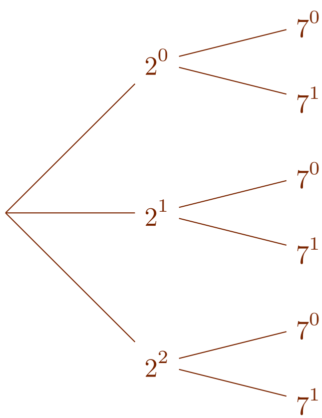
$$\boxed{\mathbb{P}(C) \approx 0{,}67.}$$

Il était bien sûr possible de raisonner en parlant de probabilité conditionnelle.

Exercice 3.

1. Déterminons les diviseurs de 28.

   Procédons à sa décomposition en facteurs premiers : $28 = 2^2 \times 7$.



Donc l'ensemble des diviseurs de 28 est $\{1; 7; 2; 14; 4; 28\}$.
Or $\frac{1+7+2+14+4+28}{2} = 28$ donc

$$\boxed{\text{L'affirmation 1 est vraie.}}$$

2. Pour que ce résultat soit vrai il faudrait que 6 et 9 soient premiers ente eux. Ce n'est pas le cas démontrons que l'affirmation est fausse en exhibant un contre-exemple.

   18 est divisible par 6 et par 9 mais il n'est clairement pas divisible par 54.

$$\boxed{\text{L'affirmation 2 est fausse.}}$$

3. Nous pouvons penser aux situations dévolution successives pour imaginer que ce ne serait peut être pas vrai.

   Considérons un rectangle dont les côtés mesurent $\ell = 20$ et $L = 30$.
   Si nous détaillons ici le calcul des coefficients multiplicateurs les augmentations et diminutions de 10 % se calculent aisément mentalement.
   Le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 10 % est

$$\begin{aligned} CM_b &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-10}{100} \\ &= 0{,}9 \end{aligned}$$

   Celui correspondant à une augmentation de 10 % est

$$\begin{aligned} CM_a &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{10}{100} \\ &= 1{,}1 \end{aligned}$$

   Après une diminution de 10 % sa largeur est $\ell' = 0{,}9 \times 20 = 18$ et après une augmentation de 10 % sa longueur est $L' = 1{,}1 \times 30 = 33$.
   $\ell \times L = 20 \times 30 = 600$ mais $\ell' \times L' = 18 \times 33 = 594$.
   ainsi $\ell \times L \neq \ell' \times L'$.

L'affirmation 3 est fausse.

4. Le périmètre du rectangle originale est

$$\begin{aligned} p &= 2 \times (L + \ell) \\ &= 2\,(5 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) \\ &= 2 \times 9 \text{ cm} \\ &= 18 \text{ cm} \end{aligned}$$

En procédant comme à la question précédente :

$$\begin{aligned} L^{'} &= 1{,}1 \times L \\ &= 1{,}1 \times 5 \text{ cm} \\ &= 5{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \ell^{'} &= 0{,}9 \times \ell \\ &= 0{,}9 \times 4 \text{ cm} \\ &= 3{,}6 \text{ cm} \end{aligned}$$

D'où le nouveau périmètre

$$\begin{aligned} p^{'} &= 2 \times (L^{'} + \ell^{'}) \\ &= 2\,(5{,}5 \text{ cm} + 3{,}6 \text{ cm}) \\ &= 2 \times 9{,}1 \text{ cm} \\ &= 18{,}2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ainsi : $p < p^{'}$.

L'affirmation 4 est fausse.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1. (a)
   (b)
2. (a)
   (b)
3.

Situation 2.

1.
2.
3.

Situation 3.

1.
2.
3.
4. (a)
   (b)

Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 4.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Mme Duplessy, M. Herminet et M. Paltoglou pour leur relecture et leurs corrections.

I Première partie (13 points).

Partie A.

1. Justifions l'encadrement.

   $M \in [DC]$ et $DC = 10$ donc $0 \leqslant x \leqslant 10$.
   Enfin $DM = x$, donc

   $$\boxed{0 \leqslant x \leqslant 10.}$$

2. Calculons l'aire $\mathscr{A}(ALCM)$ de $ALCM$ lorsque $x = 2$.

   La partie grisée n'est pas une figure dont l'aire peut être calculée par une formule que nous serions supposés connaître. Nous allons partir de l'aire du carré $ABCD$ et enlever les aires des parties qui ne sont pas grisées.

   * Calculons l'aire du carré $ABCD$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= AB^2\\ &= (10 \text{ cm})^2\\ &= 10^2 \text{ cm}^2\\ &= 100 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

   * Calculons l'aire du triangle AMD.
     Puisque AMD est rectangle en D :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AMD) &= \frac{1}{2} \times AD \times DM\\ &= \frac{1}{2} \times (10 \text{ cm}) \times (2 \text{ cm})\\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 2 \text{ cm} \cdot \text{cm}\\ &= 10 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

   * Du fait de la symétrie de la configuration par rapport à (AC) il est clair que $\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(ABL)$.
   * Des points précédents nous déduisons :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ALCM) &= \mathscr{A}(ABCD) - \mathscr{A}(AMD) - \mathscr{A}(ABL)\\ &= 100 \text{ cm}^2 - 10 \text{ cm}^2 - 10 \text{ cm}^2\\ &= (100 - 10 - 10) \text{ cm}^2\end{aligned}$$

   Si $x = 2$ alors $\mathscr{A}(ALCM) = 80 \text{ cm}^2$.

3. Calculons $\mathscr{A}(ALCM)$ lorsque $x = \frac{3}{5}$.

   Toutes les longueurs étant exprimées en centimètres nous ferons désormais l'économie d'indiquer les unités utilisées.

*

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AMD) &= \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{3}{5} \\ &= 3\end{aligned}$$

*

$$\mathscr{A}(ALCM) = 100 - 3 - 3$$

$$\boxed{\text{Si } x = \tfrac{3}{5} \text{ alors } \mathscr{A}(ALCM) = 94 \text{ cm}^2.}$$

4. Exprimons $\mathscr{A}(ALCM)$ en fonction de x.

   procédons comme aux deux questions précédentes

   *

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AMD) &= \frac{1}{2} \times 10 \times x \\ &= 5x\end{aligned}$$

   *

$$\mathscr{A}(ALCM) = 100 - 5x - 5x$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ALCM) = 100 - 10x.}$$

5. Nous avons déjà remarqué que les parties AMD et ABL ont la même aire. Il reste à avoir, par exemple, AMD et $ALCM$ de même aire.

   Déterminons x de sorte que $\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(ALCM)$.

   Dire que

$$\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(ALCM)$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
5x &= 100 - 10x \\
5x+10x &= 100 - 10x+10x \\
15x &= 100 \\
\frac{15x}{15} &= \frac{100}{15} \\
x &= \frac{2^2 \times 5^2}{3 \times 5} \\
x &= \frac{2^2 \times 5}{3} \\
x &= \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

Et comme $\frac{20}{3} = 6{,}666\ldots$ on a bien $0 \leqslant \frac{20}{3} \leqslant 10$.
Nous pouvons donc conclure :

$$\boxed{\text{les trois parties ont la même aire si et seulement si } x = \tfrac{20}{3}.}$$

Partie B.

