Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 1.

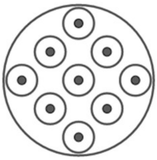
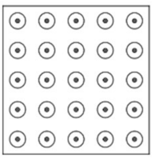
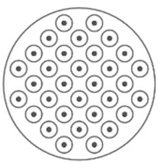
Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Dans tout ce problème, on s'intéresse à la société AMP'OUL, qui fabrique des ampoules à diodes électroluminescentes. Le fabricant propose trois modèles :

Modèle		Nombre de diodes	Dimensions	Coût de fabrication du support
A		9	Cylindre Diamètre 4,5 cm Hauteur 6 cm	93 centimes
B		25	Pavé droit Carré lumineux de 5 cm de côté Hauteur 6 cm	98 centimes
C		32	Cylindre Diamètre 5 cm Hauteur 6 cm	112 centimes

Partie A : coût de fabrication.

1. Le modèle A est formé de 9 diodes et de son support. Sachant que le coût d'une diode est de 18 centimes, montrer que le coût de fabrication d'une ampoule de modèle A est de 2,55 €.

   Déterminons le coût de fabrication, c_A, pour le modèle A.

* Le coût des diodes est : $9 \times 0{,}18$ € = 1,62 €.
* Le coût du support est 0,93 €.

Nous en déduisons le coût de fabrication :

$$c_A = 1{,}62 \text{ €} + 0{,}93 \text{ €}$$

$$\boxed{c_A = 2{,}55 \text{ €}.}$$

2. Une feuille de calcul a été produite pour calculer les coûts de fabrication des ampoules :

	A	B	C	D	E	F
1	**Modèle**	**Nombre de diodes**	**Coût de fabrication du support (€)**	**Coût de fabrication du modèle (€)**	**Nombre de modèles produits**	**Coût total**
2	**A**	9	0,93		19 000	
3	**B**	25	0,98		14 900	
4	**C**	32	1,12		3 094	

(a) Quelle formule peut-on écrire dans la cellule D2 puis étirer vers le bas, pour calculer le coût de fabrication d'une ampoule du modèle correspondant ?

Une formule possible en D2 est :

$$\boxed{= 0{,}18 * \mathtt{B2} + \mathtt{C2}.}$$

(b) Quelle formule peut-on écrire dans la cellule F2 puis étirer vers le bas pour obtenir le coût total de production des ampoules du modèle correspondant ?

Une formule possible en F2 est :

$$\boxed{= \mathtt{D2} * \mathtt{E2}.}$$

3. Calculer le coût total de production pour fabriquer 19 000 ampoules de modèle A, 14 900 ampoules de modèle B et 3 094 ampoules de modèle C. On l'appellera la commande « DUPONT ».

Déterminons le coût, c_D, de la commande Dupont.

* Le coût de fabrication d'une ampoule de modèle B est

$$\begin{aligned} c_B &= 25 \times 0{,}18 \text{ €} + 0{,}98 \text{ euro} \\ &= 5{,}48 \text{ €} \end{aligned}$$

* Le coût de fabrication d'une ampoule de modèle C est

$$\begin{aligned} c_C &= 32 \times 0{,}18 \text{ €} + 1{,}12 \text{ euro} \\ &= 6{,}88 \text{ €} \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} c_D &= 19\,000 c_A + 14\,900 c_B + 3\,094 c_C \\ &= 19\,000 \times 2{,}55 \text{ €} + 14\,900 \times 5{,}48 \text{ €} + 3\,094 \times 6{,}88 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_D = 151\,388{,}72 \text{ €}.}$$

Partie B : emballage.

1. Calculer le volume d'une ampoule de modèle A. Donner le résultat arrondi au millimètre cube.

   On rappelle que le volume d'un cylindre dont l'aire de la base est B et de hauteur h est égale à $B \times h$.

Calculons $\mathcal{V}_A$ le volume de l'ampoule A.

L'ampoule étant un cylindre son volume est donné par :

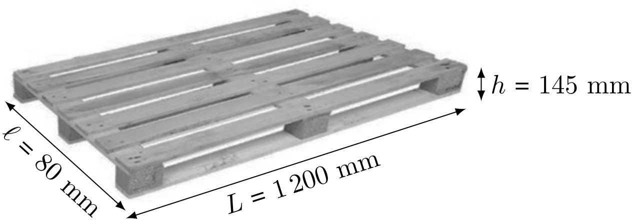
$$\begin{aligned}\mathscr{V}_A &= \pi R^2 \times h\\ &= \pi\left(\frac{4{,}5}{2}\text{ cm}\right)^2 \times 6 \text{ cm}\\ &= \pi \times 2{,}25^2 \times 6 \text{ cm}^3\\ &= 30{,}375\pi \text{ cm}^3\\ &\approx 95{,}425876 \text{ cm}^3 \text{ en tronquant.}\end{aligned}$$

En arrondissant au m^3 :

$$\boxed{\mathscr{V}_A \approx 95{,}426 \text{ cm}^3.}$$

Les ampoules sont conditionnées dans des boîtes en carton parallélépipédiques, puis stockées sur des palettes. L'entreprise choisit, pour ses trois types d'ampoules, des boites parallélépipédiques de dimensions $L = 5$ cm, $\ell = 5$ cm et $h = 7$ cm, au prix unitaire de 0,12 €.

2. La palette EURO vide, possède des dimensions standards, soit $L = 1\,200$ mm, $\ell = 800$ mm et $h = 145$ mm.



(a) Montrer que le nombre maximum de boites d'ampoules sur un étage de palette est de 384.

Déterminons le nombre n_e de boîte sur un étage de palette.

Pour que le nombre de boîtes disposées sur la palette soit maximal il faut les placer avec la face carrée (qui est celle d'aire minimale) à l'horizontale.

* Comme 1200 mm = 120 cm = 24×5 cm, il est possible de placer 24 boîtes dans le sens de la longueur.

* Comme 800 mm = 80 cm = 16×5 cm, il est possible de placer 16 boîtes dans le sens de la largeur.

Sur un étage de palette le nombre de boîte est donc :

$$n_e = 24 \times 16$$

$$\boxed{n_e = 384.}$$

(b) Sachant que la hauteur d'une palette chargée ne dépassera pas 1,20 m au total (palette comprise), combien d'étages de 384 boites d'ampoules peut-on positionner au maximum sur une telle palette ?

Déterminons le nombre x_h d'étages qu'il sera possible de disposer sur une palette.

Puisque la hauteur de la palette est de 14,5 cm et que la hauteur totale ne doit pas excéder 120 cm, nous devons avoir :

$$14{,}5 + x_h \times 7 \leqslant 120$$

ce qui équivaut successivemetn à :

$$\begin{aligned} 14{,}5 + x_h \times 7 - 14{,}5 &\leqslant 120 - 14{,}5 \\ x_h \times 7 &\leqslant 105{,}5 \\ \frac{x_h \times 7}{7} &\leqslant \frac{105{,}5}{7} \text{ car } 7 > 0 \\ x_h &\leqslant \frac{105{,}5}{7} \end{aligned}$$

Or, en tronquant, $\frac{105{,}5}{7} \approx 15{,}07$ donc, x_h étant un nombre entier, $x_h \leqslant 15$.

$$\boxed{\text{Il est possible d'empiler 15 étages au maximum.}}$$

(c) Une palette contient seulement un modèle d'ampoule et coûte 15 €. Quel sera le coût en palettes pour la commande « DUPONT » ?

Déterminons le coût c_P en palettes.

Commençons par chercher le nombre de palettes nécessaire pour chaque type d'ampoules.
Sur une palette il est possible de mettre $384 \times 15 = 5760$ boîtes.

* Modèle A. $19000 = 5760 \times 3 + 1720$. Il faudra 4 palettes.
* Modèle B. $14900 = 5760 \times 2 + 3380$. Il faudra 3 palettes.
* Modèle C. $3094 = 5760 \times 0 + 3094$. Il faudra une palette.

La commande nécessitera $4 + 3 + 1 = 8$ palettes.
Le coût en palettes est donc : $c_P = 8 \times 15$ €.

$$\boxed{c_P = 120 \text{ €}.}$$

3. Quel sera le coût total de l'emballage pour la commande « DUPONT » (boîtes + palettes) ?

Déterminons le coût total c_E d'emballage.

En plus des palettes il faut payer 0,12 € pour chacune des $19000 + 14900 + 3094 = 36994$ boîtes, donc

$$\begin{aligned} c_E &= c_P + 36994 \times 0{,}12 \text{ €} \\ &= 120 \text{ €} + 36994 \times 0{,}12 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_E = 4559{,}28 \text{ €}.}$$

Partie C : coût de fonctionnement.

L'entreprise AMP'OUL emploie treize personnes : 8 pour la chaîne de fabrication, 3 pour l'emballage et l'organisation des livraisons (dont les salaires sont identiques), 2 pour la comptabilité et la gestion (dont les salaires sont identiques).
Les salaires nets suivants, en euros, ont été reçus par les salariés en février 2020 :

Chaîne de fabrication			
1 938,36	1 488,11	1 994,38	2 048,37
2 192,48	1 998,93	1 539,45	1 948,37

Emballage et organisation des livraisons	1 864,37	Comptabilité et gestion	1 593,38

1. Quelle est l'étendue de cette série ?

   Déterminons l'étendue de cette série.

   Ordonnons les salaires :
   $1\,488{,}11 < 1\,539{,}45 < 1\,593{,}38 < 1\,864{,}37 < 1\,938{,}36 < 1\,948{,}37 < 1\,994{,}38 < 1\,998{,}93 < 2\,048{,}37 < 2\,192{,}48$
   Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} e &= max - min \\ &= 2\,192{,}48 - 1\,488{,}11 \end{aligned}$$

$$\boxed{e = 704{,}37 \text{ €}.}$$

2. Déterminer le salaire médian de cette entreprise.

   Déterminons le salaire médian Me.

   * La série ordonnée des $8 + 3 + 2 = 13$ salaires est $1\,488{,}11 < 1\,539{,}45 < 1\,593{,}38 \leqslant 1\,593{,}38 < 1\,864{,}37 \leqslant 1\,864{,}37 \leqslant 1\,864{,}37 < 1\,938{,}36 < 1\,948{,}37 < 1\,994{,}38 < 1\,998{,}93 < 2\,048{,}37 < 2\,192{,}48$.
   * Puisque $\frac{13}{2} = 6{,}5$ la médiane est la septième valeur de la série ordonnée.
   * Nous voyons, dans la série ordonnée, que la septième valeur est $1\,864{,}37$.

$$\boxed{Me = 1\,864{,}37 \text{ €}.}$$

3. Calculer le salaire moyen dans cette entreprise.

   Calculons le salaire moyen, $\overline{x}$, dans l'entreprise.

$$\overline{x} = \frac{1\,488{,}11 + 1\,539{,}45 + 2 \times 1\,593{,}38 + 3 \times 1\,864{,}37 + \cdots + 2\,192{,}48}{13}$$

$$\boxed{\overline{x} = 1\,840{,}64 \text{ €}.}$$

4. Le coût global d'un salarié en février 2020 est donné par la formule suivante pour cette entreprise :

$$\boxed{\text{Coût global d'un salarié} = \frac{\text{salaire net}}{0{,}78} \times 1{,}45.}$$

Quel est le coût global en euros, pour un salarié de l'emballage et de l'organisation des livraisons ?

Déterminons le coût global, c_G, du salarié.

$$\begin{aligned} c_G &= \frac{1\,864{,}37}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &\approx 3\,465{,}816\,0 \text{ en tronquant.} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_G \approx 3\,465{,}82 \text{ €.}}$$

5. On souhaite augmenter de 3 % le salaire net de l'employé gagnant 1488,11 €.

(a) Quel est le salaire net de cet employé après augmentation ?

Déterminons le salaire s' après augmentation.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 3 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{3}{100} \\ &= 1{,}03 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} s' &= 1\,488{,}11 \times CM \\ &= 1\,488{,}11 \times 1{,}03 \\ &= 1\,532{,}753\,3 \end{aligned}$$

$$\boxed{s' \approx 1\,532{,}75 \text{ €.}}$$

(b) Calculer le coût global de ce salaire après augmentation.

Calculons le coût global, $c^{'}$, après augmentation.

$$\begin{aligned} c^{'} &= \frac{s^{'}}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= \frac{1\,532{,}753\,3}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &\approx 2\,849{,}349\,08 \end{aligned}$$

$$\boxed{c^{'} \approx 2\,849{,}35 \text{ €.}}$$

(c) De quel pourcentage le coût global a-t-il augmenté ?

Calculons le taux d'évolution, t_c, du coût.

Notons c le coût global avant augmentation.

$$\begin{aligned} c^{'} &= \frac{s^{'}}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= \frac{CM \times s}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= CM \times \frac{s}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= CM \times c \end{aligned}$$

Donc le coût global a augment de 3 %.

Voici une autre rédaction plus élémentaire.

$$\begin{aligned} c &= \frac{s}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &= \frac{1\,488{,}11}{0{,}78} \times 1{,}45 \\ &\approx 2766{,}36 \end{aligned}$$

D'où le taux d'évolution :

$$\begin{aligned} t_c &= \frac{c^{'} - c}{c} \times 100 \\ &\approx \frac{2849{,}35 - 2766{,}36}{2766{,}36} \times 100 \\ &\approx 2{,}9999 \end{aligned}$$

Le coût global a augmenté de 3 %.

Partie D : transport et livraison.

L'entreprise AMP'OUL travaille avec deux sociétés de livraison, qui lui proposent des tarifs adaptés à ses besoins.

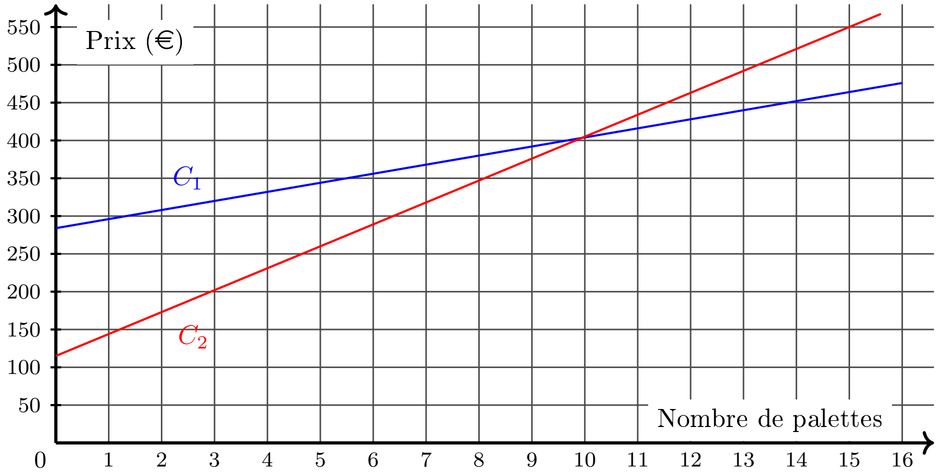
Société	Tarif par palette (€)	Frais de gestion (€)
Société A	12	284
Société B	29	115

On définit les fonctions f et g par les expressions algébriques suivantes :

- $f(x) = 12x + 284$,
- $g(x) = 29x + 115$.

Ainsi, si x désigne un nombre de palettes alors $f(x)$ et $g(x)$ désignent respectivement le prix à payer pour la livraison de ces x palettes par les sociétés A et B.

On a tracé les courbes correspondant à f et g dans le repère ci-dessous.



1. Répondre, en vous aidant du graphique, aux questions suivantes :

   (a) Identifier la courbe qui correspond à chaque fonction.

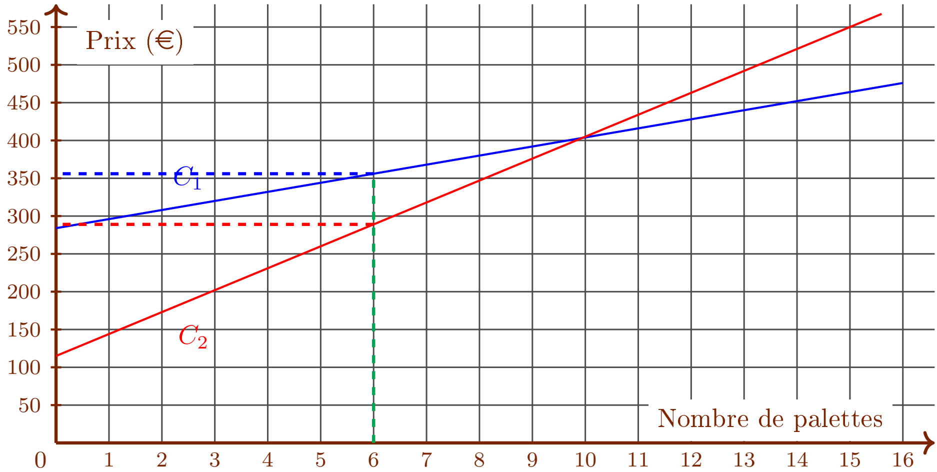
   Identifions les fonctions.

   Il s'agit de deux fonctions affines. Nous pourrions les identifier avec leur coefficient directeur ou leur ordonnée à l'origine. Nous allons utiliser l'ordonnée à l'origine.

   $f(0) = 12 \times 0 + 284 = 284$ et $g(0) = 29 \times 0 + 115 = 115$ donc la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(0; 284)$ et la courbe représentative de g passe par le point de coordonnées $(0; 115)$.

   C_1 est la courbe représentative de f et C_2 celle de g.

   (b) Quelle société de livraison sera la plus économique pour une commande de 6 palettes ?



La société B est la plus économique pour 6 palettes.

(c) Pour une commande donnée, quelle société de livraison sera la plus économique en fonction du nombre de palettes ?

Pour une commande d'un maximum de 9 palettes la société B est la plus économique sinon c'est la A.

2. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Utiliser cette résolution pour affiner la réponse à la question 1.(c).

Résolvons l'équation $f(x) = g(x)$.

Soit $x \in [0; +\infty[$.

$$f(x) = g(x)$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
12x + 284 &= 29x + 115\\
12x + 284 - 29x &= 29x + 115 - 29x\\
-17x + 284 &= 115\\
-17x + 284 - 284 &= 115 - 284\\
-17x &= -169\\
\frac{-17x}{-17} &= \frac{-169}{-17}\\
x &= \frac{169}{17}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$x \approx 9{,}941$$

Pour une commande d'un maximum de 9 palettes la société B est la plus économique sinon c'est la A.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

Rémi joue avec un dé truqué. Il sait qu'il a la même probabilité d'obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5. Il sait également que la probabilité d'obtenir 6 est de $\frac{1}{2}$.

Rémi lance le dé.

1. Quelle est la probabilité qu'il obtienne 3 ?

   Calculons $\mathbb{P}(3)$.

   Les issues 1, 2, 3, 4 et 5 ont toutes la même probabilité d'être réalisée que nous noterons p.
   Par définition d'une probabilité (sur un univers fini) la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1 donc :

$$5 \times p + \frac{1}{2} = 1$$

ce qui équivaut succcessivement à :

$$\begin{aligned}
5p+\frac{1}{2}-\frac{1}{2} &= 1-\frac{1}{2}\\
5p &= \frac{1}{2}\\
\frac{5p}{5} &= \frac{\frac{1}{2}}{5}\\
p &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\\
p &= \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(3) = 0{,}1.}$$

2. Quelle la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

L'univers est ici $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
D'après la question précédente, la loi de probabilité sur cet univers peut être résume par le tableau :

ω	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\omega)$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5

Il n'y a pas équiprobabilité entre les issues dans cette modélisation. Nous ne pourrons donc pas utiliser les méthodes de dénombrement.

Notons A l'événement « obtenir un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$A = \{2;4;6\}$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(2)+\mathbb{P}(4)+\mathbb{P}(6)\\
&= 0{,}1+0{,}1+0{,}5
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 0{,}7.}$$

3. Rémi souhaite obtenir un résultat strictement supérieur à 4. A-t-il intérêt à utiliser son dé truqué ou un dé équilibré ? Justifier.

   Notons B l'événement « obtenir un nombre strictement supérieur à 4.

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

   $B = \{5; 6\}$.
   Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(6)\\ &= 0{,}1 + 0{,}5\\ &= 0{,}6\end{aligned}$$

   Avec un dé parfaitement équilibré (et donc avec la loi d'équiprobabilité $\mathbb{P}'$) B étant réalisé par 2 issues sur un total de 6 la probabilité de B serait :

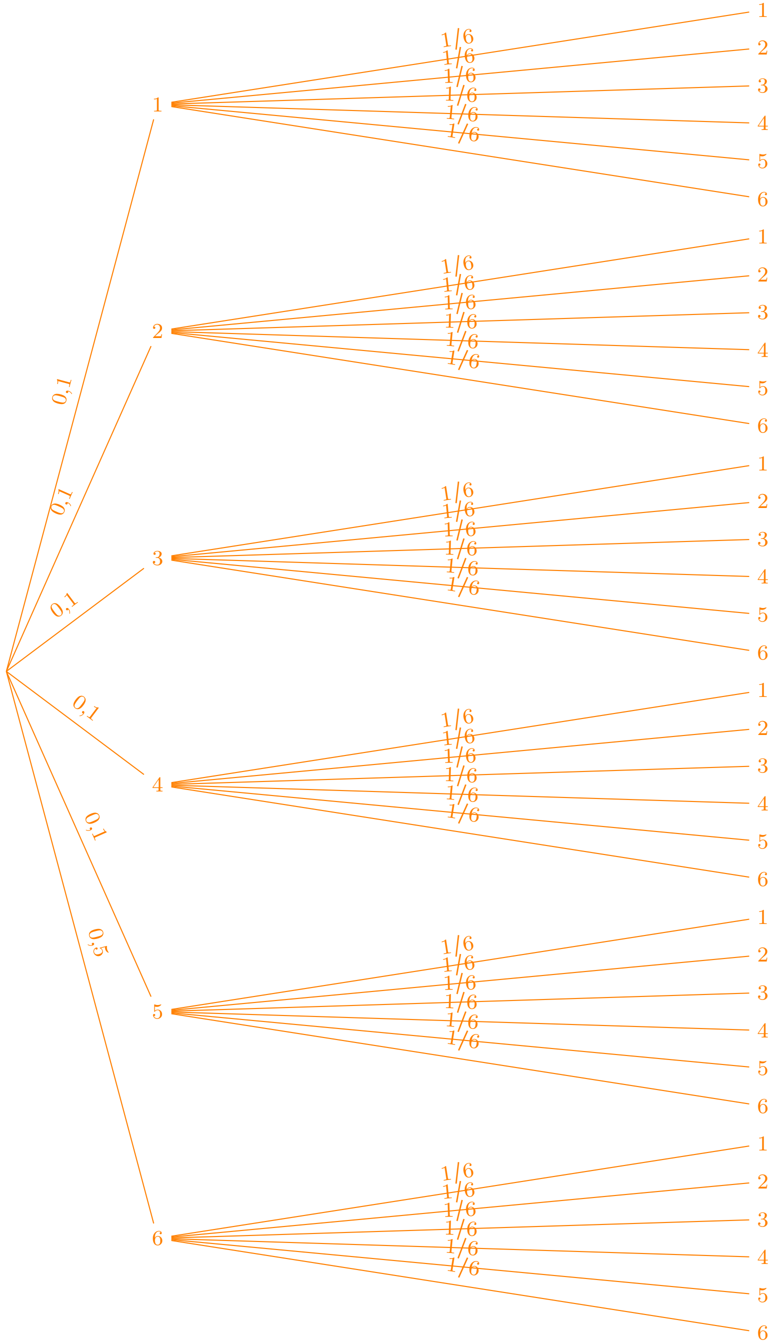
$$\begin{aligned}\mathbb{P}'(B) &= \frac{2}{6}\\ &= \frac{1}{3}\\ &= 0{,}333\ldots\end{aligned}$$

   > Pour obtenir un résultat strictement supérieur à 4 il a intérêt à utiliser son dé truqué.

4. Rémi doit lancer son dé truqué et un dé équilibré. Le résultat obtenu sera la somme des résultats obtenus sur chaque dé.

   (a) Quelle est la probabilité qu'il obtienne 12 ?

   La façon la plus simple de raisonner est de dessiner un arbre pondéré mais l'arbre étant très grand je me suis contenté de faire les calculs. Par acquis de conscience voici à quoi ressemblerait l'arbre.


0,1
0,1
0,1
0,1
0,1
0,5
1
2
3
4
5
6
1/6
1
2
3
4
5
6

Avec un petit effort d'imagination l'arbre est inutile.

Les deux lancers sont indépendants (d'après le contexte) donc on peut considérer que les lancers sont successifs : on lance d'abord le dé truqué et ensuite le dé équilibré.
L'univers est donc formé de couples dont la première valeur est le résultat du lancer du dé truqué (avec la loi de probabilité $\mathbb{P}$ vue plus haut) et la seconde valeur est le résultat du lancer du dé équilibré (avec la loi de probabilité $\mathbb{P}'$ qui est l'équiprobabilité. Munissons cet ensemble de couples de la loi de probabilité $\mathbb{P}''$ induite par les lois $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$.

Calculons $\mathbb{P}''(6{,}6)$.

$\mathbb{P}(6) = 0{,}5 >$ donc, d'après la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}''(6{,}6) = \mathbb{P}'_6(6) \times \mathbb{P}(6)$$

Et puisque les lancers sont indépendants :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}''(6{,}6) &= \mathbb{P}'(6) \times \mathbb{P}(6)\\ &= 0{,}5 \times \frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir 12 est $\frac{1}{12}$.

(b) Quelle est la probabilité qu'il obtienne 10 ?

Reprenons la modélisation précédente.
Notons X la variable aléatoire qui a chaque couple associe la somme des valeurs.

Calculons $\mathbb{P}''(X = 10)$.

$\{X = 10\} = \{(6{,}4),(5{,}5),(4{,}6)\}$.
Donc :

$$\mathbb{P}''(X = 10) = \mathbb{P}''(6{,}4) + \mathbb{P}''(5{,}5) + \mathbb{P}''(4{,}6)$$

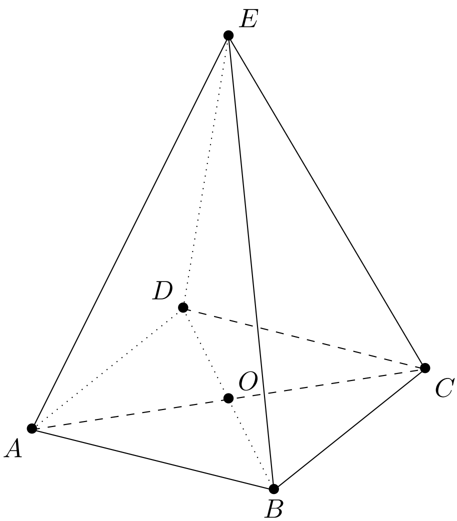
Puis en procédant comme à la question précédente :

$$\mathbb{P}''(X = 10) = 0{,}5 \times \frac{1}{6} + 0{,}1 \times \frac{1}{6} + 0{,}1 \times \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{P}''(X = 10) = \tfrac{7}{60}.}$$

Exercice 2.

$ABCDE$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ telle que $EO = AC$, O étant l'intersection des deux diagonales du carré $ABCD$.



La longueur des côtés du carré $ABCD$ est de 4 cm.

1. Déterminer la valeur exacte de EO.

   Puisque $EO = AC = 2AO$ il suffit de

   calculons AO.

   Puisque AOB est rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

Comme de plus AOB est isocèle en O :

$$2AO^2 = AB^2$$

nous en déduisons successivement à :

$$\begin{aligned} 2AO^2 &= 4^2 \\ \frac{2AO^2}{2} &= \frac{16}{2} \\ AO^2 &= 8 \end{aligned}$$

Et puisque AO est une longueur donc un nombre positif :

$$\begin{aligned} AO &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{EO = 4\sqrt{2}}$$

2. Calculer la valeur exacte de la longueur AE. En déduire que son arrondi au millimètre est de 6,3 cm.

Calculons AE.

Puisque AOE est rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$$AE^2 = AO^2 + OE^2$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} AE^2 &= \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 40 \end{aligned}$$

AE étant une longueur c'est un nombre positif :

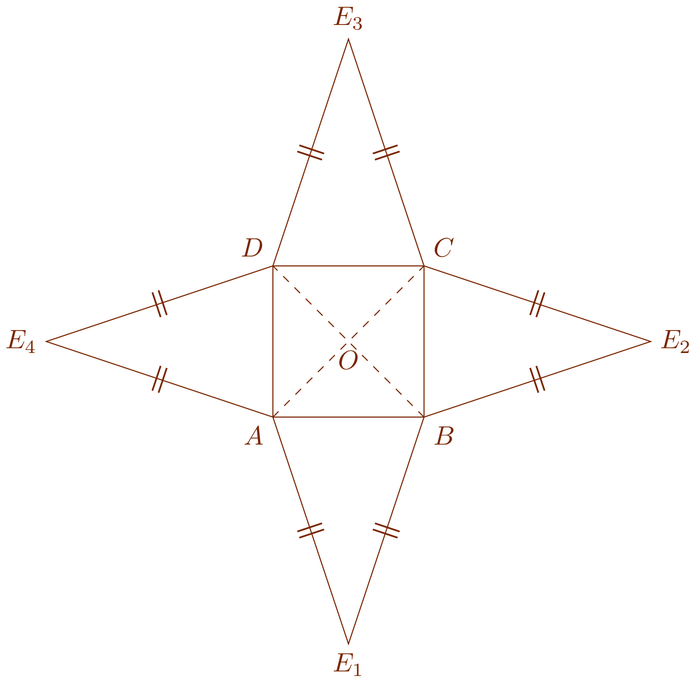
$$AE = \sqrt{40}$$

$$\boxed{AE = 2\sqrt{10} \text{ cm.}}$$

$AE \approx 6{,}3$ cm.

3. Tracer un patron de la pyramide $ABCDE$ en vraie grandeur.

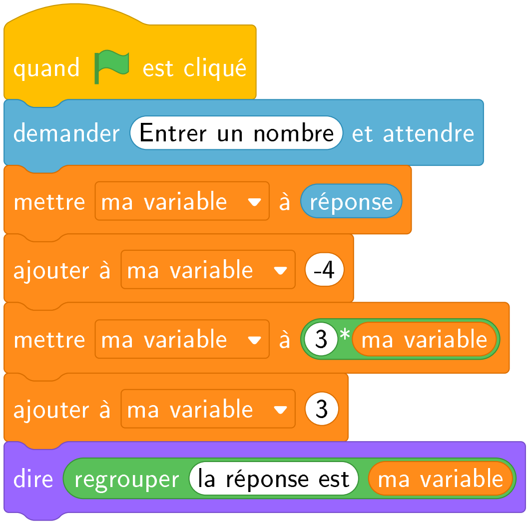
   Ici à l'échelle 1/2.



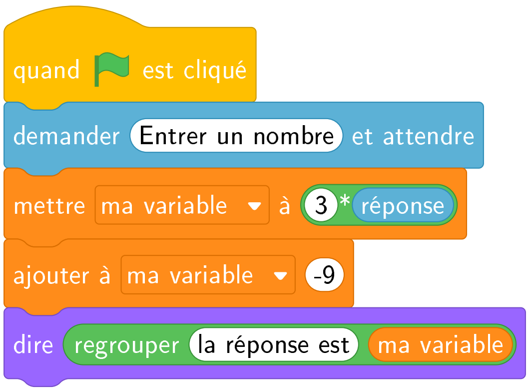
Exercices 3.

Voici deux programmes de calcul écrits avec le logiciel Scratch :

Programme A



Programme B



Dans les deux programmes, le nombre entré par l'utilisateur est stocké dans la variable « réponse ».

1. On entre différents nombres dans les deux programmes.

   (a) Avec le programme A, montrer que si on entre le nombre 5, on obtient 6.

Considérons le tableau d'état des variables du programme.

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5
mettre ma variable à réponse	5	5
ajouter à ma variable -4	$5+(-4)=1$	5
mettre ma variable à 3 * ma variable	$3\times 1=3$	5
ajouter à ma variable 3	$3+3=6$	5

Et comme le programme renvoie le contenu de ma variable :

si on entre 5 alors le programme A renvoie 6.

(b) Quel est le nombre obtenu si on entre le nombre 5 avec le programme B ?

Considérons le tableau d'état des variables du programme.

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5
mettre ma variable à 3 * réponse	$3\times 5=15$	5
ajouter à ma variable -9	$15-9=6$	5

Et comme le programme renvoie le contenu de ma variable :

si on entre 5 alors le programme B renvoie 6.

(c) Calculer le nombre obtenu avec les programmes A et B si on entre le nombre 5,2.

Considérons le tableau d'état des variables du programme A :

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5,2
mettre ma variable à réponse	5,2	5,2
ajouter à ma variable -4	$5{,}2 + (-4) = 1{,}2$	5,2
mettre ma variable à 3 * ma variable	$3 \times 1{,}2 = 3{,}6$	5,2
ajouter à ma variable 3	$3{,}6 + 3 = 6{,}6$	5,2

Puis celui du programme B :

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		5,2
mettre ma variable à 3 * réponse	$3 \times 5{,}2 = 15{,}6$	5,2
ajouter à ma variable -9	$15{,}6 - 9 = 6{,}6$	5,2

Finalement

si on entre 5,2 alors les deux programmes A et B renvoient 6,6.

(d) Quelle conjecture pouvez-vous émettre ? Valider ou rejeter votre conjecture par une démonstration.

Les questions précédentes nous incitent à conjecturer :

il semble que les deux programmes renvoient le même résultat.

Cette conjecture est émise à partir de deux exemples seulement et des exemples qui n'ont peut être pas été choisis au hasard par les créateurs du sujet. Essayons une autre valeur comme 0. Nous voyons que les deux programmes renvoient 0. Le résultat semble général démontrons-le.

Démontrons que les deux programmes renvoient le même résultat.

Si le nombre choisi est x alors pour le programme A :

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		x
mettre ma variable à réponse	x	x
ajouter à ma variable -4	$x+(-4)=x-4$	x
mettre ma variable à 3 * ma variable	$3\times(x-4)$	x
ajouter à ma variable 3	$3(x-4)+3$	x

et pour le programme B :

	ma variable	réponse
demander Entrer un nombre et attendre		x
mettre ma variable à 3 * réponse	$3\times x$	x
ajouter à ma variable -9	$3x-9$	x

Ainsi le programme A renvoie le nombre $A=3(x-4)-9$ et le B renvoie le nombre $B=3x-9$.

Démontrons que les nombres A et B sont égaux.

Pour montrer que ces deux expressions sont égales il faut les exprimer sous forme développée et réduite. Comme B est déjà développé partons de A.

$$\begin{aligned}A &= 3(x-4)+3\\ &= 3\times x-3\times 4+3\\ &= 3x-12+3\\ &= 3x-9\end{aligned}$$

Ainsi $A=B$.

> Nous avons démontré que les programme renvient le même résultat.

2. Quel nombre faut-il entrer avec le programme B pour obtenir la réponse 14 ?

Déterminons la valeur x a choisir pour que le programme B (par exemple) renvoie 14.

Nous souhaitons donc que x, le nombre de départ, vérifie :

$$3x - 9 = 14$$

C'est une équation linéaire il faut donc la résoudre en isolant l'inconnue x. Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 3x - 9 + 9 &= 14 + 9 \\ 3x &= 23 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{23}{3} \\ x &= \frac{23}{3} \end{aligned}$$

Il faut entrer $\frac{23}{3}$ pour que le programme renvoie 14.

3. Montrer que le résultat obtenu avec le programme B est divisible par 3 quel que soit le nombre entier entré dans le programme.

Pour démontrer un résultat général sur le résultat du programme il faut utiliser une expression générale du résultat du programme : $3x - 9$.
Le résultat sera divisible s'il peut s'écrire $3\times?$ ($?$ désignant un nombre entier).
Il faut donc que nous trouvions $3x - 9 = 3\times?$.

Démontrons que le résultat est divisible par trois.