1. (a) Déterminons l'aire $\mathscr{A}(MCL)$ du triangle MCL lorsque $x = 2$.

Là encore nous ne préciserons pas les unités, les longueurs étant touts exprimées en centimètre.

MCL est rectangle en C donc :

$$\mathscr{A}(MCL) = \frac{1}{2} \times MC \times CL$$

Du fait de la symétrie de la figure, MCL est isocèle en C et donc :

$$\mathscr{A}(MCL) = \frac{1}{2} \times MC^2$$

Puisque $DC = 10$, $DM = x$ et $M \in [DC]$:

$$\mathscr{A}(MCL) = \frac{1}{2} \times (10 - x)^2$$

Comme $x = 2$:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(MCL) &= \frac{1}{2} \times (10 - 2)^2 \\ &= 32\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(MCL) = 32 \text{ cm}^2.}$$

(b) En reprenant le raisonnement de la question précédente mais sans substituer à x la valeur 2 nous obtenons :

$$\boxed{\mathscr{A}(MCL) = \tfrac{1}{2}(10 - x)^2 \text{ quelque soit } x \in [0; 10].}$$

(c) Déterminons $\mathscr{A}(AML)$.

Remarquons que

$$\mathscr{A}(AML) = \mathscr{A}(AMCL) - \mathscr{A}(MCL)$$

Compte tenu des expressions obtenues pour $\mathscr{A}(AMCL)$ (question A.4) et $\mathscr{A}(MCL)$ (question précédente), nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AML) &= [100 - 10x] - \left[\frac{1}{2}(10 - x)^2\right] \\ &= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2}\left(10^2 - 2 \times 10 \times x + x^2\right)\right] \\ &= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - 20x + 100\right)\right] \\ &= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2} \times x^2 - \frac{1}{2} \times 20x + \frac{1}{2} \times 100\right] \\ &= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2}x^2 - 10x + 50\right] \\ &= 100 - 10x - \frac{1}{2}x^2 + 10x - 50 \\ &= 50 - \frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0;10]$, $\mathscr{A}(MCL) = 50 - \frac{x^2}{2}$.

2. (a) Comme nous l'avons établi en résolvant la question A.4 :

$f$est l'aire de AMD.

D'après la question A.4 :

g est l'aire de $AMCL$.

D'après la question B.1.c :

h est l'aire de AML.

(b) Identifions la courbe représentative de chaque fonction.

* Première méthode : en reconnaissant la nature de la fonction à partir de son expression algébrique.

  Nous pouvons reconnaître les courbe représentatives à partir des natures des fonctions.

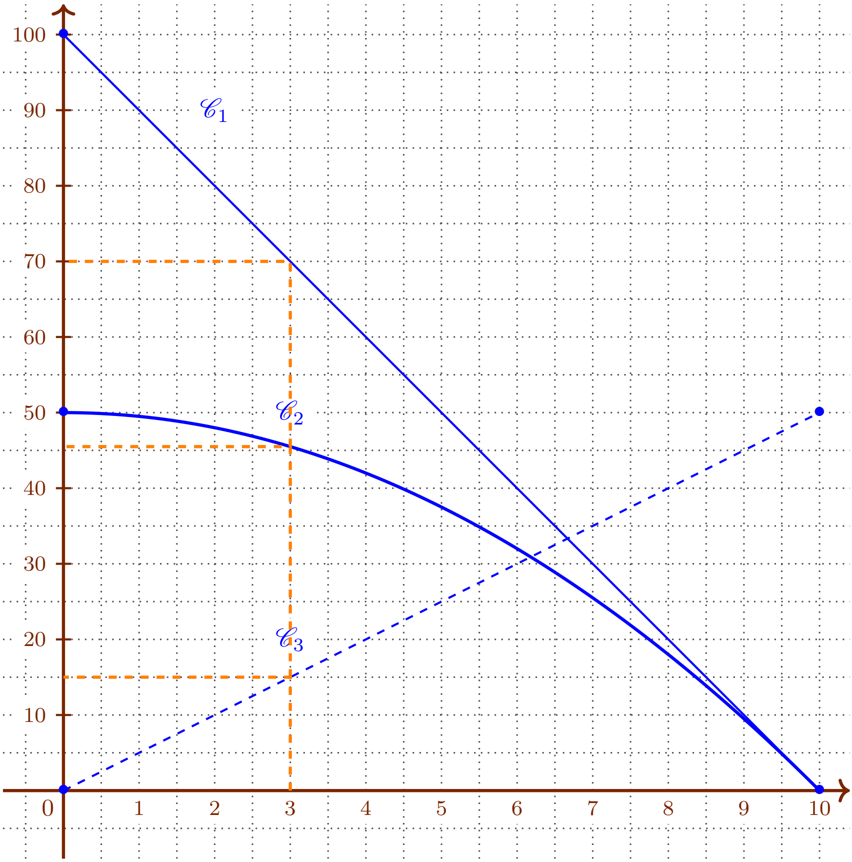
  h est une fonction polynomiale de degré deux donc sa courbe représentative est une parabole. Il ne peut s'agir que de $\mathscr{C}_2$.

  f et g sont des fonctions affines donc leurs courbes représentatives sont des droites : $\mathscr{C}_1$ ou $\mathscr{C}$. De plus le coefficient directeur de f est positif (5) alors que celui de g est négatif -10) donc la courbe représentative de f monte et celle de g descend.

* Tester un calcul d'image.