Soit x un entier.
Nous allons factoriser en utilisant la distributivité.

$$\begin{aligned} 3x - 9 &= 3\times x - 3\times 3 \\ &= 3\times(x - 3) \end{aligned}$$

x étant un entier $x - 3$ est aussi un entier et nous pouvons conclure :

Si le nombre entré dans le programme est un entier le résultat est un multiple de 3.

III Troisième partie (14 points).

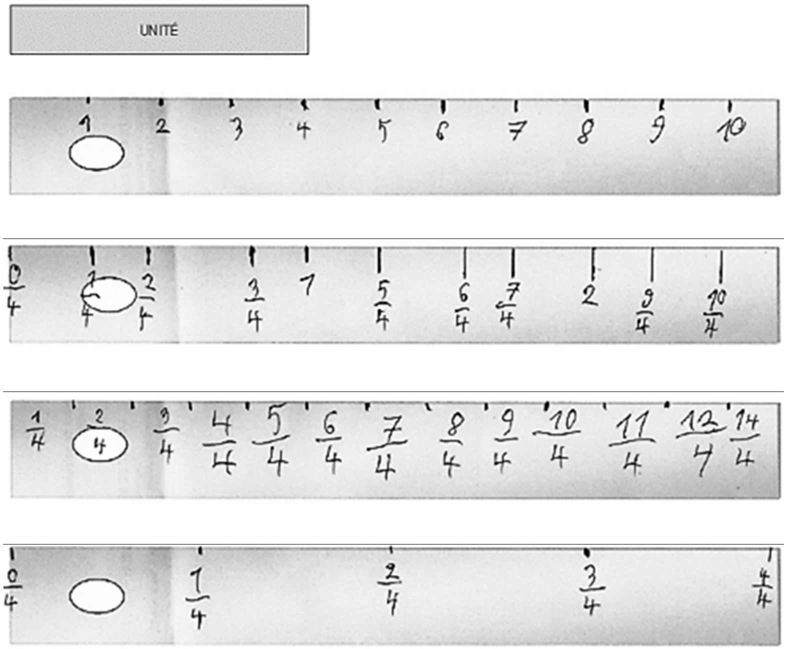
Cette partie est composée de quatre situations indépendantes.

Situation 1.

Un enseignant propose, en cycle 3, une activité consistant à fabriquer une règle graduée en quarts d'unité à partir d'une bande unité.

Chaque élève reçoit une bande unité manipulable et une bande vierge, tirées du livre *Construire les nouveaux nombres au cycle 3* CANOPÉ/IREM LYON, 2018.

Voici les réponses de quatre élèves.



A

B

C

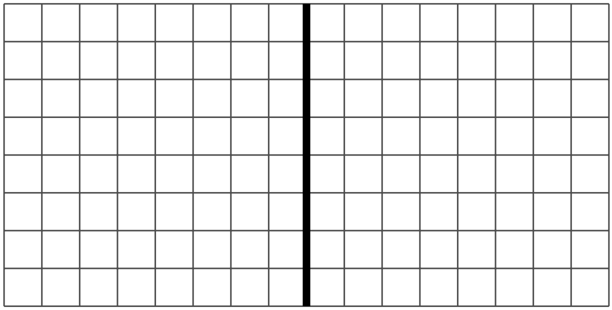
D

1. Analyser les réponses proposées par les élèves en cherchant à expliciter leurs réussites et leurs erreurs.

2. Citer deux critères qui peuvent être présentés aux élèves pour construire correctement une règle graduée en quarts à l'aide de la bande unité.

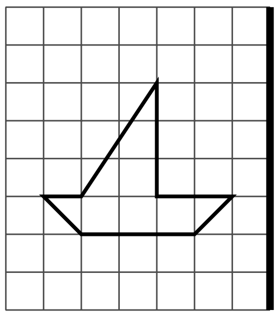
Situation 2.

Un enseignant distribue la fiche ci-dessous à chacun de ses élèves de CM2.



Puis, il leur distribue l'exercice suivant :

Reproduis et complète la figure par symétrie.

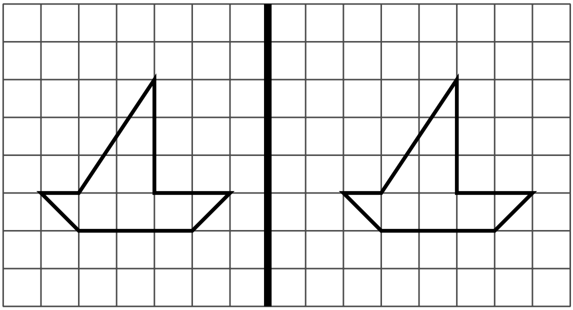


1. Citer deux prérequis nécessaires pour réaliser cet exercice.

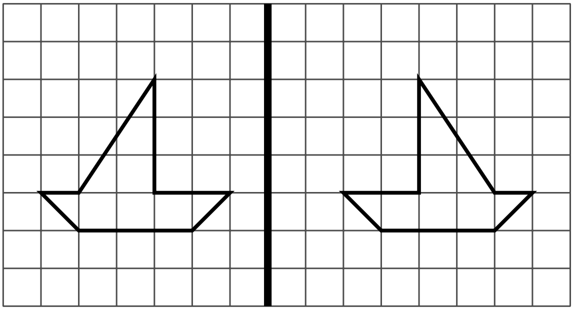
2. Identifier une variable didactique dans le choix de la forme proposée (le « bateau ») par l'enseignant.

3. On a reproduit, ci-dessous, les travaux de plusieurs élèves. Analyser ces productions en identifiant les réussites et en émettant des hypothèses sur les erreurs.

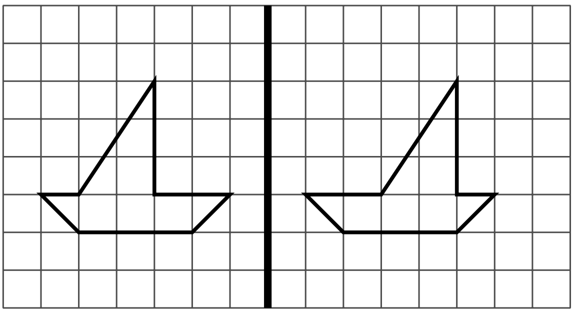
Farid.



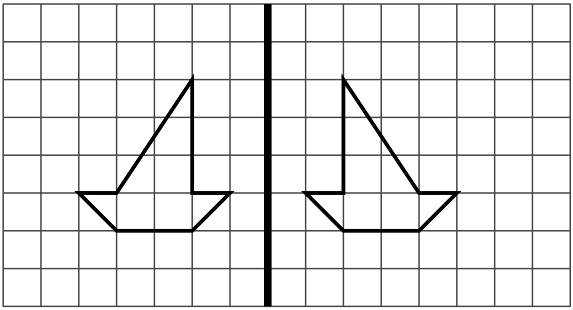
Lise.



Louanne.



Baptiste.

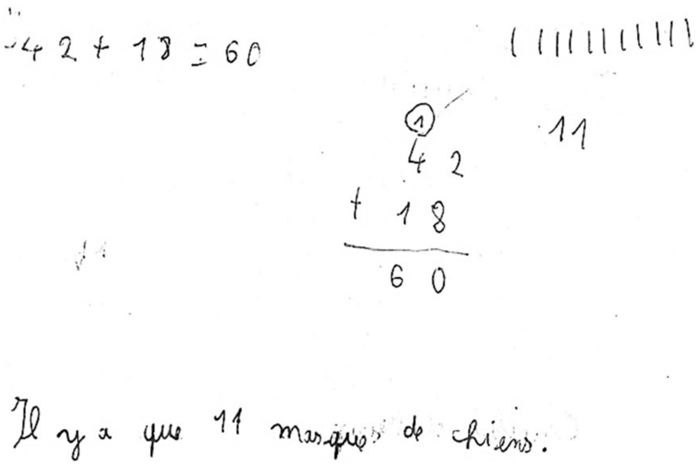


Situation 3.

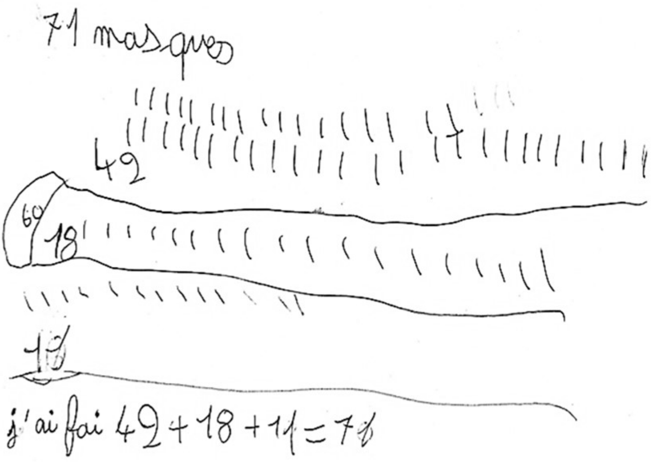
Une enseignante propose la situation suivante en cycle 2 : « *Pour le carnaval, la directrice d'école a acheté* 71 *masques. Il y a* 42 *masques de souris,* 18 *masques de chats et des masques de chiens. Combien y a-t-il de masques de chiens ?* »

Les productions de 4 élèves sont reproduites ci-dessous.

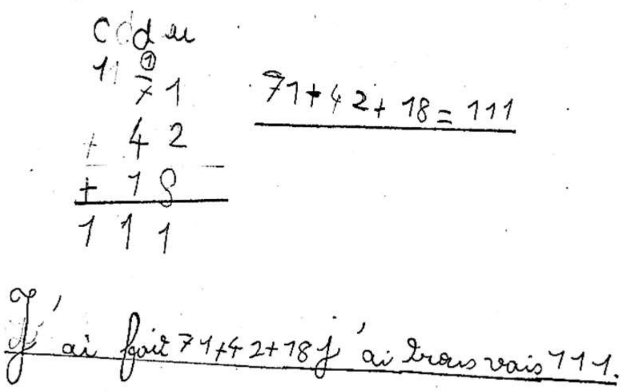
Élève A



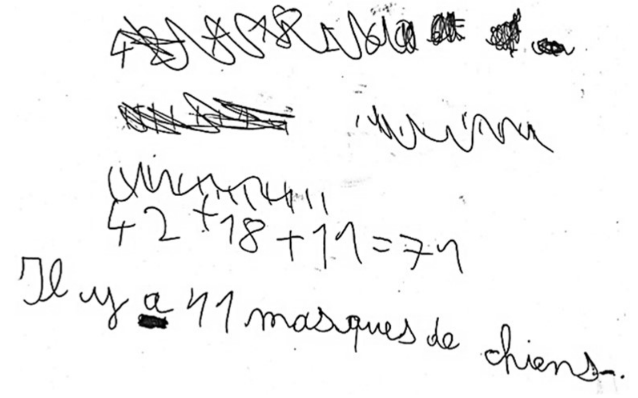
Élève B



Élève C



Élève D



1. En s'appuyant sur l'extrait de la note de service proposé ci-dessous, analyser les propositions d'élèves en termes de réussites et d'échecs pour chacune des compétences « modéliser » et « calculer ».

   Extrait de la note de service n°2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ».

   > **« Modéliser » et « Calculer » sont deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes à l'école élémentaire** qui doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :
   > — difficultés à « modéliser » : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;
   > — difficultés à « calculer » : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calculs utilisés.

2. Voici un autre extrait de la note de service n°2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ». Proposer une représentation que l'on peut envisager pour aider les élèves à modéliser ce problème.

> « La formalisation de ces exemples-types doit être l'occasion **d'introduire des représentations**, sous forme de schémas bien adaptés, permettant **la modélisation** des problèmes proposés. Ces représentations sont systématiquement utilisées lors des résolutions de problèmes menées face à la classe, afin de servir de référence aux élèves. Elles ne sont bien sûr jamais rendues obligatoires (en particulier pour les élèves en réussite qui n'en ont pas besoin), mais doivent servir de point d'appui, lors des séances d'enseignement, avec les élèves rencontrant des difficultés lors de la résolution d'un problème. »

3. En proposant le second problème ci-dessous, quelles erreurs risqueraient de ne pas être détectées ?
   « Pour le carnaval, la directrice d'école a acheté 42 masques de souris et 18 masques de chiens. Combien la directrice achète-t-elle de masques au total ? »

4. Proposer deux pistes de remédiation qui pourraient être mises en œuvre pour l'élève C. Expliciter la démarche envisagée.

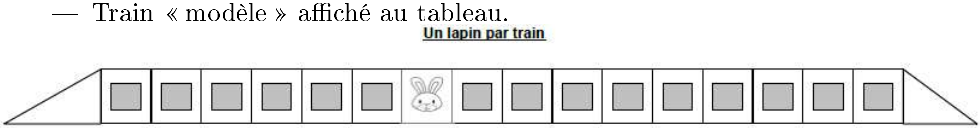
Situation 4.

Voici une situation proposée en moyenne section : le train des lapins.
Consigne donnée aux élèves :

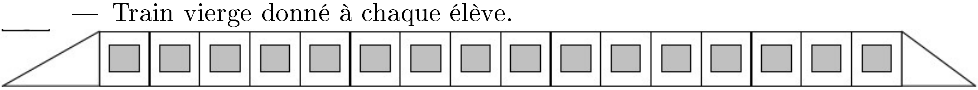
Regardez bien où est placé le lapin dans le « train modèle » situé sur le tableau.
Vous allez devoir placer un lapin dans le même wagon sur votre train.
Vous pouvez revenir voir le « train modèle » si vous le voulez.
Ensuite on vérifiera votre réponse en amenant votre train sous le « train modèle ».

Matériel disponible :

— Train « modèle » affiché au tableau.



— Train vierge donné à chaque élève.



— Lapins à découper.

1. Quel aspect du nombre est travaillé dans cet exercice ?

2. Donner deux prérequis pour qu'un élève puisse réussir la tâche.

3. Proposer deux variations pour simplifier cette situation.

4. Proposer deux variations pour complexifier cette situation.

Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 2.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Romain et Aya souhaitent étudier quelques caractéristiques d'un terrain de rugby.

Partie A.

La zone de jeu est un rectangle d'une longueur de 100 m et d'une largeur de 68 m.

1. Calculer l'aire de la zone de jeu.

   Calculons l'aire $\mathscr{A}_{terrain}$ du terrain.

   Puisque le terrain est rectangulaire :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{terrain} &= 100 \text{ m} \times 68 \text{ m}\\ &= 100 \times 68 \text{ m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_{terrain} = 6\,800 \text{ m}^2.}$$

2. Calculer la longueur de la diagonale de la zone de jeu. Donner la valeur exacte et vérifier qu'elle mesure environ 121 m.

   Déterminons la longueur de la diagonale du terrain.

   Notons $ABCD$ le rectangle formé par le terrain.
   Le triangle ABD est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore, nous avons

   $$AB^2 + AD^2 = BD^2.$$

   Nous en déduisons successivement

   $$\begin{aligned} BD^2 &= 100^2 + 68^2 \\ &= 14624 \end{aligned}$$

   BD étant une longueur c'est un nombre positif donc :

   $$BD = \sqrt{14624}$$

   Donc

   $$BD = 4\sqrt{914} \text{ m}$$
   $$BD \approx 121 \text{ m}.$$

3. Aya parcourt la diagonale de la zone de jeu en 18 secondes. Calculer sa vitesse moyenne en m/s, donner l'arrondi au centième.

   Déterminons la vitesse moyenne v.

   $$\begin{aligned} v &\approx \frac{121 \text{ m}}{18 \text{ s}} \\ &\approx \frac{121}{18} \text{ m/s} \\ &\approx 6{,}722 \text{ m/s} \end{aligned}$$

   $$v \approx 6{,}72 \text{ m/s}.$$

4. Court-elle à une vitesse moyenne supérieure à 30 km/h ? Justifier.

Convertissons la vitesse en km/h.

$$\begin{aligned}
v &\approx 6{,}72\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
&\approx 6{,}72\ \frac{\frac{1}{1000}\ \text{m}}{\frac{1}{3600}\ \text{h}} \\
&\approx 6{,}72 \times \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{3600}}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \\
&\approx 6{,}72 \times \frac{3600}{1000}\ \text{km/h} \\
&\approx 24{,}192\ \text{km/h}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Elle ne court pas à plus de 30 km/h.}}$

5. La championne Elaine Thompson parcourt 100 m en 10,93 s.
En courant avec la même vitesse moyenne, combien de temps, en seconde, aurait mis Elaine Thompson pour parcourir la même diagonale ? Arrondir au dixième.

Déterminons le temps $t_{Thompson}$ que mettrait la championne pour parcourir la diagonale.

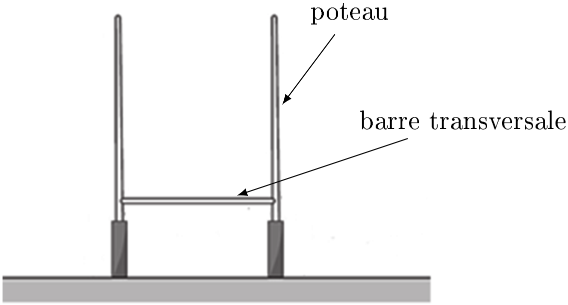
Puisque la diagonale mesure 121 m et que la vitesse de la championne est $\frac{100\ \text{m}}{10{,}93\ \text{s}}$ nous en déduisons

$$\begin{aligned}
t_{Thompson} &= \frac{121\ \text{m}}{\frac{100\ \text{m}}{10{,}93\ \text{s}}} \\
&= \frac{\frac{121\ \text{m}}{1}}{\frac{100\ \text{m}}{10{,}93\ \text{s}}} \\
&= \frac{121\ \text{m}}{1} \times \frac{10{,}93\ \text{s}}{100\ \text{m}} \\
&= \frac{121\ \text{m} \times 10{,}93\ \text{s}}{1 \times 100\ \text{m}} \\
&= \frac{121 \times 10{,}93}{100}\ \text{s} \\
&= 13{,}2253
\end{aligned}$$

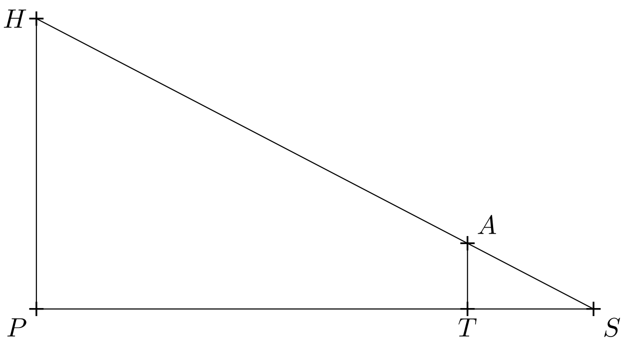
La diagonale aurait parcourue en 13,2 s.

Partie B.

Aya souhaiterait connaître la hauteur des poteaux de but représentés ci-dessous.



Pour ce faire, elle se place en un point T, de telle sorte que l'extrémité S de son ombre $[TS]$ coïncide avec celle de l'ombre $[PS]$ d'un des poteaux. Elle trace le schéma ci-dessous à main levée.



- Aya, représentée par le segment $[AT]$, mesure 1,74 m ; on a $AT = 1{,}74$ m.
- Aya est placée à 9,51 m du poteau représenté par le segment $[PH]$; on a $PT = 9{,}51$ m.
- L'ombre d'Aya mesure 2,78 m ; on a $TS = 2{,}78$ m.
- L'ombre du poteau est représentée par le segment $[PS]$.
- On considère que les poteaux et Aya sont orthogonaux au sol.

Déterminer la hauteur HP du poteau. Arrondir le résultat au dixième de mètre.

Calculons PH.

- Configuration de Thalès. S, T et P d'une part, S, A et H d'autre part sont alignés dans le même ordre.
- Hypothèse pour la forme directe du théorème. Puisque $(PH) \perp (PS)$ et $(TA) \perp (PS)$ nous en déduisons $(PH) \parallel (TA)$.

Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{AT}{HP} = \frac{TS}{PS}.$$

Nous en déduisons successivement (toutes les longueurs étant exprimées en mètres) :

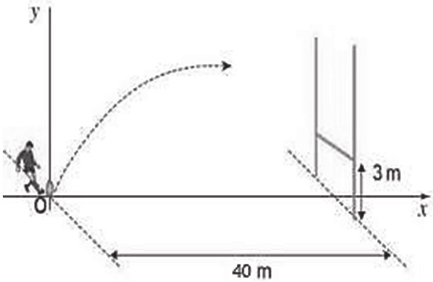
$$\begin{aligned}
\frac{1{,}74}{HP} &= \frac{2{,}78}{PT + TS}\\
\frac{1{,}74}{HP} &= \frac{2{,}78}{9{,}51 + 2{,}78}\\
\frac{1{,}74}{HP}\times HP &= \frac{2{,}78}{9{,}51 + 2{,}78}\times HP\\
1{,}74 &= \frac{2{,}78}{9{,}51 + 2{,}78} \times HP\\
\frac{12{,}29}{2{,}78}\times 1{,}74 &= \frac{12{,}29}{2{,}78}\times\frac{2{,}78}{12{,}29} \times HP\\
\frac{12{,}29}{2{,}78} \times 1{,}74 &= HP
\end{aligned}$$

$$\boxed{HP \approx 7{,}7 \text{ m.}}$$

Partie C.

Romain veut frapper du pied dans le ballon pour le faire passer au-dessus de la barre transversale et entre les poteaux de but. On suppose que le ballon se déplace dans un plan orthogonal au plan du but.

1.

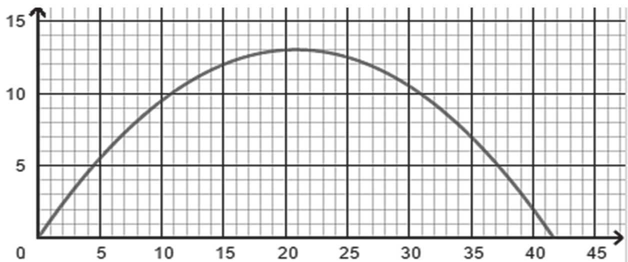


Au moment du coup de pied, le ballon se trouve au sol, au point O, face aux poteaux à une distance de 40 m de la ligne de but.

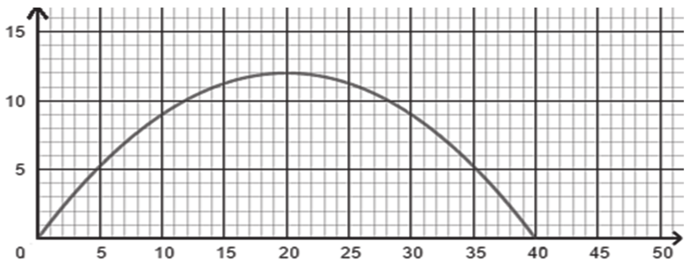
Romain tape trois coups de pied différents illustrés par les trajectoires de ballon données ci-dessous.

Le ballon se déplace dans un plan orthogonal au plan des buts.

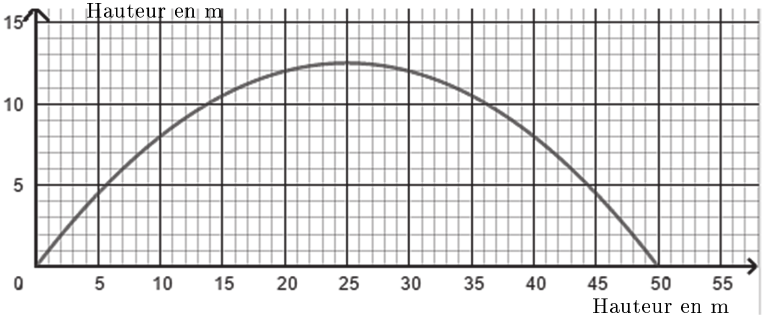
Coup de pied A.



Coup de pied B.



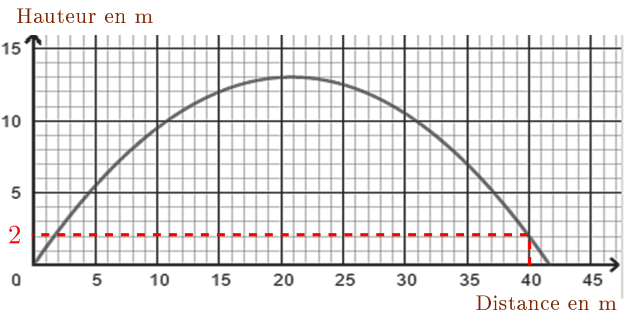
Coup de pied C.



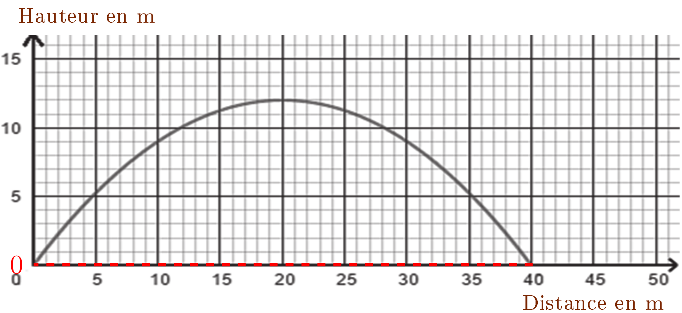
Quel(s) coup(s) de pied permet(tent) à Romain de faire passer le ballon au-dessus de la barre transversale ? Justifier.

Pour que le ballon passe au-dessus de la barre transversale il faut qu'il soit à plus de 3 m de haut lorsqu'il a parcouru 40 m au sol.

Coup de pied A.

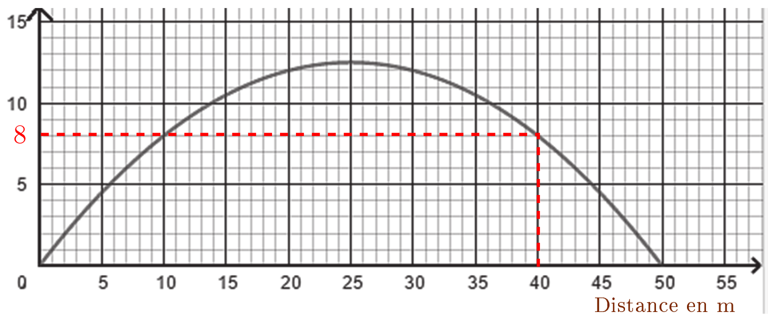


Coup de pied B.



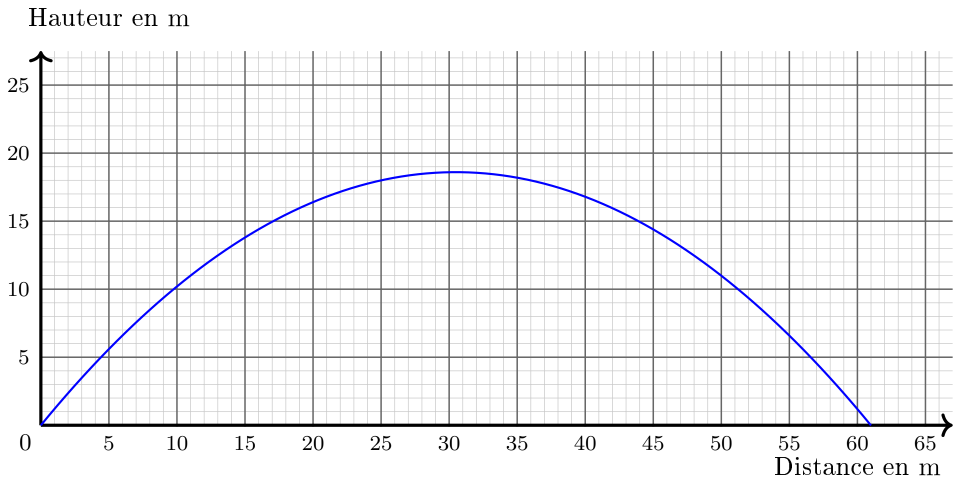
Coup de pied C.

Hauteur en m



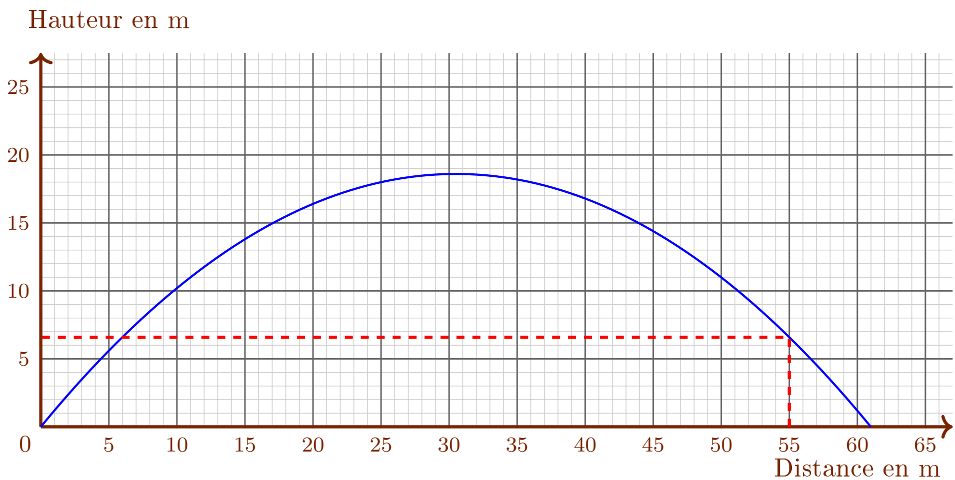
Seul le coup de pied C permet de faire passer le ballon au-dessus de la barre transversale.

2. Romain se trouve maintenant à une distance de 55 m face au but. Il tente un coup de pied illustré par la trajectoire de ballon donnée ci-dessous.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique :

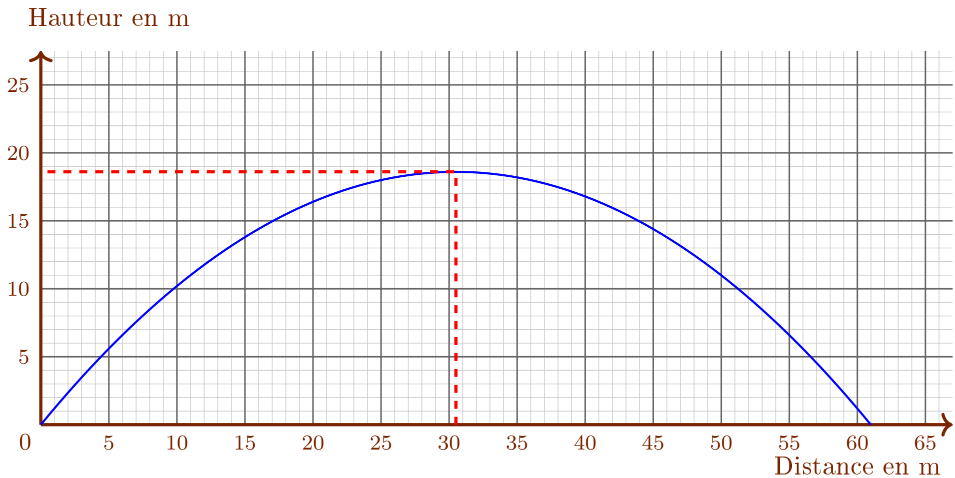
(a) Romain a-t-il réussi à faire passer le ballon au-dessus de la barre transversale ? Justifier.



Le ballon franchit la ligne de la barre transversale à plus de 6 m donc très au-delà des 3 m de hauteur de la barre transversale.

Il a réussi à faire passer le ballon au-dessus de la barre transversale.

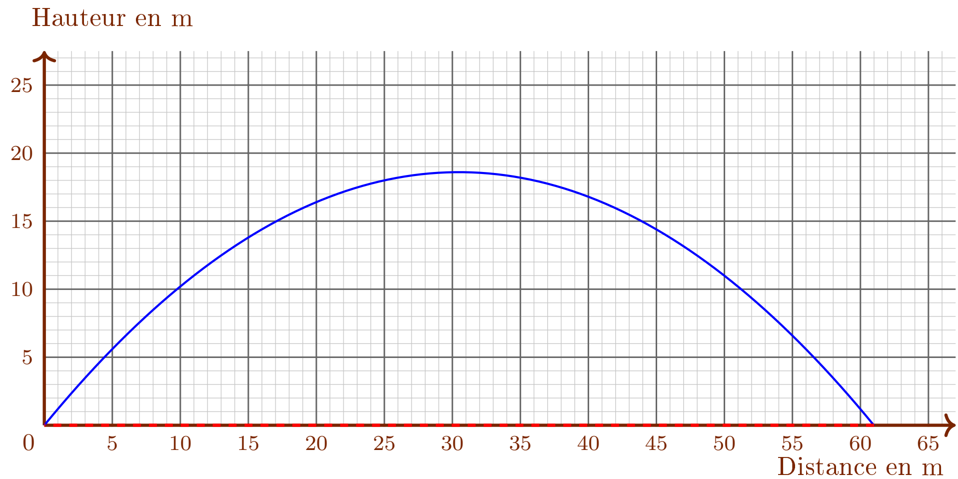
(b) À quelle hauteur maximale le ballon s'est-il élevé ?



Le ballon a atteint une hauteur maximale de 18,5 m.

(c) À quelle distance, derrière la ligne de but, le ballon est-il retombé à terre ? Justifier.

Dire que le ballon retombera au sol c'est dire que sa hauteur sera de 0 m.



Le ballon est retombé à 61 m du lanceur or la ligne de but est à 55 m du lanceur donc

le ballon est retombé 6 m derrière la ligne de but.

Pour la suite du problème, on admet que le ballon suit la trajectoire donnée par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}22x$ représente la hauteur du ballon en mètre pour une longueur au sol x en mètre.

3. Romain étudie cette fonction f grâce à une feuille de calcul d'un tableur ; voici un extrait du travail obtenu :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	1	4	12	20	25	38	40	45	55
2	$f(x)$	1,2	4,56	11,76	16,4		17,48	16,8	14,4	6,6

(a) Quelle formule a-t-il entrée dans la cellule B2 puis étirée pour compléter ce tableau ?

La formule de calcul entrée en B2 est :

$= -0{,}02 * \mathtt{B1} \wedge 2 + 1{,}22 * \mathtt{B1}.$

(b) Quelle valeur devrait-il obtenir dans la cellule F2 ? Justifier.

Déterminons le contenu de F2.

$$\begin{aligned} f(25) &= -0{,}02 \times 25^2 + 1{,}22 \times 25 \\ &= 18 \end{aligned}$$

La valeur affichée en F2 devrait être 18.

(c) Quelle cellule permet de confirmer que le ballon est bien passé au-dessus de la barre transversale ? Justifier.

La cellule H2 permet de confirmer que le ballon passe au-dessus de la barre transversale.

4. Utiliser l'expression algébrique de la fonction f pour déterminer à quelle distance derrière la ligne de but le ballon est retombé à terre.

Le ballon retombera lorsque sa hauteur sera de 0 m. Autrement dit lorsque $f(x) = 0$.

Résolvons (E) : $-0{,}02x^2 + 1{,}22 = 0$.

Il s'agit de résoudre une équation qui n'est pas linéaire. A priori la première chose à tenter est de se ramener à une équation produit-nul et donc éventuellement factoriser.

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow -0{,}02x^2 + 1{,}2xx = 0 \\ &\Leftrightarrow -0{,}02x \times x + 1{,}22x = 0 \\ &\Leftrightarrow (-0{,}02x + 1{,}22) \times x \\ &\Leftrightarrow -0{,}02x + 1{,}22 = 0 \text{ ou } x = 0 \\ &\Leftrightarrow -0{,}02x + 1{,}22 - 1{,}22 = 0 - 1{,}22 \text{ ou } x = 0 \\ &\Leftrightarrow -0{,}02x = -1{,}22 \text{ ou } x = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-0{,}02x}{-0{,}02} = \frac{-1{,}22}{-0{,}02} \text{ ou } x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 61 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

Le cas $x = 0$ correspond au point de départ du ballon donc la seule solution qui convienne est $x = 61$. Donc

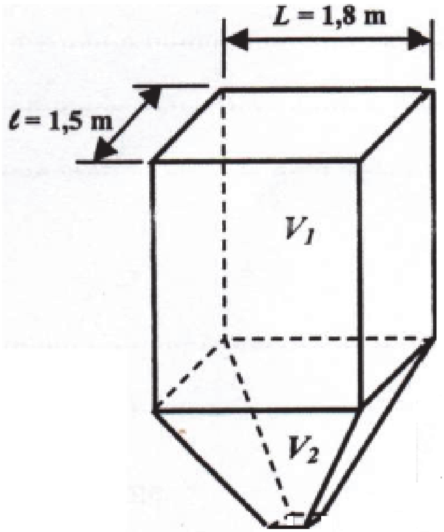
le ballon retombera 6 m derrière la ligne de but.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

La figure ci-dessous représente une vue en perspective d'un silo de stockage.