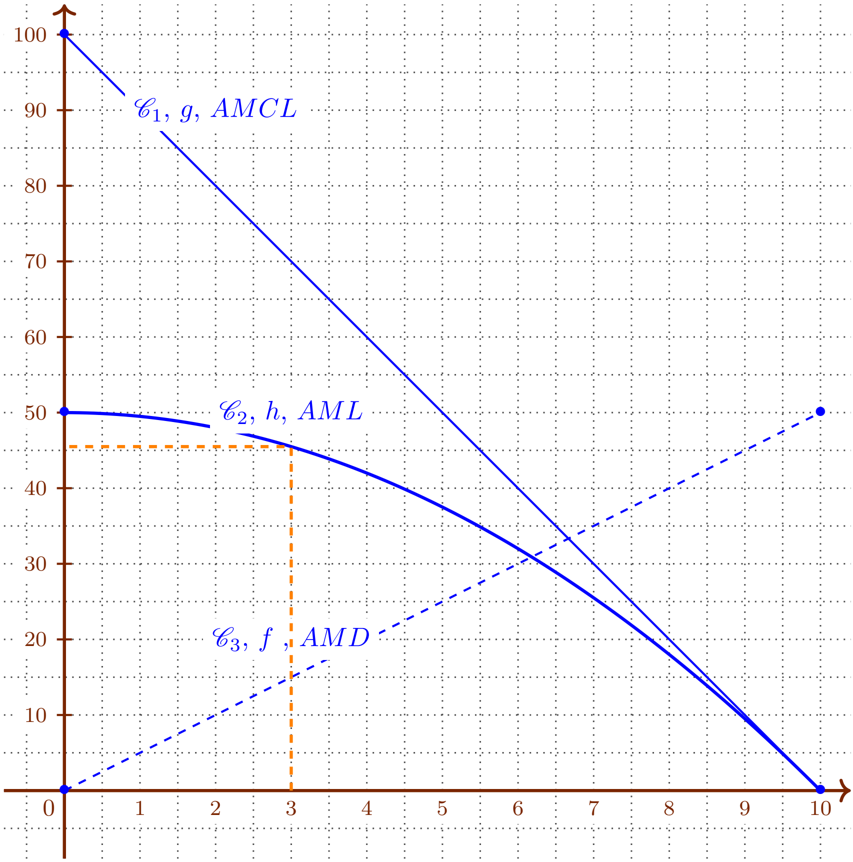
  En calculant nous obtenons : $f(3) = 5\times3 = 15$, $g(3) = 100-10\times3 = 70$ et $h(3) = 50 - \frac{3^2}{2} = 45{,}5$.

  Par lecture graphique nous pouvons identifier les courbes correspondant à ces calculs d'images.



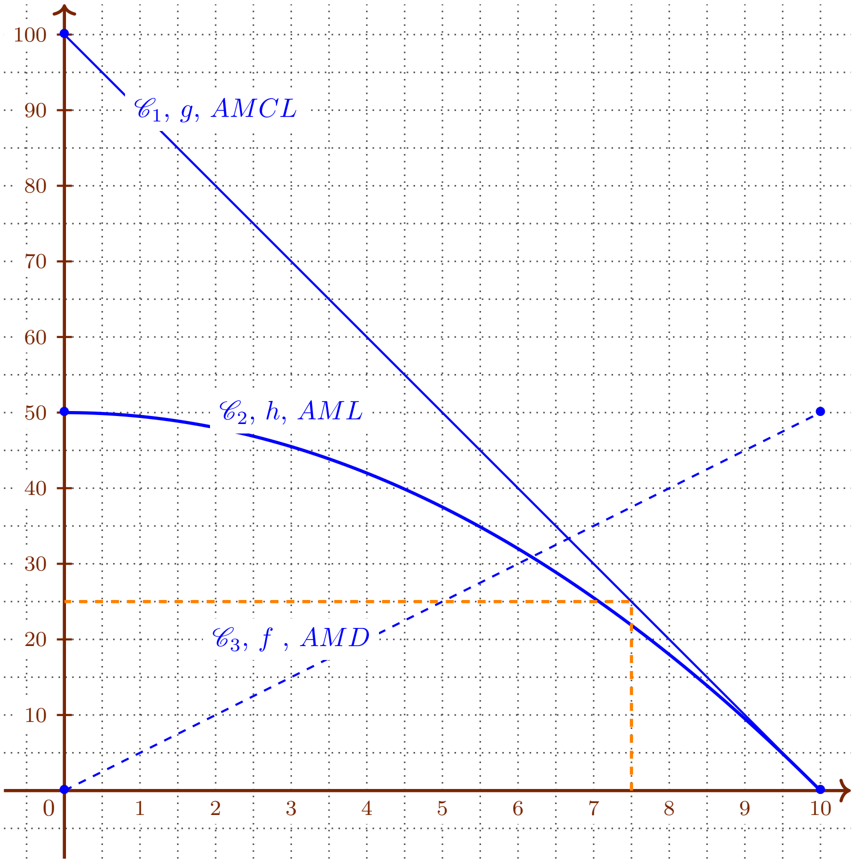
Les courbes représentatives des fonctions f, g et h sont respectivement $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

(c) En reprenant les résultats des deux questions précédentes nous pouvons annoter le graphique.



L'aire de AML égale 45 cm^2 lorsque $x = 3$.

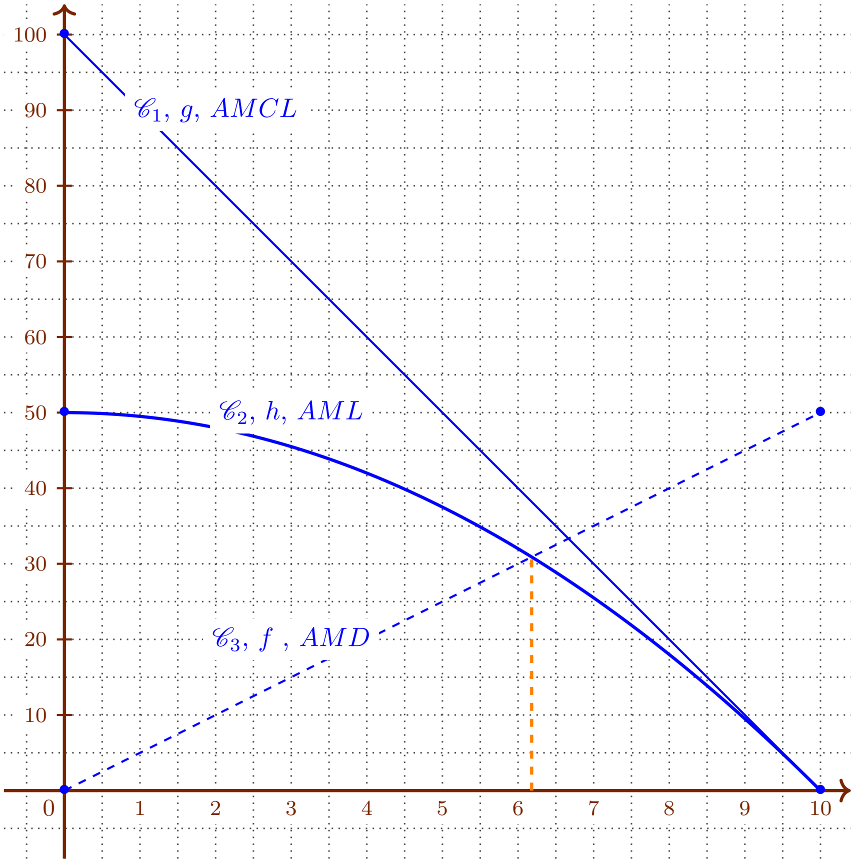
(d)



L'aire de $AMCL$ égale 25 cm^2 lorsque $x = 7{,}5$.

(e) ABL et ADM ont la même aire donc la question pourrait être : déterminer x pour que les aires de AMD et AML soient égales.

Or ces aires sont égales lorsque les fonctions les représentant ont la même image ce qui correspond aux points d'intersections de leur courbes représentatives :



et donc :

les aires de ABL, ADM et AML sont égales lorsque $x = 6{,}2$.

Partie C.

1. Le plus grand diamètre possible pour le cercle est la longueur du côté du carré, c'est-à-dire 10 cm, par conséquent

$$0 \leqslant r \leqslant 5.$$

2. Notons $\mathscr{A}_1$ l'aire du carré et $\mathscr{A}_2$ celle du cercle.

   Déterminons r tel que : $\mathscr{A}_2 = \frac{1}{4}\mathscr{A}_1$.

$$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{4}\mathscr{A}_1$$

   équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= \frac{1}{4} \times 10^2 \\ \pi r^2 &= 25 \\ \frac{\pi r^2}{\pi} &= \frac{25}{\pi} \\ r^2 &= \frac{25}{\pi} \end{aligned}$$

   Puisque r est une longueur c'est un nombre positif donc :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{25}{\pi}} \\ r &= \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

   Pour que l'aire du cercle soit le quart de l'aire du carré il faut que $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

   En arrondissant au centième :

   $r \approx 2{,}82$ cm.

3. (a) $= \mathtt{PI()} * \mathtt{A2} \wedge 2.$

   (b) Déterminons un encadrement de r_0.

   Dire que l'aire du disque égale l'aire du carré signifie qu'elle doit être égale à $\frac{10^2}{2} = 50$.
   En considérant cette partie :

9	3,5	38,48451
10	4	50,2654825

nous voyons que :

$$3{,}5 \leqslant r_0 \leqslant 4.$$

(c) Déterminons r_0 tel que : $\mathscr{A}_2 = \frac{1}{2}\mathscr{A}_1$.

$$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{2}\mathscr{A}_1$$

équivaut successivement à

$$\pi r_0^2 = \frac{1}{2} \times 10^2$$
$$\pi r_0^2 = 50$$
$$\frac{\pi r_0^2}{\pi} = \frac{50}{\pi}$$
$$r_0^2 = \frac{50}{\pi}$$

Puisque r_0 est une longueur c'est un nombre positif donc :

$$r_0 = \sqrt{\frac{50}{\pi}}$$
$$r_0 = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{\pi}}$$
$$r_0 = \frac{\sqrt{2 \times 5^2}}{\sqrt{\pi}}$$
$$r_0 = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5^2}}{\sqrt{\pi}}$$

Pour que l'aire du cercle soit le quart de l'aire du carré il faut que $r_0 = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$.

En arrondissant au centième :

$$r_0 \approx 3{,}99 \text{ cm}.$$

(d) Déterminons r_1 tel que : $\mathscr{A}_2 = \frac{1}{3}(\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2)$.

$$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{3}(\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2)$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
\pi r_1^2 &= \frac{1}{3} \times \left(10^2 - \pi r_1^2\right) \\
\pi r_1^2 &= \frac{1}{3} \times 100 - \frac{1}{3}\pi r_1^2 \\
\pi r_1^2 + \frac{1}{3}\pi r_1^2 &= \frac{100}{3} - \frac{1}{3}\pi r_1^2 + \frac{1}{3}\pi r_1^2 \\
\frac{4}{3}\pi r_1^2 &= \frac{100}{3} \\
\frac{3}{4\pi} \times \frac{4\pi r_1^2}{3} &= \frac{3}{4\pi} \times \frac{100}{3} \\
r_1^2 &= \frac{100}{4\pi}
\end{aligned}$$

Puisque r_1 est une longueur c'est un nombre positif donc :

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{\frac{100}{4\pi}} \\
r_1 &= \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4\pi}} \\
r_1 &= \frac{10}{\sqrt{4} \times \sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

Pour que l'aire du cercle soit le tiers de l'aire du carré il faut que $r_1 = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

En arrondissant au centième :

$r_1 \approx 2{,}82$ cm.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Un angle droit est visible sur la figure et on nous demande de vérifier qu'un triangle est rectangle. Il semble naturel de penser au théorème de Pythagore. Une rapide tentative nous montre que nous manquons de données pour ce théorème.

   La figure évoque par contre une configuration de Thalès et même la configuration classique d'un agrandissement de figure.

   * Configuration de Thalès. Les points A, D, B et A, E, C sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèses pour la réciproque du théorème de Thalès.

     Nous avons d'une part

$$\begin{aligned}\frac{AE}{AC} &= \frac{AC - AE}{AC}\\ &= \frac{10-4}{10}\\ &= \frac{6}{10}\\ &= \frac{2\times 3}{2\times 5}\\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

     et d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{AD}{AB} &= \frac{AD}{AD + DB}\\ &= \frac{9}{9+6}\\ &= \frac{9}{15}\\ &= \frac{3\times 3}{3\times 5}\\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

     donc $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$.

   Nous déduisons des deux points précédents, d'après la réciproque du théorème de Thalès que $(DE) \parallel (BC)$.

   Comme de plus $(DE) \perp (AC)$ nous en déduisons $(BD) \perp (AC)$.

L'affirmation 1 est vraie.

2. Un nombre premier est un nombre qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Quelques essais permettent de remarquer que la somme de deux nombres impaires consécutifs est toujours divisible par 2.

   Soient m et n deux nombres entiers impairs consécutifs.
   nous avons alors :

$$\begin{aligned} m + n &= m + (m+2) \\ &= 2m + 2 \\ &= 2 \times m + 2 \times 1 \\ &= 2(m+1) \end{aligned}$$

   Donc $m + n$ est divisible par 2. Par conséquent $m + n$ n'est pas premier.

   L'affirmation 2 est vraie.

3. Pour déterminer l'évolution globale correspondant à des évolutions successives nous allons utiliser les coefficients multiplicateurs.

   Déterminons le taux d'évolution globale t_g en cinq ans.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 20 % est

$$\begin{aligned} CM_a &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-20}{100} \\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

   Donc le coefficient multiplicateur global correspondant à 5 baisses de 20 % est

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_a \times CM_a \times CM_a \times CM_a \times CM_a \\ &= CM_a^5 \\ &= 0{,}8^5 \\ &= 0{,}32768 \end{aligned}$$

Nous en déduisons le taux d'évolution global :

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM_g - 1) \\ &= 100 \times (0{,}32768 - 1) \\ &= -67{,}232 \end{aligned}$$

La valeur de la voiture a diminuée de 67,232 %. Plus que 66,666... % car, en effet $\frac{1}{3} = 0{,}666\ldots$

L'affirmation 3 est fausse.

4. Un quart des joueurs sont majeurs et deux tiers de ce quart à moins de 25 ans donc la proportion de personnes ayant entre 18 et 25 ans est :

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 2.

1. Déterminons l'écart, $\overline{e}$, entre la taille moyenne des filles, $\overline{x}_f$, et la taille moyenne des garçons, $\overline{x}_g$.

   Par définition de la moyenne :

$$\begin{aligned} \overline{x}_f &= \frac{149 + 155 + 161 + \cdots + 160}{13} \\ &= 157 \end{aligned}$$

   D'où

$$\begin{aligned} \overline{e} &= \overline{x}_g - \overline{x}_f \\ &= 159 - 157 \end{aligned}$$

$\overline{e} = 2$ cm.