Le silo est composé de deux parties :
— la partie supérieure est un parallélépipède rectangle de volume V_1 ;
— la partie inférieure est une pyramide tronquée d'une hauteur de 1,2 m et de volume $V_2 = 2$ m^3.

1. Sachant que le volume total V_T du silo est de 12,26 m^3, calculer la hauteur du parallélépipède rectangle.

Déterminons la hauteur h_1 du parallélépipède rectangle.

D'une part :

$$\begin{aligned} V_1 &= V_T - V_2 \\ &= 12{,}26 \text{ m}^3 - 2 \text{ m}^3 \\ &= 10{,}26 \text{ m}^3 \ (1) \end{aligned}$$

et d'autre part, en utilisant la formule du volume d'un pavé droit :

$$\begin{aligned} V_1 &= h_1 \times \ell \times L \\ &= h_1 \times 1{,}5 \text{ m} \times 1{,}8 \\ &= h_1 \times 2{,}7 \text{ m}^2 \ (2) \end{aligned}$$

De (1) et (2) nous déduisons par transitivité :

$$10{,}26 \text{ m}^3 = h_1 \times 2{,}7 \text{ m}^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{10{,}26 \text{ m}^3}{2{,}7 \text{ m}^2} = \frac{h_1 \times 2{,}7 \text{ m}^2}{2{,}7 \text{ m}^2}$$
$$\frac{10{,}26}{2{,}7} \text{ m} = h_1$$

$$\boxed{h_1 = 3{,}8 \text{ m.}}$$

2. En déduire la hauteur totale du silo.

Déterminons la hauteur h_T du silo.

Puisque la hauteur de la pyramide est 1,2 m la hauteur du silo est

$$\begin{aligned} h_T &= 1{,}2 \text{ m} + h_1 \\ &= 1{,}2 \text{ m} + 3{,}8 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\boxed{h_1 = 5 \text{ m.}}$$

3. Pour un même volume et une même hauteur, quel serait le diamètre d'un silo cylindrique ?
   Arrondir au dixième de m.
   On rappelle que le volume d'un cylindre dont l'aire de la base est B et de hauteur h est égal à $B \times h$.

   Notons r le rayon d'un cylindre de hauteur 5 m et de volume 12,26 m^3.

   Déterminons r.

   Nous avons donc

$$12{,}26\ \text{m}^3 = \pi \times r^2 \times 5\ \text{m}^2$$

   ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{12{,}26\ \text{m}^3}{\pi \times 5\ \text{m}} = \frac{\pi \times r^2 \times 5\ \text{m}}{\pi \times 5\ \text{m}}$$
$$\frac{12{,}26}{\pi \times 5}\ \text{m}^2 = r^2$$

   Puisque r représente une longueur c'est un nombre positif :

$$\sqrt{\frac{12{,}26}{5\pi}}\ \text{m} = r$$

   Ainsi en tronquant :

$$r \approx 0{,}883456\ \text{m}$$

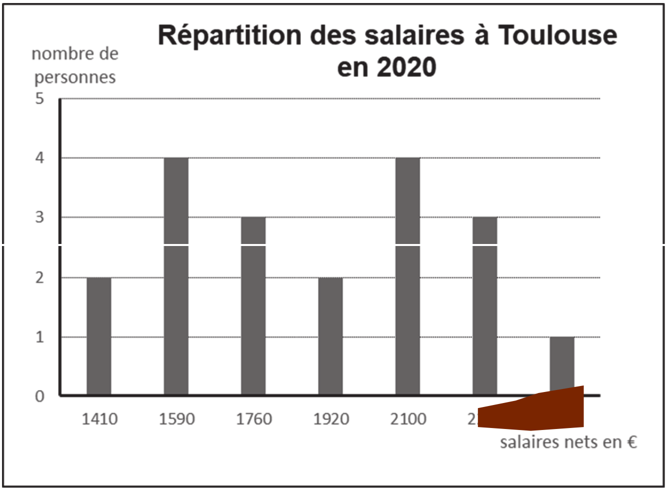
   $\boxed{\text{Le diamètre du silo cylindrique serait de 1,8 m.}}$

Exercice 2.

La cheffe d'une entreprise a commandé à son gestionnaire une étude sur les salaires de ses employés pour l'année 2020. L'entreprise est installée sur deux sites :
— le site de Toulouse où travaillent 19 employés ;
— le site de Montauban où travaillent 12 employés.

La répartition des salaires nets des employés du site de Toulouse est représentée par le diagramme en barres ci-dessous, les salaires étant rangés dans l'ordre croissant.

Une tasse de café est renversée sur le document réalisé par le gestionnaire et une tache vient masquer certaines informations concernant le site de Toulouse.



Informations sur les salaires à **Montauban** en 2020 :
Salaire moyen : 1520 €
12 employés
Salaire maximum : 2300 €
Salaire minimum : 1410 €

1. La cheffe d'entreprise affirme que plus de 40 % des personnes travaillant à Toulouse gagnent plus de 2000 €. Est-ce vrai ? Justifier la réponse.

   D'après le graphique $4+3+1=8$ personne travaillent à Toulouse.
   Puisqu'il y a 19 employés à Toulouse cela représente une proportion, exprimée en pourcentage, de
   $$\frac{8}{19} \times 100 \approx 42{,}11.$$

   L'affirmation du chef est vraie.

2. Sur le site de Toulouse, l'étendue des salaires est égale à 1890 € et le salaire moyen est de 1935 euro.

   (a) Déterminer la valeur du plus haut salaire de Toulouse.

   L'étendue est définie par : $e = max - min$.
   Donc ici :

$$1890 = max - 1410$$

   ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 1890+1410 &= max - 1410+1410 \\ 3300 &= max \end{aligned}$$

   Le salaire maximal dans l'entreprise est de 3 000 €.

   (b) Déterminer la valeur des salaires correspondant à l'avant-dernière barre du graphique présentant la répartition des salaires à Toulouse en 2020.

   Déterminons le salaire x correspondant à l'avant dernière barre du graphique.

   Le salaire moyen à Toulouse est :

$$1935 = \frac{2 \times 1410 + 4 \times 1590 + +3 \times 1760 + 2 \times 1920 + 4 \times 2100 + 3 \times x + 1 \times 3300}{2 + 4 + 4 + 3 + 1}.$$

   ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 1935 &= \frac{3x + 300000}{19} \\ 1935\times19 &= \frac{3x + 30000}{19}\times19 \\ 36765 &= 3x + 30000 \\ 36765-30000 &= 3x + 30000-30000 \\ 6765 &= 3x \\ \frac{6765}{3} &= \frac{3x}{3} \\ 2255 &= x \end{aligned}$$

Le salaire recherché est de 2255 €.

3. Déterminer le salaire médian des employés de Toulouse.

   Déterminons le salaire médian à Toulouse.

   * Les salaires dans le diagramme en barres sont déjà dans l'ordre croissant.
   * Il y a 19 employés et $\frac{19}{2} = 9{,}5$ donc le salaire médian est le dixième salaire.
   * Or, en cumulant les effectifs, $2 + 4 + 3 = 9$ et $2 + 4 + 3 + 2 = 11$ donc $Me = 1920$.

   le salaire médian à Toulouse est de 1920 €.

4. Calculer le salaire moyen en 2020 de l'ensemble du personnel de cette entreprise. Arrondir à l'unité.

   Déterminons le salaire moyen $\overline{x}$ dans l'entreprise.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{19 \times 1935 + 12 \times 1520}{19 + 12} \\ &\approx 1774{,}354 \text{ en tronquant.}\end{aligned}$$

   Le salaire moyen est de 1 774 €.

5. En 2021, la cheffe d'entreprise souhaiterait octroyer une augmentation de 10 % à tous les employés travaillant à Montauban.

   (a) Quel sera alors le montant du salaire minimum à Montauban en 2021 ?

   Déterminons le salaire minimal m' après augmentation.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 10 % est : $CM = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$.
   Donc

$$m' = 1{,}1 \times 1410$$

$$m' = 1551.$$

(b) De quel pourcentage aurait-il fallu augmenter les salaires de Montauban pour que le salaire moyen soit le même sur les deux sites ? Justifier. On donnera le résultat arrondi au dixième d'unité de pourcentage.

Déterminons le coefficient multiplicateur, CM_1, qu'il faut appliquer aux salaires de Montauban pour que les salaires moyens soient les mêmes sur les deux sites.

$$\begin{aligned} CM_1 &= \frac{V_A}{V_D} \\ &= \frac{1935}{1520} \\ &\approx 1{,}27302 \text{ en tronquant.} \end{aligned}$$

Par linéarité de la moyenne (autrement dit l'augmentation appliquée à chaque salaire se traduit par la même augmentation appliquée à la moyenne des salaires) il faut que le salaire soit multiplié par 1,2730.
Le taux d'évolution correspondant à ce coefficient multiplicateur est

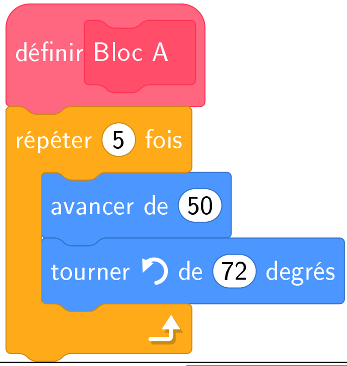
$$\begin{aligned} t_1 &\approx 100 \times (CM_1 - 1) \\ &= 100 \times (1{,}2730 - 1) \\ &\approx 27{,}30 \end{aligned}$$

il aurait fallut une augmentation de 27,3 %.

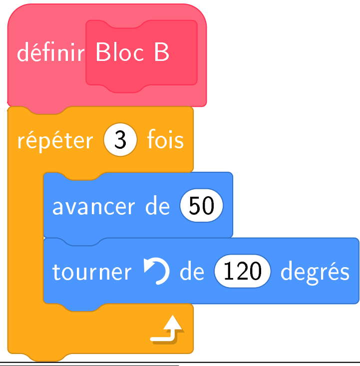
Exercice 3.

On veut réaliser des dessins constitués de la répétition de motifs décrits dans les blocs de programme suivants.

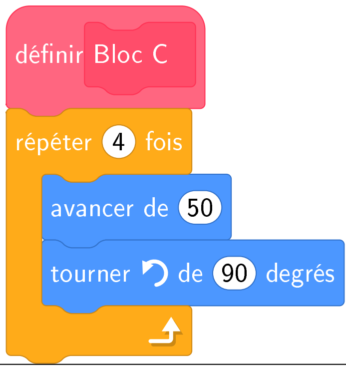
Bloc A



Bloc B

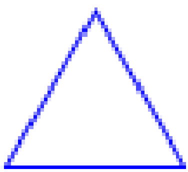


Bloc C

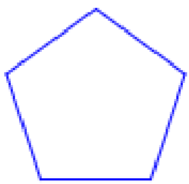


1. Ces blocs ont permis de construire les trois figures ci-dessous.

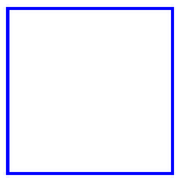
Dessin 1



Dessin 2



Dessin 3



Pour chacun des blocs A, B et C, donner le numéro de la figure correspondant.

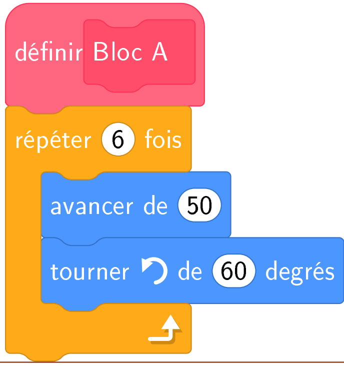
Le nombre de répétition correspond au nombre de côtés du polygone.

Le bloc A trace le dessin 2.
Le bloc B trace le dessin 1.
Le bloc C trace le dessin 3.

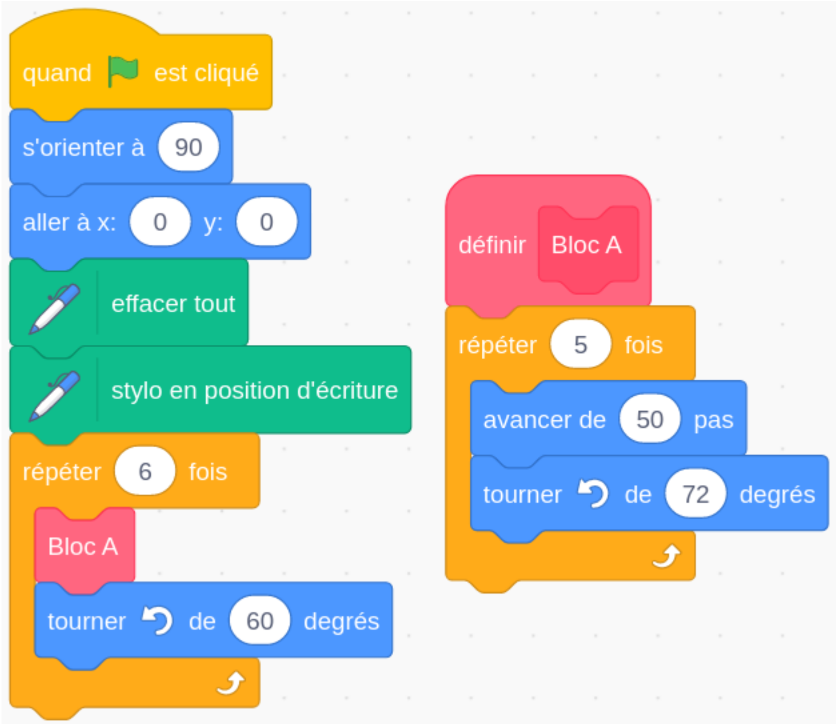
2. Recopier et modifier le bloc A pour obtenir un hexagone régulier dont les côtés mesurent 50 pixels.

   Il faudra 6 segments et comme on peut le remarquer sur les précédents l'angle est 360° divisé par le nombre de côtés.

Bloc A modifié



3. Pour réaliser une figure plus complexe, on utilise le programme ci-dessous où le « Bloc A » représente un motif.



Cliquez sur le programme ci-dessus pour le télécharger.

(a) Quelle transformation géométrique permet de passer d'un motif au suivant ? Préciser les éléments caractéristiques.

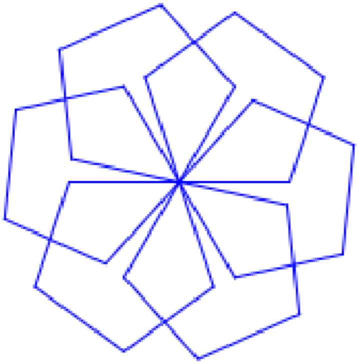
Lors du tracé du pentagone avec le Bloc A, le lutin part du point de coordonnées $(0;0)$ puis y retourne. Ainsi tous les pentagones commencent à partir de l'origine. Comme chaque tracé est suivi d'une rotation de 60° nous pouvons conclure :

> On passe d'un motif au suivant par une rotation de centre le point de coordonnées $(0;0)$ et d'angle 60°.

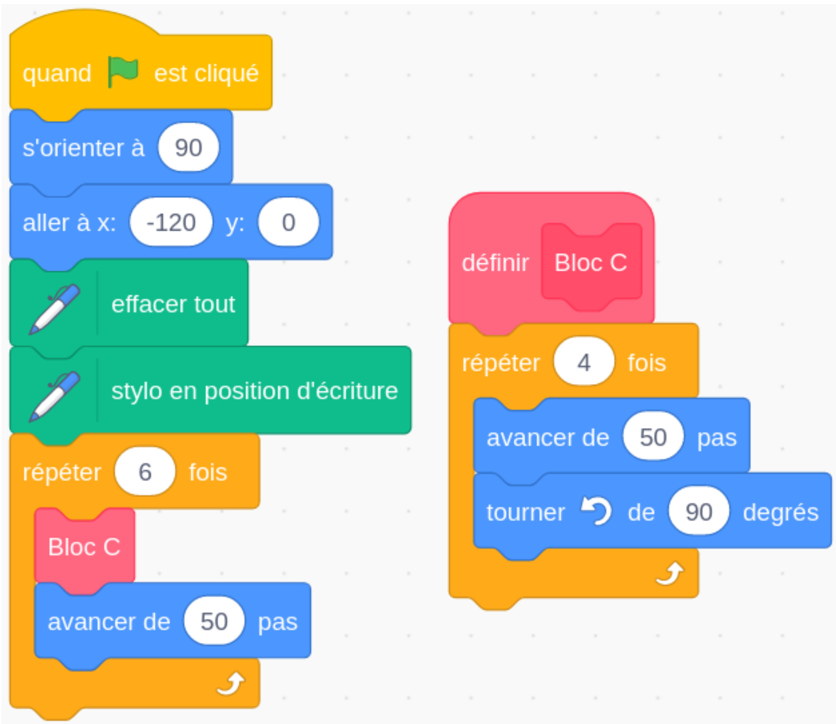
(b) Combien de motifs « Bloc A » composent cette figure ?

$6 \times 60 = 360$ donc à la fin du dessin du sixième motif on revient en position de départ.

> Cette figure est composée de 6 motifs.



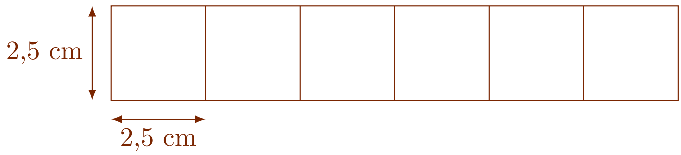
4. On entre le script donné ci-dessous.