2. Déterminons le max de la classe.

   Puisque la plus petite fille mesure 142 cm c'est donc un garçon qui mesure 140 cm.
   L'étendue chez les garçons étant de 29 cm, le plus grand garçon mesure 140 cm + 29 cm = 169 cm.
   Comme la plus grande fille mesure 167 cm nous pouvons conclure.

   $$\boxed{\text{max} = 169 \text{ cm.}}$$

3. Remarquons que 3 filles mesurent 162 cm ou plus.
   Il y a $28 - 13 = 15$ garçons.
   De plus la médiane est de 161 cm ce qui signifie que $\frac{15}{2} + 0{,}5 = 8$ garçons ont une taille supérieure ou égale à 161 cm.
   Or tous les garçons ont des tailles distinctes donc il y a 7 garçons dont la taille est supérieure ou égale à 162 cm.

   En regroupant filles (3) et garçons (7) :

   $$\boxed{\text{il y a 10 élèves qui mesurent plus de 162 cm.}}$$

4. Déterminons la moyenne $\overline{x}$.

   Il s'agit d'un calcul de moyenne de moyennes. Il faut être prudent et ne pas oublier de prendre en compte l'effectif correspondant à la moyenne.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{13 \times \overline{x}_f + 15 \times \overline{x}_g}{28}\\ &= \frac{13 \times 157 + 15 \times 159}{28}\\ &= \frac{2213}{14} && \approx 158{,}07142\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} \approx 158{,}1 \text{ cm.}}$$

Exercice 3.

Pour télécharger le programme Scratch il suffit de cliquer dessus.

1.
```
Quand [drapeau] est cliqué
aller à x: (0) y: (0)
s'orienter à (90) degrés
effacer tout
stylo en position d'écriture
mettre [longueur ▾] à (10)
répéter (15) fois
    avancer de (longueur)
    tourner de ↺ de (120) degrés
    ajouter à [longueur ▾] (10)
fin
cacher
```

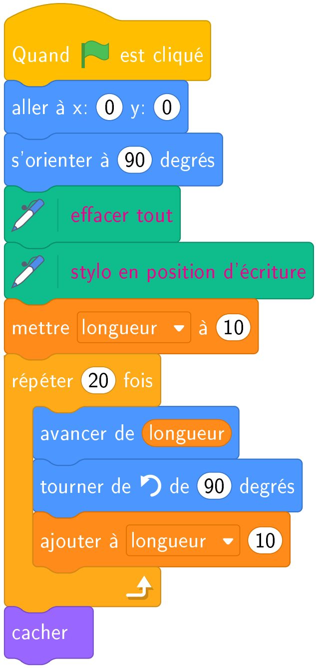
2. La longueur suit une progression arithmétique (on parle de suite arithmétique) de raison 10 : à chaque étape la longueur variable est augmentée de 10.

   La valeur initiale de la *longueur* est 10 puis dans la boucle elle est augmentée 15 fois de 10. Autrement dit la *longueur* du dernier segment tracé est :

$$longueur = 10 + 15 \times 10$$

   La longueur du dernier segment est 160 pixels.

3. Voici une modification possible :



III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3.
4.

Situation 2.

1.
2.
3.

Situation 3.

1. (a)
   (b)

2. (a)
   (b)
   (c)

Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 5.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à M. Langlois, Mme Schulz et M. Herminet pour leurs corrections.

I Première partie (13 points).

Partie A.

1. (a) 1 523 apiculteurs possédaient entre 150 et 399 ruches en 2017.

   (b) 49 892 + 1 939 + 1 523 + 599 = 53 953.

   En 2017 il y avait 53 953 apiculteurs.

   (c) 2 020 + 2 540 = 4 560.

   En 2016 il y avait 4 560 apiculteurs avaient entre 50 et 399 ruches.

2. (a) Il y a, approximativement 20 fois plus d'apiculteurs ayant moins de 50 ruches que dans les autres classes.

   Le choix de la représentation découle de la disproportion dans le nombre d'apiculteurs dans cette classe.

   (b) Calculons le nombre, n_{2016}, d'apiculteurs en 2016.

   Nous devons retrouver la valeur initiale, avant évolution. Pour cela nous allons utiliser le coefficient multiplicateur réciproque, qui n'est autre que l'inverse du coefficient multiplicateur de l'évolution.

Le coefficient multiplication correspondant à une augmentation de 10,4 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{10{,}4}{100} \\ &= 1{,}104 \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$n_{2016} \times CM = n_{2017}.$$

Donc :

$$n_{2016} = CM_r n_{2017},$$

où $CM_= \frac{1}{CM}$ est le coefficient multiplicateur réciproque.
Enfin :

$$\begin{aligned} n_{2016} &= \frac{1}{1{,}104} \times 49\,892 \\ &\approx 45\,192{,}02 \end{aligned}$$

45 192 apiculteurs avaient moins de 50 ruches en 2016.

3. Calculons le taux d'évolution $t_{16\rightarrow 17}$ du nombre d'apiculteurs possédant au moins 150 ruches ente 2016 et 2017.

   Le nombre d'apiculteurs ayant au moins 150 ruches en 2016 est

$$\begin{aligned} V_{16} &= 2540 + 608 \\ &= 3148 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{17} &= 1523 + 599 \\ &= 2122 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{16\to17} &= \frac{V_{17} - V_{16}}{V_{16}} \times 100 \\ &= \frac{2122 - 3148}{3148} \times 100 \\ &\approx -3259I1 \end{aligned}$$

$t_{16\to17} \approx -32{,}6$ %. Autrement dit le nombre d'apiculteurs a diminué de 32,6 %.

Partie B.

1. (a) Démontrons que FOE est équilatéral.

   FOE est équilatéral si et seulement si FOE est isocèle en O et $\widehat{EOF} = 60°$.

   * $[OF]$ et $[OE]$ sont des rayons du cercle donc FOE est isocèle en O.
   * Puisque l'hexagone est régulier $\widehat{EOF} = \frac{1}{6} \times 360° = 60°$.

   FOE est équilatéral.

   (b) Déterminons l'aire $\mathscr{A}_1$ de l'hexagone.

   L'hexagone est constitué de 6 triangles équilatéraux tous isométriques à FOE. Donc

$$\mathscr{A}_1 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\mathscr{A}_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3}x^2.$$

   (c) Calculons $\mathscr{A}_1$.

   Le périmètre de l'hexagone est 18 mm, autrement dit

$$6x = 18 \text{ mm}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{6x}{6} &= \frac{18 \text{ mm}}{6} \\ x &= \frac{18}{6} \text{ mm} \\ x &= 3 \text{ mm} \end{aligned}$$

Avec la formule de la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_1 &= \frac{3}{2}\sqrt{3}\,(3 \text{ mm})^2 \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{3} \times 3^2 \text{ mm}^2 \\ &= \frac{27}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{100} \text{ cm}^2 \\ &\approx 0{,}2338 \text{ cm}^2 \quad \text{en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 \approx 0{,}234 \text{ cm}^2.}$$

2. (a) On peut passer de l'hexagone **A** à l'hexagone **B** par

- la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$,
- La symétrie centrale de centre le milieu de $[OO_1]$,
- la symétrie axiale d'axe $[O_2O_6]$.

(b) On peut passer de l'hexagone **A** à l'hexagone **C** par

la translation de vecteur $3\overrightarrow{OO_1}$.

3. (a) Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ d'une alvéole.

Puisque l'alvéole à une forme de prisme son volume est

$$\mathscr{V}_1 = \mathscr{B} \times h, \quad \text{ou } \mathscr{B} \text{ est l'aire de la base.}$$

Or la base est ici hexagonale, donc, d'après la quesion B.1.(b) :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= \frac{3}{2}\sqrt{3}\,(3\text{ mm})^2 \times 11{,}5\text{ mm}\\ &= \frac{3}{2}\sqrt{3} \times 3^2 \times 11{,}5\text{ mm}^3\\ &\approx 268{,}90089\text{ mm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_1 \approx 270\text{ mm}^3.}$$

(b)

$$\begin{aligned}1\text{ mm}^3 &= 1 \times \left(\frac{1}{100}\text{ dm}\right)^3\\ &= 1 \times \left(\frac{1}{100}\right)^3\text{ dm}^3\\ &= 10^{-6}\text{ L}\\ &= 10^{-6} \times 1000\text{ mL}\\ &= 10^{-3}\text{ mL}\end{aligned}$$

Par conséquent la contenance d'une alvéole est de

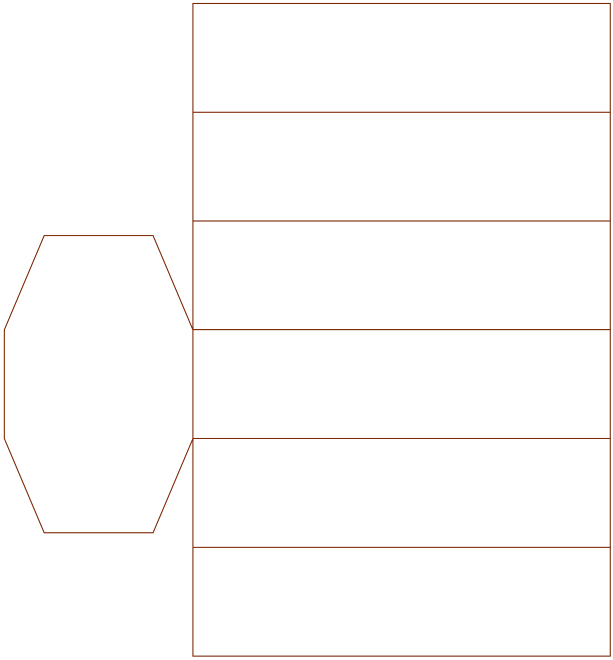
$$\mathscr{V}_1 \approx 270 \times 10^{-3}\text{ mL}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_1 \approx 0{,}27\text{ mL.}}$$

(c) Dessinons un patron d'une alvéole à l'échelle imposée.

Taille réelle	1	3 mm	11,5 mm
Taille à l'échelle	6	18 mm	69 mm

La figure n'est pas à l'échelle demandée car ça ne rentrait pas. Elle est à 80 % de la taille demandée.



Partie C.

1. Déterminons le nombre n_r d'alvéole hébergés dans une ruche.

   Une alvéole occupe une surface de $(5\text{ mm})^2 = 5^2\text{ mm}^2 = 25\text{ mm}^2$.
   Or la surface d'un cadre est de

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_2 &= (41\text{ cm}) \times (26{,}5\text{ cm})\\ &= (410\text{ mm}) \times (265\text{ mm})\\ &= 410 \times 265\text{ mm} \cdot \text{mm}\\ &= 108\,650\text{ mm}^2\end{aligned}$$

   donc le nombre d'alvéole hébergées par les deux côtés du cadre est :

$$\begin{aligned}n_c &= 2 \times \frac{108\,650\text{ mm}^2}{25\text{ mm}^2}\\ &= 8\,692\end{aligned}$$

Nous en déduisons pour 12 cadres :

$$\begin{aligned} n_r &= 12 \times n_c \\ &= 12 \times 8\,692 \\ &= 104\,304 \end{aligned}$$

Une ruche héberge approximativement 100 000 alvéoles.

2. Déterminons le volume de miel $\mathscr{V}_2$ dans une ruche.

   D'après la question B.3.(b) le volume de miel dans les 100 000 alvéoles est :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_2 &= 100\,000 \times 0{,}27 \text{ mL} \\ &= 100\,000 \times 0{,}27 \ \frac{1}{1000} \text{ L} \end{aligned}$$

$\mathscr{V}_2 = 27$ L.

3. (a) Il s'agit d'une situation de proportionnalité. Schématisons la par un tableau.

1 kg = 1 000 g	25 g
4 kg = 4 000 g	x g

Les changements d'unités ne sont pas indispensables ici puisque les proportions sont des nombres sans unités. Cependant cela peut faciliter un raisonnement consistant à se ramener à l'unité.

Donc $x = 25 \times \frac{4000}{1000}$.

Pour obtenir 25 g il faut récolter 100 g de nectar.

(b) Raisonnons là encore par proportionnalité. Nous savons que la masse volumique du miel est de 1,4 kg/L. Autrement dit chaque litre à une masse de 1,4 kg.

1,4 kg	x kg
1 L = 1 000 mL	100 mL

Donc : $x = \frac{1{,}4 \text{ kg}}{1\,000 \text{ mL}} \times 100$ mL.

Pour obtenir 100 mL de miel les abeilles doivent récolter 0,14 kg de nectar.

(c) D'après la question C.2. la ruche contient 27 L or chaque litre a une masse de 1,4 kg donc la masse de miel est

$$\begin{aligned} m_1 &= 27 \text{ L} \times 1{,}4 \text{ kg/L} \\ &= 27 \times 1{,}4 \text{ L} \cdot \text{kg/L} \\ &= 37{,}8 \text{ kg} \end{aligned}$$

la masse contenue dans une ruche est 37,8 kg.

(d) * Déterminons le nombre, n_s, de sorties nécessaires pour obtenir 1 kg de miel.

Pour obtenir un 1 kg de miel il faut récolter 4 kg de nectar.
Chaque sortie permet de récolter 6×10^{-5} kg de nectar, donc (encore de la proportionnalité) pour obtenir 4 kg de miel le nombre de sorties nécessaires est :

$$\begin{aligned} n_s &= \frac{4 \text{ kg}}{6 \times 10^{-5} \text{ kg}} \\ &= \frac{4}{6 \times 10^{-5}} \\ &\approx 66\,667 \end{aligned}$$

* Déterminons la distance parcourue pour récolter 4 kg de nectar.