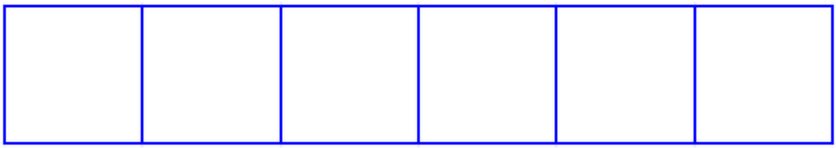
Dessiner la figure obtenue en choisissant comme échelle 1 cm pour 20 pixels.

Cliquez sur le programme ci-dessus pour le télécharger.

Voici la figure obtenue (ici dessinée encore à la moitié de ce qui était demandée, mais les longueurs indiquées sont celles attendues).



Avec le logiciel on obtient :



Exercice 4.

Pour chacune des affirmations suivantes indiquer, en le justifiant, si elle est vraie ou fausse.

Une réponse correcte sans justification ne rapporte aucun point.

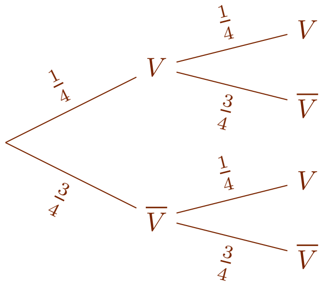
1. On lance trois fois une pièce non truquée. On obtient trois fois pile.
   Affirmation 1 : « La probabilité d'obtenir face au quatrième lancer est 0,5. »

   Les différents lancers sont indépendants les uns des autres. Le résultat du quatrième lancer ne dépend pas des résultats des ris précédents.
   Ainsi il s'agit d'un lancer de pile ou face avec une pièce équilibrée et la probabilité d'obtenir face est donc $\frac{1}{2}$.

   L'affirmation 1 est vraie.

2. On dispose de deux urnes. Dans chacune d'entre elles, il y a trois boules rouges et une boule verte ; ces boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule dans une urne et une boule dans une autre.
   Affirmation 2 :« La probabilité d'obtenir deux boules vertes est $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}$ soit $\dfrac{1}{2}$. »

Les deux tirages sont indépendants l'un de l'autre si bien que nous pouvons considérer les tirages comme successifs.
Schématisons la situation par un arbre pondéré probabiliste.



D'après le principe multiplicatif (ou la formule des probabilités composées) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(VV) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16}\end{aligned}$$

L'affirmation 2 est fausse.

3. On lance deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6 et on fait la somme des nombres obtenus sur les faces supérieures.
Affirmation 3 : « La probabilité d'obtenir 3 est égale à celle d'obtenir 2. »

Schématisons le lancer avec un tableau double entrée que nous remplirons des sommes des chiffres affichés par les deux dés.

Pour Arthur :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ω est l'ensemble des couples de chiffres obtenus (en distinguant toutes les faces par un coloriage par exemple).

Les dés étant équilibrés il est raisonnable de faire l'hypothèse que chaque couple de faces représenté par une case du tableau à la même probabilité qu'un autre couple. Il y a équiprobabilité entre les couples. L'univers comporte 36 issues.

Notons A_2 (resp. A_3) l'événement « obtenir 2 » (resp. « obtenir 3 »).

Calculons $\mathbb{P}(A_2)$ (resp. $\mathbb{P}(A_3)$).

I y a équiprobabilité entre les couples. A_2 (resp. A_3) est réalisé par 1 (resp. 2) issues. L'univers comporte 36 issues. Nous en déduisons :

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{36} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_3) = \frac{2}{36}.$$

Donc : $\mathbb{P}(A_2) < \mathbb{P}(A_3)$.

L'affirmation 3 est fausse.

III Troisième partie (14 points).

Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.

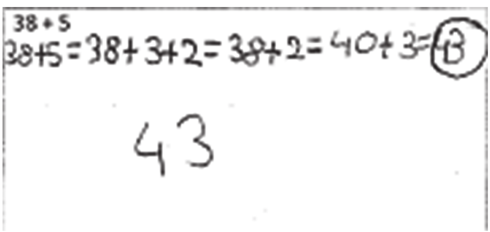
Situation 1.

Une professeure de CE1 demande à ses élèves d'effectuer les calculs suivants sans poser les opérations.

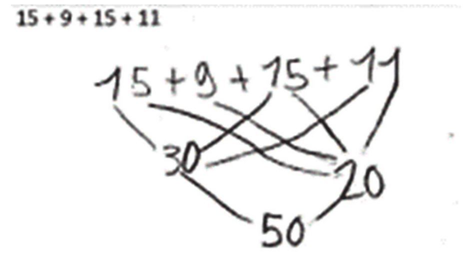
$$38 + 5 \quad 15 + 9 + 15 + 11 \quad 32 + 49.$$

Voici les productions de 3 élèves relevées par la professeure :

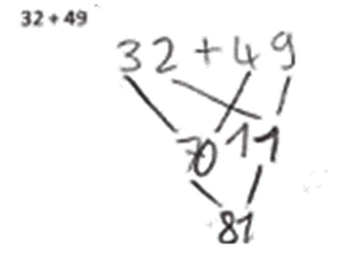
Élève 1



Élève 2



Élève 3



1. Analyser chacune des procédures mises en œuvre par les élèves 1, 2 et 3 en mettant en avant les connaissances qu'elles nécessitent.

2. Proposer deux autres procédures que la professeure pourrait enseigner aux élèves pour calculer 32 + 49.

Situation 2.

Un enseignant de CM2 propose les exercices suivants.

Enoncé 2	Résultat	Comment as-tu fait ?
Un robot parcourt 50 cm en 14 pas. Quelle distance parcourt-il en 7 pas ?	25 cm	14 ÷ 2 = 7 donc 50 ÷ 2 = 25
Quelle distance parcourt-il en 21 pas ?	75 cm	le résultat de 7 pas et de 14 pas ~~se~~ égale 21 donc on rajoute 25 + 50 = 75

1. Quelle est la principale notion travaillée dans cet exercice ?

2. Analyser la réponse de l'élève à la première question en précisant la propriété mathématique utilisée.

3. Analyser la réponse de l'élève à la seconde question en précisant la propriété mathématique utilisée.

4. Proposer une autre procédure que les élèves de CM2 pourraient utiliser pour répondre à cette seconde question, en précisant la propriété mathématique utilisée.

5. Un enseignant de CM2 propose l'énoncé suivant :

Un robot parcourt 75 cm en 5 pas. Quelle distance parcourt-il en 3 pas ?

   (a) Justifier le choix des nombres de cet énoncé et la procédure que l'enseignant souhaite ainsi encourager.

   (b) L'enseignant souhaite que cet exercice serve de référence pour la classe. Il envisage de rédiger la correction qui sera affichée dans la classe. Faire une proposition du contenu de cette affiche.

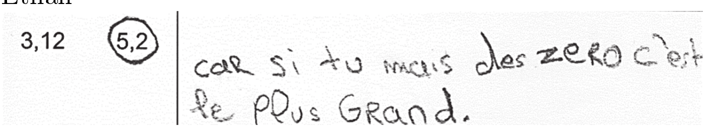
Situation 3.

Un enseignant de CM2 travaille avec ses élèves sur la comparaison des nombres décimaux.

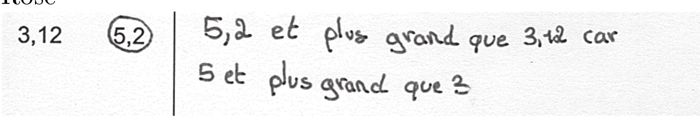
Ces derniers doivent entourer le nombre qu'ils estiment le plus grand en justifiant leur choix.

1. Voici les réponses de Rose et Ethan concernant la comparaison de 3,12 et 5,2.

   - Ethan



   - Rose



   (a) Analyser la procédure utilisée par Ethan.

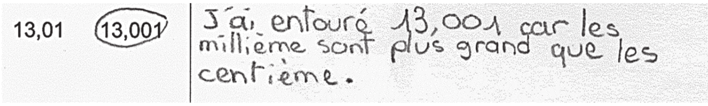
(b) En quoi un travail de remédiation utilisant la droite graduée pourrait permettre à Ethan de s'approprier une procédure plus efficace ?

(c) Analyser la procédure utilisée par Rose.

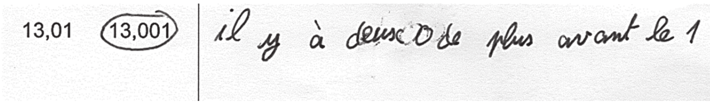
(d) Proposer deux autres paires de nombres permettant de vérifier que Rose maîtrise la compétence « comparer deux nombres décimaux ».

2. Voici les réponses de Louisa, Nolan et Loane concernant la comparaison de 13,01 et 13,001.

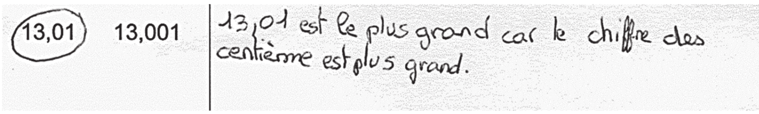
- Louisa



- Nolan



- Loane



(a) En s'appuyant sur la justification donnée, analyser l'erreur de Louisa.

(b) En s'appuyant sur la justification donnée, analyser l'erreur de Nolan.

(c) L'enseignant souhaite aider Loane à reformuler son explication. Proposer une reformulation attendue.

3. Donner deux représentations erronées que peut avoir un élève de CM2 pour la comparaison des nombres décimaux.

Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 3.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Mme Bobinec, M. Chandelier, Céline, Mme Monjole, Mme Duplessy pour la relecture et les corrections apportées.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Suite à des problèmes récurrents d'alimentation en eau pour un des hameaux de sa commune, le maire projette de faire construire un château d'eau.

Partie A : choix du château d'eau.

1. Afin de faire un choix esthétique parmi trois modèles proposés, le maire décide de consulter ses concitoyens. Chaque foyer peut voter une fois, tous les foyers ont voté.

   Voici les résultats de la consultation :

Types de château d'eau	Modèle A	Modèle B	Modèle C
Nombre de foyers	12	60	18

   Calculer la proportion, en pourcentage, de voix recueillies parmi les foyers de ce hameau pour chacun des trois modèles proposés. Les pourcentages seront arrondis à l'unité de pourcentage.

   Déterminons les proportions de voix.

   Notons p_A la proportion de voix recueillies par le modèle A.
   Pour une proportion l'idée est de faire $\frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$.
   En notant E l'ensemble des habitants du hameau et A l'ensemble de ceux qui ont choisi le modèle A nous avons :

$$p_A = \frac{|A|}{|E|}$$

   en notant $|A|$ le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre de personne ayant fait le choix du modèle A.

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{12}{12+60+18} \\ &= \frac{2}{15} \\ &= 0{,}1333\ldots \\ &\approx 13\ \% \end{aligned}$$

   En procédant de même pour les deux autres modèles :

Types de château d'eau	Modèle A	Modèle B	Modèle C
Proportion	13 %	67 %	20 %

2. Pour sélectionner le réservoir au volume le plus adapté, le maire décide d'étudier la consommation annuelle d'eau des foyers du hameau et observe qu'en 2019 elle était égale à 10 500 m^3.

   (a) Montrer que la consommation moyenne annuelle d'eau par foyer est d'environ 116,67 m^3.

   Calculons la consommation moyenne $\overline{x}$.

   La moyenne peut être obtenue par diverses formules. Ici il s'agit simplement de partager équitablement la consommation totale entre chaque foyer.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{10\,500 \text{ m}^3}{12+60+18}\\ &= \frac{350}{3} \text{ m}^3\\ &= 116{,}666\ldots \text{ m}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} \approx 116{,}67 \text{ m}^3.}$$

Sachant qu'un lotissement de 17 logements va être bientôt terminé, le maire décide d'intégrer ces logements à son étude en attribuant à chacun d'entre eux la consommation annuelle d'eau moyenne par foyer du hameau.

   (b) Calculer la consommation annuelle estimée du hameau intégrant les nouveaux logements. On donnera le résultat en mètre cube, arrondi à l'unité.

   Calculons la consommation annuelle estimée du hameau C_{ae}.

   Chacun des 17 nouveaux foyers consommera 116,67 m^3. La consommation de ces 17 nouveaux foyers sera de

$$17 \times 116{,}67 \text{ m}^3 = 1983{,}39 \text{ m}^3$$

   Donc en prenant en compte tout le hameau :

$$\begin{aligned}C_{ae} &= 10\,500 \text{ m}^3 + 1983{,}39 \text{ m}^3\\ &= 12\,483{,}39 \text{ m}^3\end{aligned}$$

$$C_{ae} \approx 12\,483 \text{ m}^3.$$

3. Suite à son enquête et aux conseils d'un bureau d'étude, le maire souhaite choisir un réservoir pouvant contenir au minimum la consommation moyenne de 5 jours du hameau intégrant les nouveaux logements.

   (a) Déterminer la consommation moyenne en 5 jours de l'ensemble des foyers du hameau intégrant les nouveaux logements.

   Déterminons la consommation moyenne en 5 jours C_5.

   On fait implicitement l'hypothèse que la consommation quotidienne est toujours la même ce qui nous permet de répondre à la question par proportionnalité. De plus nous ferons l'hypothèse simplificatrice d'une année à 365 jours plutôt qu'à 365,25 jours.

   Par proportionnalité :

Jours	365	5
Consommation (m^3)	12 483,39	171,01

$$C_5 \approx 171{,}01 \text{ m}^3.$$

Une entreprise propose de construire un réservoir ayant la forme d'une sphère de 7 mètres de diamètre.

   (b) Déterminer le volume de ce réservoir. On donnera l'arrondi du volume au mètre cube.
   On rappelle que le volume V d'une boule de rayon r est donné par $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$.

   Calculons le volume V_s de la sphère.

   D'après la formule de l'énoncé :

$$\begin{aligned} V_S &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{7 \text{ m}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{7}{2}\right)^3 \text{ m}^3 \\ &\approx 179{,}59 \end{aligned}$$

$$V_S \approx 180 \text{ m}^3.$$

(c) Ce réservoir répond-il aux souhaits du maire ?

$V_S > 171{,}01 \text{ m}^3$ donc

ce réservoir répond aux souhaits du maire.

4. On considère que le réservoir choisi contient 180 m^3 d'eau. Le débit de la pompe qui permet de le remplir est de 40 m^3/h.
Déterminer le temps nécessaire pour remplir ce réservoir aux trois quarts. Donner la réponse en heure, minute et seconde.

Déterminons le temps de remplissage t_r.

Nous pouvons raisonner par proportionnalité :

Volume (m^3)	40	$\frac{3}{4} \times 180 = 135$
Temps (h)	1	3,375

Ainsi

$$\begin{aligned} t_r &= 3{,}375 \text{ h} \\ &= 3 \text{ h} + 0{,}375 \text{ h} \\ &= 3 \text{ h} + 0{,}375 \times 60 \text{ min} \\ &= 3 \text{ m} + 22{,}5 \text{ min} \\ &= 3 \text{ h} + 22 \text{ min} + 0{,}5 \text{ min} \end{aligned}$$

$$t_r = 3 \text{ h} + 22 \text{ min} + 30 \text{ s}.$$

Partie B : nuisances et impact paysager.

1. Pour éviter toute polémique quant au lieu d'implantation du projet, le maire décide d'installer le château à égale distance des trois habitations les plus proches. Pour expliciter ce choix aux habitants, il souhaite représenter la situation par un tracé géométrique. Il désigne par les points H_1, H_2 et H_3 les trois habitations.

On sait que les distances entre les habitations sont $H_1H_2 = 1$ km, $H_2H_3 = 820$ m et $H_1H_3 = 730$ m.

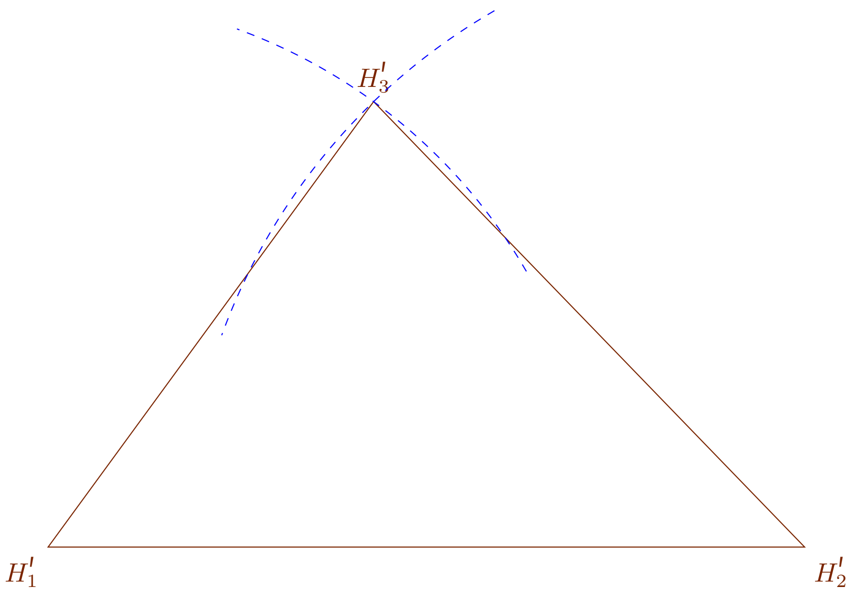
(a) Représenter la situation à l'échelle 1/10 000.

En notant H_1', H_2' et H_3' les points correspondant respectivement H_1, H_2 et H_3 après la mise à l'échelle nous avons, par exemple :

$$\begin{aligned} H_1'H_2' &= \frac{1}{10\,000} \times 1 \text{ km} \\ &= \frac{1}{10\,000} \times 1 \times 100\,000 \text{ cm} \\ &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

De même ou en raisonnant par proportionnalité

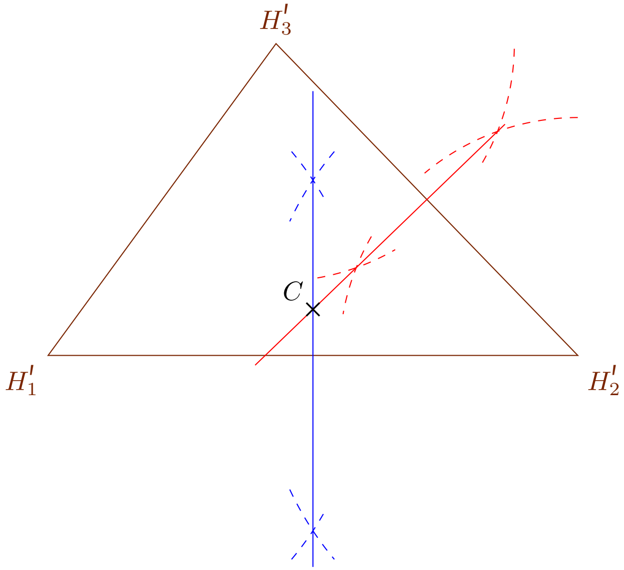
Réel (km)	1	0,820	0,730
À l'échelle (cm)	10	8,2	7,3



(b) Placer le point C, tel qu'il soit à égale distance des trois points représentant les habitations. On veillera à laisser les traits de construction et on justifiera le tracé sur la copie.

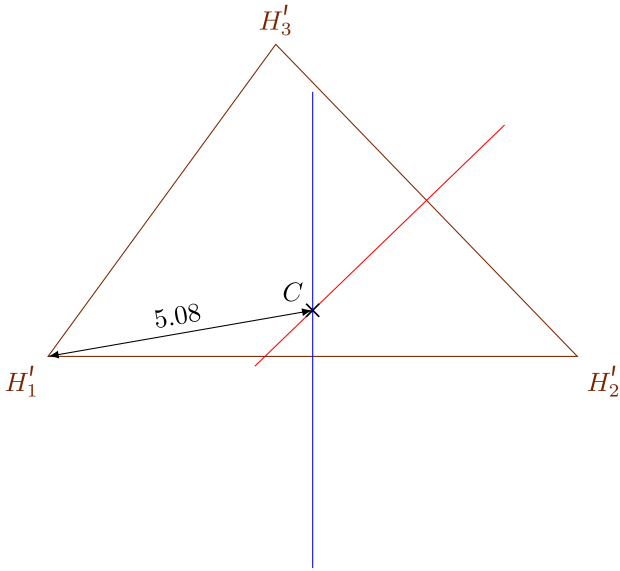
Si le point C est équidistant des points H_1, H_2 et H_3 alors cela signifie qu'il est le centre du cercle circonscrit au triangle $H_1H_2H_3$. Autrement dit C est le point d'intersection des médiatrices du triangle.

La figure suivante est une réduction à l'échelle $7/10$ de la figure demandée.



(c) En utilisant la figure construite, estimer la distance entre le château d'eau et chacune des 3 habitations.

La figure suivante est une réduction à l'échelle $7/10$ de la figure demandée.



Donc par proportionnalité

Réel (km)	1	0,508
À l'échelle (cm)	10	5,08

Entre le château d'eau et les habitations la distance est approximativement de 510 m.

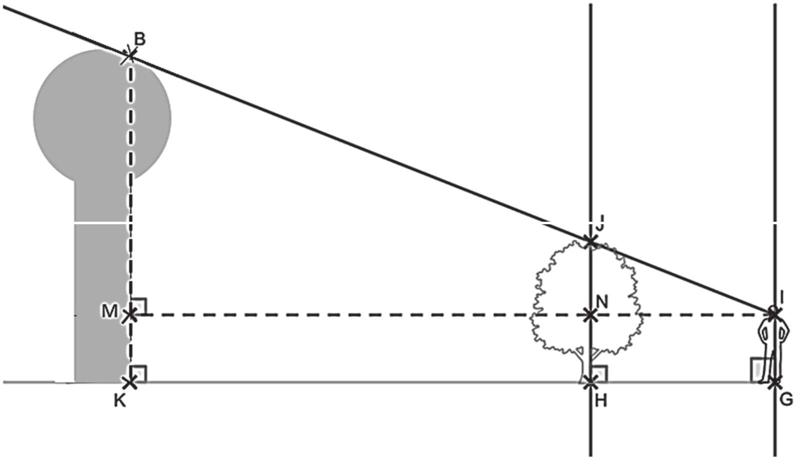
2. Afin de masquer la vue du château d'eau, un des habitants décide de planter une haie. Afin de choisir l'essence d'arbres à planter, il souhaite connaître la hauteur que devront atteindre ces arbres pour masquer la vue du château d'eau depuis sa terrasse.

   La figure ci-après, qui n'est pas à l'échelle, représente la situation. Cet habitant est au point G sur sa terrasse, le château d'eau est implanté au point K et on a noté H le point où il souhaite planter une haie pour masquer le château d'eau.

   On connaît les dimensions suivantes : KG = 510 m, GI = 1,80 m et HG = 20 m. La hauteur KB est de 45 mètres.

   Le point I correspond à l'œil de l'homme et le point J correspond à la hauteur que doivent atteindre les arbres pour masquer la vue du château d'eau.

   Les points M et N sont situés à 1,80 m du sol. On a ainsi, MI = KG = 510 m et NI = HG = 20 m.



Calculer la hauteur minimale HJ des arbres pour que cet habitant ne voie plus le château d'eau lorsqu'il se tient debout sur sa terrasse. On arrondira le résultat au centimètre.

Calculons JN.

* Les points I, N, M d'une part et I, J, B d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* (JN) et (MB) sont des verticales donc $(JN) \parallel (MB)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{JN}{BM} = \frac{IN}{IM}.$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{JN}{BM}\times BM &= \frac{IN}{IM}\times BM \\
JN &= \frac{20\text{ m}}{510\text{ m}} \times (KB - KM) \\
JN &= \frac{20}{510} \times (45\text{ m} - 1{,}80\text{ m}) \\
JN &= \frac{20}{510} \times 43{,}2\text{ m} \\
&= \frac{144}{85}\text{ m}
\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
HJ &= HN + NJ \\
&= 1{,}80 \text{ m} + \frac{144}{85} \text{ m} \\
&\approx 3{,}49411 \text{ m par troncature.}
\end{aligned}$$

$$\boxed{HJ \approx 3{,}49 \text{ cm.}}$$

Partie C : entretien du château d'eau.

1. Le réservoir d'eau choisi a une contenance de 180 m^3. L'ingénieur informe le maire que l'eau du château d'eau, bien que puisée dans une source, doit être chlorée. Il faut prévoir 0,1 mg de chlore par litre d'eau.

   Déterminer la quantité de chlore, en gramme, à prévoir au minimum pour 180 m^3 d'eau.

   Déterminons la quantité Q_c de chlore nécessaire.

$$\begin{aligned}
Q_c &= \left(180 \text{ m}^3\right) \times \left(0{,}1 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}\right) \\
&= (180 \times 1000 \text{ L}) \times \left(0{,}1 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}\right) \\
&= 180 \times 1000 \times 0{,}1 \text{ L} \cdot \text{mg} \cdot \text{L}^{-1} \\
&= 18000 \text{ mg}
\end{aligned}$$

$$\boxed{Q_c = 18 \text{ g.}}$$

2. Pour assurer l'entretien annuel de ce château d'eau, la commune sollicite deux entreprises.

   - La société *Qualiteau* propose un forfait annuel de 700 € pour les déplacements puis toute intervention est facturée 350 €.
   - La société *Calmwater* propose également un forfait annuel pour les déplacements au tarif de 500 € puis toute intervention est facturée 450 €.

   On note x le nombre d'interventions annuelles.

(a) Montrer que le montant annuel $Q(x)$ à payer à la société *Qualiteau*, en fonction de x, est donné par l'expression $Q(x) = 350x + 700$.

Pour une année il faudra payer l'abonnement de 700 € auquel il faudra ajouter 350 € pour chaque intervention. Donc pour x interventions :

$$\boxed{Q(x) = 350 \times x + 700.}$$

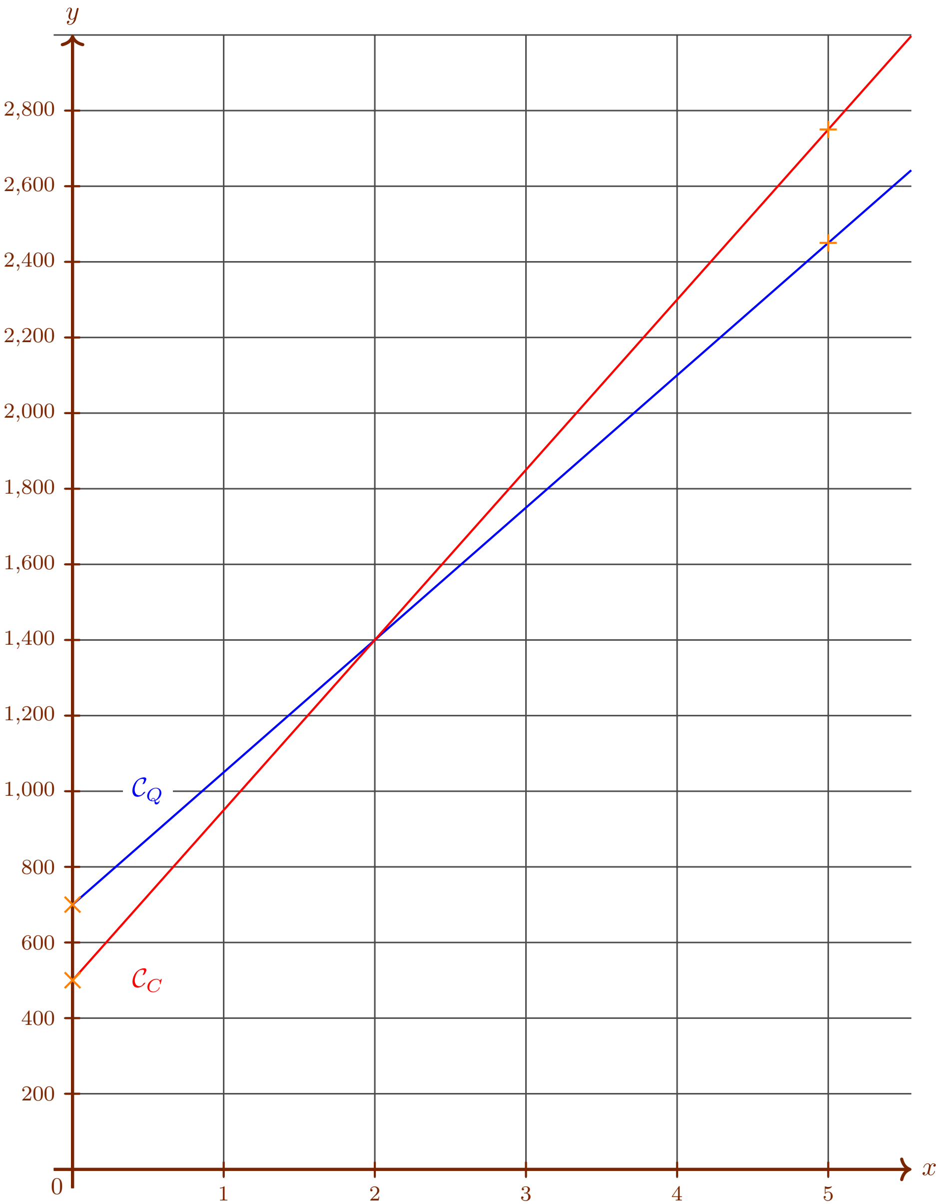
(b) Exprimer, en fonction de x, le montant annuel $C(x)$ à payer à la société *Calmwater*.

En procédant comme à la question précédente

$$\boxed{C(x) = 450x + 500.}$$

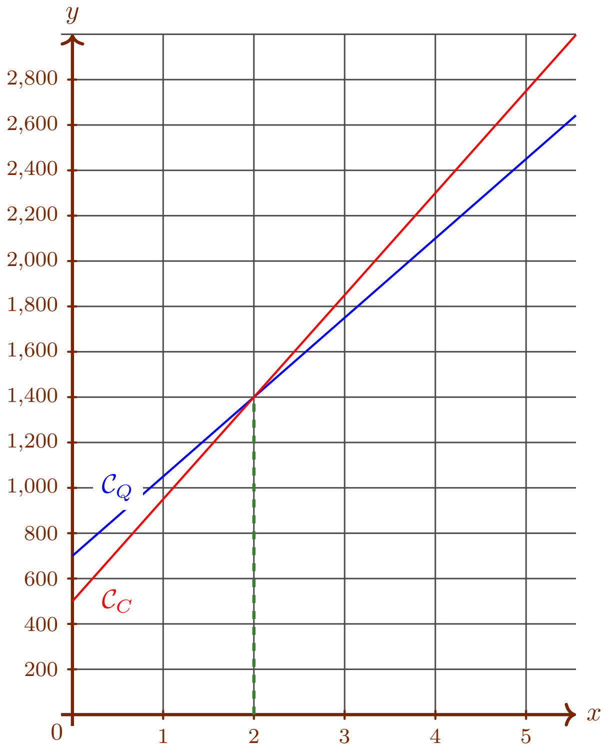
(c) Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement les fonctions Q et C. On prendra en abscisse 2 cm pour une intervention et en ordonnée 1 cm pour 200 €.

La représentation graphique d'une fonction f est formée de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$.
Les fonctions que nous devons représenter sont des fonctions affines donc leurs courbe représentatives sont des droites. Il nous suffit de trouver les coordonnées de deux points distincts pour chacune d'entre elles.
$Q(0) = 700$ et $Q(5) = 2450$. $C(0) = 500$ et $C(5) = 2750$.



(d) À partir du graphique construit à la question 2.c., lire le nombre d'interventions annuelles pour lequel le montant de la facture sera le même

pour les deux sociétés.
Vérifier le résultat trouvé par un calcul.



Résolvons $C(x) = Q(x)$ dans l'ensemble des nombres réels positifs.

$$\begin{aligned}
C(x) = Q(x) &\iff 450x + 500 = 350x + 700 \\
&\iff 450x + 500 - 500 = 350x + 700 - 500 \\
&\iff 450x = 350x + 200 \\
&\iff 450 - 350x = 350x + 200 - 350x \\
&\iff 100x = 200 \\
&\iff \frac{100x}{100} = \frac{200}{100} \\
&\iff x = 2
\end{aligned}$$

La facture sera la même pour deux interventions annuelles.

(e) Quelle société devient alors la plus avantageuse pour la commune pour un nombre supérieur d'interventions ?

Par lecture graphique, pour plus de deux interventions annuelles, la courbe représentative de Q est en dessous de celle de C donc

pour plus de deux interventions l'entreprise *Qualiteau* est plus avantageuse.

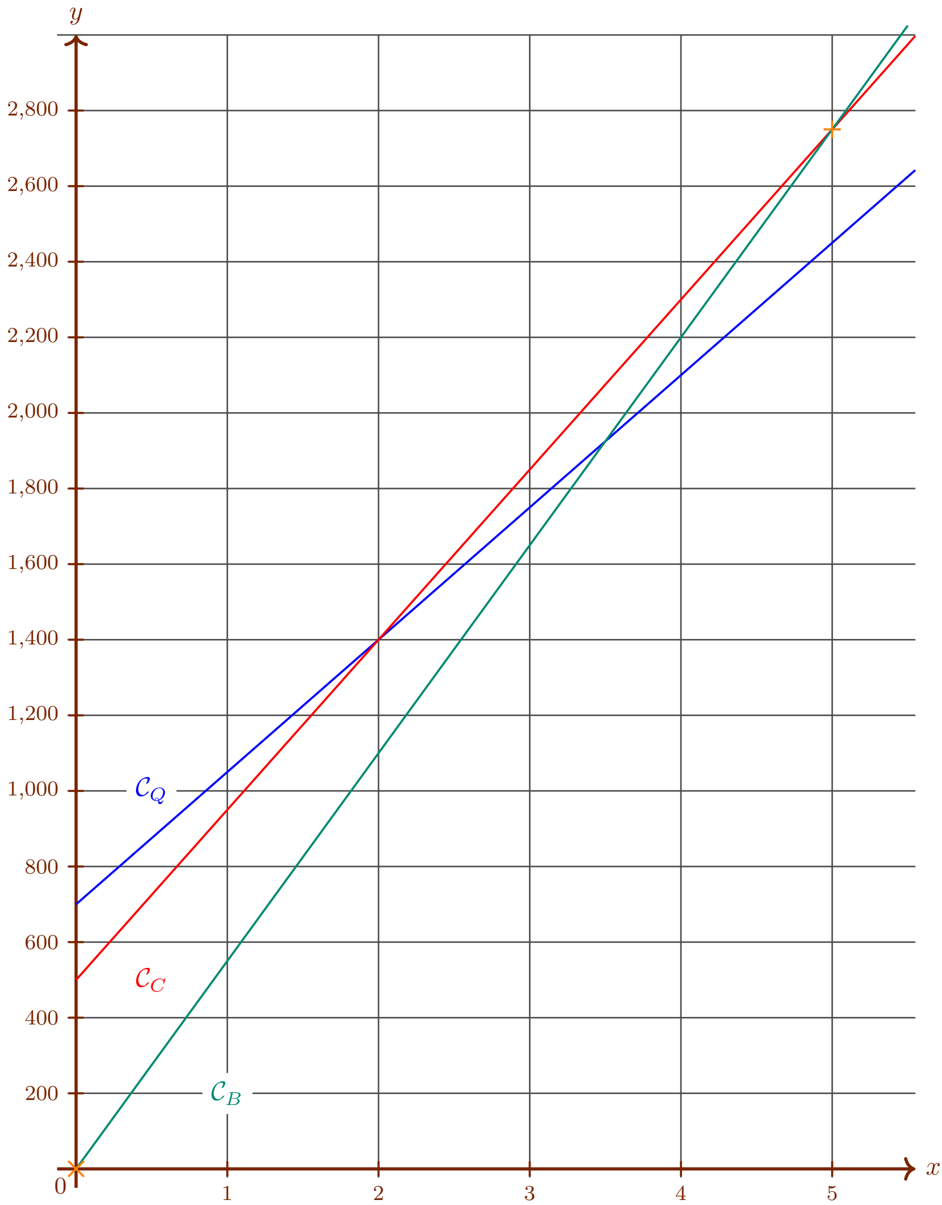
3. Une troisième entreprise, la société *Bellacqua*, vient de s'implanter dans la région. Elle ne facture aucun déplacement mais propose un tarif par intervention de 550 €.