À chaque sortie la distance parcourue est de 1 km donc la distance parcourue lors de 66 667 sorties est $66\,667 \times 1$ kg.

Pour obtenir 1 kg de miel les abeilles doivent parcourir approximativement 67 000 km.

(e) D'après la question C.3.(c) la ruche contient 37,8 kg et, d'après la question précédente, chaque kilogramme nécessite un parcours de 67 000 km donc la distance parcouru, en kilomètre, pour remplir la ruche est :

$$37{,}8 \times 67\,000 = 2\,532\,600$$

Pour remplir une ruche les abeilles doivent parcourir 2 532 600 km.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Ici l'univers n'est pas descriptible par ses issues puisque nous ne connaissons pas le nombre de boules. Nous allons travailler avec le système complet d'événements correspondant aux différentes couleurs.

   Notons B l'événement « obtenir une boule bleue » et de même R, N et V. Considérons l'univers $\Omega = \{N,R,B,V\}$ muni de la loi de probabilité décrite par l'énoncé.

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

   Puisque, par définition de la loi de probabilité :

$$\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(V) = 1$$

   ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{20}{100} + \frac{1}{4} + \mathbb{P}(B) + 0{,}3 &= 1\\ \mathbb{P}(B) + \frac{3}{4} &= 1\\ \mathbb{P}(B) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} &= 1 - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}.$$

2. Le contexte de l'exercice laisse entendre que chaque boule à la même probabilité d'être tirée qu'une autre. Autrement dit il y a équiprobabilité entre les diverses boules. Par conséquent les probabilités se confondent avec les proportions.

   Déterminons le nombre, n_R, de boules rouges.

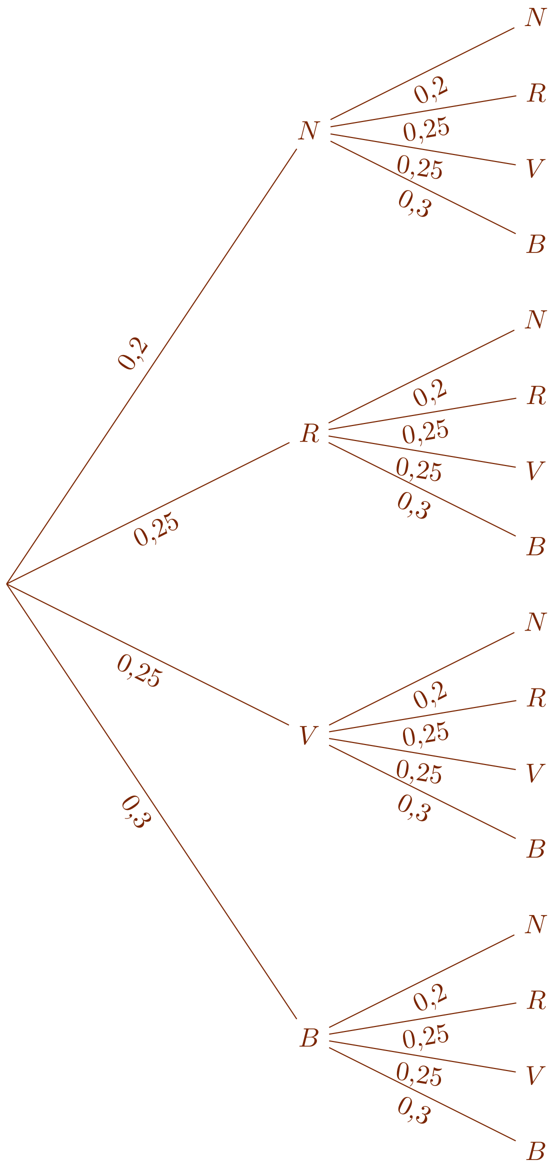
   Puisque $\frac{1}{4}$ des 140 boules sont rouges :

$$\begin{aligned} n_R &= \frac{1}{4} \times 140 \\ &= 35 \end{aligned}$$

   En procédant de même pour les différentes couleurs :

Couleur	N	R	B	V
Nombre	28	35	35	42

3. (a) Schématisons l'expérience aléatoire par un arbre pondéré. Il y a 2 tirages donc notre arbre aura deux niveaux. De plus comme le tirage se fait avec remise nous retrouverons les mêmes embranchements sur chaque niveau avec les mêmes probabilités : $\frac{28}{140} = 0{,}2$, $\frac{35}{140} = 0{,}25$ et $\frac{42}{140} = 0{,}3$.



Calculons $\mathbb{P}(RV)$.

D'après le principe multiplicatif :

$$\mathbb{P}(RV) = 0{,}25 \times 0{,}25$$

$$\boxed{\mathbb{P}(RV) = 0{,}0625.}$$

(b) Calculons $\mathbb{P}(R \cap V)$.

$R \cap V = \{RV; VR\}$ donc

$$\mathbb{P}(R \cap V) = \mathbb{P}(RV) + \mathbb{P}(VR)$$

D'après le principe multiplicatif :

$$\mathbb{P}(R \cap V) = 0{,}25 \times 0{,}25 + 0{,}25 \times 0{,}25$$

$$\boxed{\mathbb{P}(R \cap V) = 0{,}125.}$$

(c) Notons E l'événement « obtenir deux boules de la même couleur ».

Calculons $\mathbb{P}(E)$.

$E = \{NN,RR,VV,BB\}$.
Donc :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(NN) + \mathbb{P}(RR) + \mathbb{P}(VV) + \mathbb{P}(BB)$$

D'après le principe multiplicatif :

$$\mathbb{P}(E) = 0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}25 \times 0{,}25 + 0{,}25 \times 0{,}25 + 0{,}3 \times 0{,}3$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = 0{,}255.}$$

Exercice 2.

Cliquez sur les programmes ci-dessus pour les télécharger.

1. Pour le premier algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

Ligne de code.	Réponse.	Résultat.
demander (Saisir un nombre) et attendre	2	
mettre Résultat à (réponse)	2	2
ajouter à Résultat (3)	2	$2 + 3 = 5$
mettre Résultat à (Résultat * Résultat)	2	$5 \times 5 = 25$
mettre Résultat à (Résultat - 9)	2	$25 - 9 = 16$

Pour le second algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

Ligne de code.	Réponse.	Résultat.
demander (Saisir un nombre) et attendre	2	
mettre Résultat à (réponse)	2	2
ajouter à Résultat (6)	2	$2 + 6 = 8$
mettre Résultat à (Résultat * Réponse)	2	$8 \times 2 = 16$

Si le nombre choisi en entrée est 2 alors les deux algorithmes renvoient 16.

2. Pour le premier algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

Ligne de code.	Réponse.	Résultat.
demander (Saisir un nombre) et attendre	1,2	
mettre Résultat à (réponse)	1,2	2
ajouter à Résultat (3)	1,2	$1{,}2 + 3 = 4{,}2$
mettre Résultat à (Résultat * Résultat)	1,2	$4{,}2 \times 4{,}2 = 17{,}64$
mettre Résultat à (Résultat - 9)	1,2	$17{,}64 - 9 = 8{,}64$

Pour le second algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

Ligne de code.	Réponse.	Résultat.
demander (Saisir un nombre) et attendre	1,2	
mettre Résultat à (réponse)	1,2	1,2
ajouter à Résultat (6)	1,2	1,2 + 6 = 7,2
mettre Résultat à (Résultat * Réponse)	1,2	7,2 × 1,2 = 8,64

Si le nombre choisi en entrée est 1,2 alors les deux algorithmes renvoient 8,64.

3. Nous conjecturons :

Il semble que les deux algorithme renvoie la même valeur.

Recherchons ce que renvoient les deux algorithmes pour une valeur en entrée égale à x.
Pour le premier algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

Ligne de code.	Réponse.	Résultat.
demander (Saisir un nombre) et attendre	x	
mettre Résultat à (réponse)	x	x
ajouter à Résultat (3)	x	$x+3$
mettre Résultat à (Résultat * Résultat)	x	$(x+3)\times(x+3)$
mettre Résultat à (Résultat - 9)	x	$(x+3)^2-9$

Pour le second algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

Ligne de code.	Réponse.	Résultat.
demander Saisir un nombre et attendre	x	
mettre Résultat à réponse	x	x
ajouter à Résultat 6	x	$x+6$
mettre Résultat à Résultat * Réponse	x	$(x+6)\times x$

Démontrons que $(x+3)^2-9=(x+6)\times x$.

La méthode consiste ici à développer, réduire et ordonner autant que possible les deux expressions ci-dessus pour s'assurer qu'elles sont égales.
D'une part :

$$\begin{aligned}(x+3)^2-9&=x^2+2\times x\times 3^2-9\\&=x^2-3x+9-9\\&=x^2-6x\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}(x+6)\times x&=x\times x+6\times x\\&=x^2+6x\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(x+3)^2-9=x^2+6x.}$$

Exercice 3.

1. Calculons DF.

- Configuration de Thalès. A, D et E d'une part, A, F et G d'autre part sont alignés dans le même ordre.
- Hypothèse pour la forme directe du théorème. $(DF)\parallel(EG)$.

Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{AD}{AE} = \frac{DF}{EG}.$$

Puisque $E \in [BG]$

$$EG = BG - BE = 11 \text{ m} - 5 \text{ m} = 6 \text{ m}$$

et puisque $D \in [AE]$,

$$AD = AE - DE = 12 \text{ m} - 1 \text{ m} = 11 \text{ m}$$

nous avons donc

$$\frac{11}{12} = \frac{DF}{6}.$$

Nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned} \frac{11}{12} \times 6 &= \frac{DF}{6} \times 6 \\ 5{,}5 &= DF \end{aligned}$$

$$\boxed{DF = 5{,}5 \text{ m.}}$$

2. Calculons l'aire $\mathscr{A}_g$ de la grand-voile.

La grand-voile a une forme triangulaire nous devrions donc chercher une hauteur pour calculer son aire mais il s'agit en fait d'un triangle rectangle donc nous choisirons l'un des côtés de l'angle droit comme hauteur.

Puisque $(EG) \perp (AE)$ et $(EG) \parallel (DF)$, nécessairement $(DF) \perp (AE)$. Puisque ADF est un triangle rectangle en D :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_g &= \frac{1}{2} \times AD \times DF \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \text{ m} \times 5{,}5 \text{ m} \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \times 5{,}5 \text{ m} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_g = 30{,}25 \text{ m}^2.}$$

3. (a) Calculons l'aire $\mathscr{A}(ADC)$ de ADC.

ADC est rectangle en D donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ADC) &= \frac{1}{2} \times AD \times DC \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \text{ m} \times 1 \text{ m} \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \times 1 \text{ m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ADC) = 5{,}5 \text{ m}^2.}$$

Calculons l'aire $\mathscr{A}(BCDE)$ de $BCDE$.

$BCDE$ est un trapèze rectangle en E de bases $[BE]$ et $[CD]$ donc son aire est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(BCDE) &= \frac{1}{2} \times (BE + CD) \times DE \\ &= \frac{1}{2} \times (5 \text{ m} + 1 \text{ m}) \times 1 \text{ m} \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \text{ m} \times 1 \text{ m} \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 1 \text{ m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(BCDE) = 3 \text{ m}^2.}$$

(b) Calculons l'aire $\mathscr{A}(ABC)$ de ABC.

ABE est rectangle en E donc son aire est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{E} &= \frac{1}{2} \times AE \times EB \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \text{ m} \times 5 \text{ m} \\ &= 30 \text{ m}^2\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABC) &= \mathscr{A}(ABE) - \mathscr{A}(ADC) - \mathscr{A}(BCDE)\\ &= 30 \text{ m}^2 - 5{,}5 \text{ m}^2 - 3\text{m}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ABC) = 21{,}5 \text{ m}^2.}$$

(c) Calculons l'aire $\mathscr{A}_t$ de la trinquette.

Si les longueurs, exprimées en m, sont multipliées par $\frac{4}{5}$ alors les aires, exprimées en m^2 sont multipliées par $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.
Donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_t &= \frac{16}{25} \times \mathscr{A}(ABC)\\ &= \frac{16}{25} \times 21{,}5 \text{ m}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_t = 13{,}76 \text{ m}^2.}$$

4. Calculons les deux tarifs.

* En local.
Par proportionnalité, le prix des voiles sera de

$$\begin{aligned}86 \text{ €/m}^2 \times 65{,}51 \text{ m}^2 &= 86 \times 65{,}51 \text{ €}\\ &= 5633{,}86 \text{ €}\end{aligned}$$

* En Asie.
Par proportionnalité, le prix des voiles sera de

$$\begin{aligned}64 \text{ €/m}^2 \times 65{,}51 \text{ m}^2 &= 64 \times 65{,}51 \text{ €}\\ &= 4192{,}64 \text{ €}\end{aligned}$$

Les taxes induisent une augmentation de 32 %, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{32}{100} = 1{,}32$.
Donc après taxation le prix sera de

$$1{,}32 \times 4192{,}64 \text{ €} = 5534{,}2848 \text{ €}$$

La qualité du tissu étant de 0,34 kg/m^2, la masse des voiles commandées est de

$$\begin{aligned} 0{,}34 \text{ kg/m}^2 \times 65{,}51 \text{ m}^2 &= 0{,}34 \times 65{,}51 \text{ kg} \\ &= 22{,}2734 \text{ kg} \end{aligned}$$

Il faudra donc payer 250 € de frais de port.
Finalement l'achat des voileries reviendra à

$$5534{,}2848 \text{ €} + 250 \text{ €} = 5784{,}2848$$

L'achat en local est plus économique.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3.

Situation 2.

1.
2.
3.
4.

Situation 3.

1. (a)

   (b)

2.

3.