(a) Exprimer, en fonction de x le montant annuel $B(x)$ à payer à la société *Bellacqua*.

$$B(x) = 550x.$$

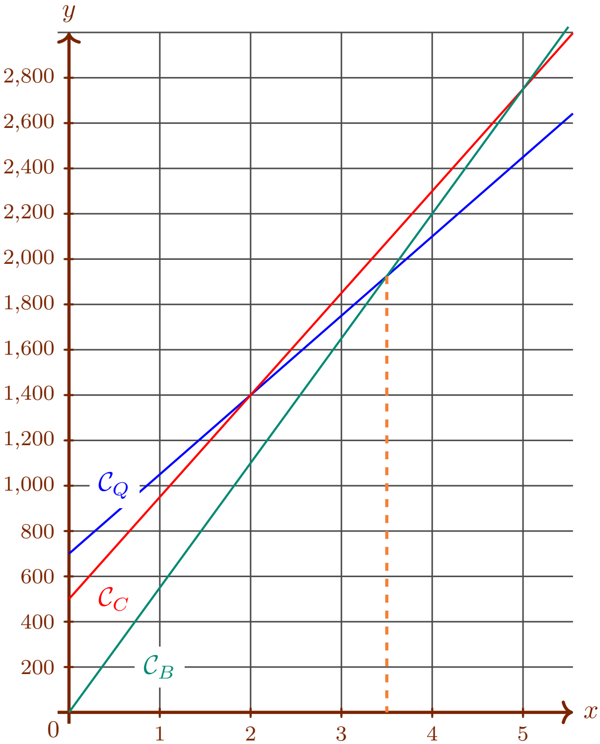
(b) Dans le repère orthogonal construit à la question 2.c., représenter graphiquement le tarif de la société *Bellacqua* en fonction du nombre x d'interventions.

La fonction B est une fonction affine donc sa courbe représentative est une droite. De plus $B(0) = 0$ et $B(5) = 2750$.



(c) La commune souhaiterait faire travailler la société *Bellacqua*. Lire sur le graphique le nombre maximum d'interventions pour lequel le prix à payer sera plus intéressant que celui des deux autres sociétés. Justifier la démarche.

Tant que la courbe représentative de B reste en dessous de celles de C et Q cela signifie que les valeurs prisent par B sont inférieures à celles de C et Q.



Donc d'après la représentation graphique il faut moins de 3,5 interventions.

> *Bellacqua* pourra être choisie pour un maximum de trois interventions.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif.
- Calculer le carré C_1 du nombre entier qui le suit.
- Calculer le carré C_2 du nombre entier qui le précède.
- Calculer la différence $C_1 - C_2$.

1. Vérifier qu'en prenant 5 comme nombre de départ, on obtient 20.

   Notons $C0$ le nombre choisi et dressons le tableau d'état des variables correspondant à cet algorithme.

Instructions	C_0	C_1	C_2	$C_1 - C_2$
Choisir un entier positif	5			
Calcul du carré de l'entier qui suit C_0	5	$6^2 = 36$		
Calcul du carré de l'entier qui précède C_0	5	36	$4^2 = 16$	
Calcul de $C_1 - C_2$	5	36	16	$36 - 16 = 2.$

En entrant 5 le programme de calcul renvoie 20.

2. On appelle x le nombre de départ, montrer que le résultat obtenu est égal à $4x$.

   Notons $C0$ le nombre choisi et dressons le tableau d'état des variables correspondant à cet algorithme.

Instructions	C_0	C_1	C_2	$C_1 - C_2$
Choisir un entier positif	x			
Calcul du carré de l'entier qui suit C_0	x	$(x+1)^2$		
Calcul du carré de l'entier qui précède C_0	x	$(x+1)^2$	$(x-1)^2$	
Calcul de $C_1 - C_2$	x	$(x+1)^2$	$(x-1)^2$	$(x+1)^2 - (x-1)^2.$

Or, grâce à une identité remarquable nous aurions pu faire le choix de tout développer, là encore, avec des identités remarquables, mais la factorisation semble moins longue) :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x-1)^1 &= [(x+1) - (x-1)] \times [(x+1) + (x-1)] \\ &= [x+1-x+1] \times [x+1+x-1] \\ &= 2 \times 2x\end{aligned}$$

donc

en entrant x le programme de calcul renvoie $4x$.

3. Est-il possible d'obtenir 842 ? Si oui, donner le nombre de départ. Sinon, expliquer pourquoi.

   Résolvons $4x = 842$ dans $\mathbb{N}$.

   Procédons à un raisonnement par analyse-synthèse.
   Nous recherchons un nombre x tel que

$$4x = 842$$

   Cette équation équivaut successivement à :

$$\frac{4x}{4} = \frac{842}{4}$$
$$x = \frac{421}{2}$$

   Il n'y a donc qu'un nombre possible c'est $\frac{421}{2}$, mais, 421 n'étant pas pair, $\frac{421}{2}$ n'est pas un entier.

   Il n'est pas possible d'obtenir 842 avec le programme.

   Ou plus sobrement : il est clair que 842 n'est pas un multiple de 4.

4. Déterminer le nombre de départ pour que le programme ait comme résultat 2^{98}. On justifiera la réponse.

   Résolvons $4x = 842$ dans $\mathbb{N}$.

   Nous recherchons un nombre x tel que

$$4x = 2^{98}$$

   Cette équation équivaut successivement à :

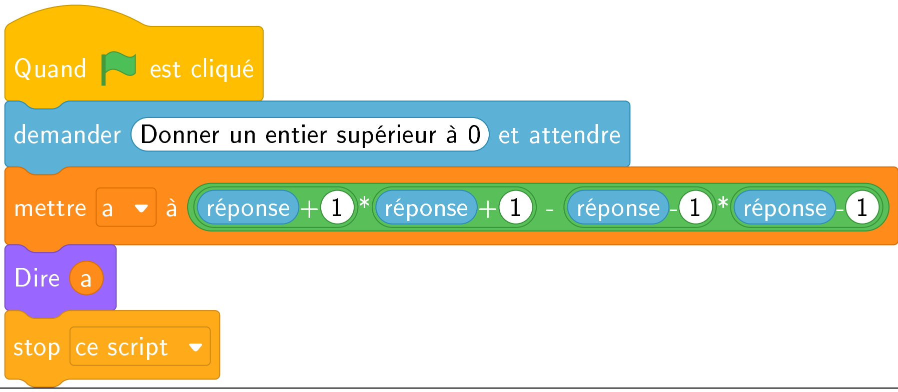
$$\frac{4x}{4} = \frac{2^{98}}{4}$$
$$x = \frac{2^{98}}{2^2}$$
$$x = 2^{98-2}$$
$$x = 2^{96}$$

Et comme 2^{98} est bien un entier naturel :

> pour que le programme renvoie 2^{98} il faut choisir 2^{96} comme nombre de départ.

5. Parmi les trois captures d'écran issues du logiciel SCRATCH, donner, sans justifier, le(s) script(s) qui correspond(ent) au programme de calcul proposé.

Script 1.



Script 2.

```
Quand [drapeau] est cliqué
demander (Donner un entier supérieur à 0) et attendre
cacher la variable [a ▾]
cacher la variable [b ▾]
mettre [a ▾] à (((réponse) - (1)) * ((réponse) - (1)))
mettre [b ▾] à (((réponse) + (1)) * ((réponse) + (1)))
mettre [a ▾] à ((a) - (b))
Dire (a)
stop [ce script ▾]
```

Script 3.

```
Quand [drapeau] est cliqué
demander (Donner un entier supérieur à 0) et attendre
mettre [a ▾] à ((réponse) + (1))
mettre [a ▾] à ((a) * (a))
mettre [b ▾] à ((réponse) - (1))
mettre [b ▾] à ((b) * (b))
Dire ((a) - (b))
stop [ce script ▾]
```

Vous pouvez télécharger les scripts : script 1, script 2 et script 3.

Le script 2 calcul $(x-1)^2-(x+1)^2$ sinon

les scripts 1 et 3 correspondent au programme de calcul proposé.

Exercice 2.

On considère une classe composée de 30 élèves. Certains sont enfants uniques, c'est-à-dire n'ayant ni frère ni sœur, d'autres ne le sont pas.

Dans cette classe,

- 40 % des élèves sont des garçons ;
- un tiers des garçons sont des enfants uniques ;
- 25 % des enfants uniques sont des garçons.

1. (a) Déterminer le nombre total de garçons dans cette classe.

Calculons le nombre de garçon, n_g, dans cette classe.

Il s'agit d'appliquer une proportion.

$$n_g = \frac{40}{100} \times 30$$

$$n_g = 12.$$

(b) Déterminer le nombre de garçons qui ne sont pas des enfants uniques.

Déterminer le nombre, n_{gnu}, de garçons qui ne sont pas des enfants uniques.

$\frac{1}{3}$ des garçons sont des enfants uniques donc $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ des garçons ne sont pas de enfants uniques :

$$\begin{aligned} n_{gnu} &= \frac{2}{3} \times n_g \\ &= \frac{2}{3} \times 12 \end{aligned}$$

$$n_{gnu} = 8.$$

(c) Reproduire, sur la copie, le tableau des effectifs de la classe ci-dessous puis le compléter.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique			
Enfant non unique			
Total			30

D'après les questions précédentes :

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique			
Enfant non unique		8	
Total		12	30

On complète alors par addition sur les lignes et les colonnes.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique		4	
Enfant non unique		8	
Total	18	12	30

Puisque 25 %, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ des enfants uniques sont des garçons, il y a donc $4 \times 4 = 16$ enfants uniques.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique		4	16
Enfant non unique		8	
Total	18	12	30

On complète alors par addition sur les lignes et les colonnes.

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique	12	4	16
Enfant non unique		8	14
Total	18	12	30

Finalement :

	Fille	Garçon	Total
Enfant unique	12	4	16
Enfant non unique	6	8	14
Total	18	12	30

2. On choisit au hasard un élève de cette classe.

(a) Calculer la probabilité que cet élève soit un enfant unique. On arrondira le résultat au centième.

Choisissons un modèle probabiliste cohérent avec la situation.
Notons Ω l'ensemble des 30 élèves et munissons-le de l'équiprobabilité (chaque enfant à la même chance d'être choisi).
Notons encore A l'événement « obtenir un enfant unique ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, que l'univers contient 30 issues et que A est réalisé par 16 issues (d'après le tableau précédent) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{16}{30}\\ &= \frac{8}{15}\\ &\approx 0{,}533 \text{ par troncature}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \approx 0{,}53.}$$

(b) Calculer la probabilité que cet élève soit un garçon n'ayant ni frère ni sœur. On arrondira le résultat au centième.

Notons encore B l'événement « obtenir un garçon qui est enfant unique ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, que l'univers contient 30 issues et que B est réalisé par 4 issues (d'après le tableau précédent) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{4}{30}\\ &= \frac{2}{15}\\ &\approx 0{,}133 \text{ par troncature}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \approx 0{,}13.}$$

(c) On sait que l'élève choisi est une fille. Calculer la probabilité qu'elle soit une fille unique.
On arrondira le résultat au centième.

Choisissons un modèle probabiliste cohérent avec la situation.
Notons Ω' l'ensemble des 18 filles et munissons-le de l'équiprobabilité (chaque fille à la même chance d'être choisie).
Notons encore C l'événement « obtenir un enfant unique ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, que l'univers contient 18 issues et que C est réalisé par 12 issues (d'après le tableau précédent) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \frac{12}{19}\\ &= \frac{2}{3}\\ &\approx 0{,}666 \text{ par troncature}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C) \approx 0{,}67.}$$

Il était bien sûr possible de raisonner en parlant de probabilité conditionnelle.

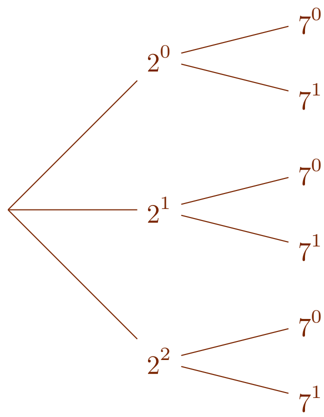
Exercice 3.

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. *Définition : Un nombre parfait est égal à la moitié de la somme de ses diviseurs. Par exemple,* 6 *est parfait car ses diviseurs sont* 1, 2, 3 *et* 6 *et on a :* $1 + 2 + 3 + 6 = 12$ *qui correspond au double de* 6.
   Affirmation 1 : « 28 est un nombre parfait. »

   Déterminons les diviseurs de 28.

   Procédons à sa décomposition en facteurs premiers : $28 = 2^2 \times 7$.



Donc l'ensemble des diviseurs de 28 est $\{1; 7; 2; 14; 4; 28\}$.
Or $\frac{1+7+2+14+4+28}{2} = 28$ donc

L'affirmation 1 est vraie.

2. **Affirmation 2** : « Si un nombre est divisible par 6 et par 9 alors il est divisible par 54. »

   Pour que ce résultat soit vrai il faudrait que 6 et 9 soient premiers ente eux. Ce n'est pas le cas démontrons que l'affirmation est fausse en exhibant un contre-exemple.

   18 est divisible par 6 et par 9 mais il n'est clairement pas divisible par 54.

   L'affirmation 2 est fausse.

3. On augmente la longueur d'un rectangle de 10 % et on diminue sa largeur de 10 %.
   Affirmation 3 : « L'aire du rectangle est inchangée. »

   Nous pouvons penser aux situations dévolution successives pour imaginer que ce ne serait peut être pas vrai.

   Considérons un rectangle dont les côtés mesurent $\ell = 20$ et $L = 30$.
   Si nous détaillons ici le calcul des coefficients multiplicateurs les augmentations et diminutions de 10 % se calculent aisément mentalement.
   Le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 10 % est

$$\begin{aligned} CM_b &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-10}{100} \\ &= 0{,}9 \end{aligned}$$

Celui correspondant à une augmentation de 10 % est

$$\begin{aligned} CM_a &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{10}{100} \\ &= 1{,}1 \end{aligned}$$

Après une diminution de 10 % sa largeur est $\ell' = 0{,}9 \times 20 = 18$ et après une augmentation de 10 % sa longueur est $L' = 1{,}1 \times 30 = 33$.
$\ell \times L = 20 \times 30 = 600$ mais $\ell' \times L' = 18 \times 33 = 594$.
ainsi $\ell \times L \neq \ell' \times L'$.

L'affirmation 3 est fausse.

4. Un rectangle a une longueur de 5 cm et une largeur de 4 cm. On augmente la longueur de 10 % et on diminue la largeur de 10 %.
   Affirmation 4 : « Le périmètre du rectangle diminue. »

   Le périmètre du rectangle originale est

$$\begin{aligned} p &= 2 \times (L + \ell) \\ &= 2\,(5 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) \\ &= 2 \times 9 \text{ cm} \\ &= 18 \text{ cm} \end{aligned}$$

   En procédant comme à la question précédente :

$$\begin{aligned} L' &= 1{,}1 \times L \\ &= 1{,}1 \times 5 \text{ cm} \\ &= 5{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \ell' &= 0{,}9 \times \ell \\ &= 0{,}9 \times 4 \text{ cm} \\ &= 3{,}6 \text{ cm} \end{aligned}$$

D'où le nouveau périmètre

$$\begin{aligned} p' &= 2 \times (L' + \ell') \\ &= 2\,(5{,}5 \text{ cm} + 3{,}6 \text{ cm}) \\ &= 2 \times 9{,}1 \text{ cm} \\ &= 18{,}2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ainsi : $p < p'$.

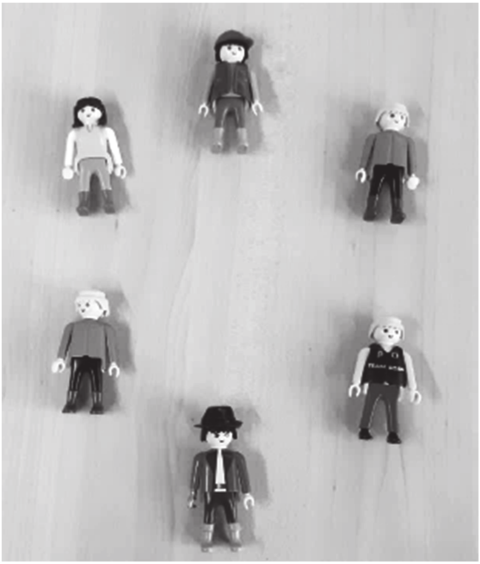
L'affirmation 4 est fausse.

III Troisième partie (14 points).

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

Situation 1.

Un enseignant en classe de grande section présente 6 personnages installés en cercle et demande à 3 élèves d'aller chercher en « un voyage » autant de jetons (« pas plus, pas moins ») que de personnages, sachant que les jetons sont positionnés à une dizaine de mètres des personnages.

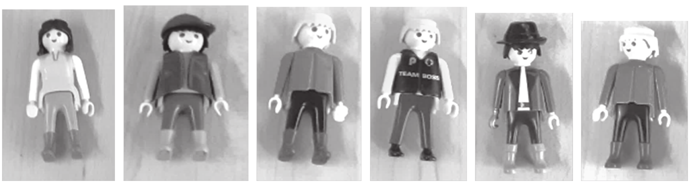


L'enseignant a noté le nombre de jetons apportés lors du premier voyage :

Prénoms des élèves	Nombre de jetons apportés
Mathéo	15
Salomé	7
Fatoulala	6

1. (a) Émettre deux hypothèses sur ce qui a pu conduire Salomé à se tromper.

   (b) Afin d'aider Salomé, le maître propose la situation suivante :

   Expliquer en quoi cette situation pourrait aider cette élève à réussir la tâche proposée.

2. (a) Émettre une hypothèse sur ce qui a pu conduire Mathéo à se tromper.

(b) Proposer une situation qui pourrait aider à vérifier l'hypothèse émise à la question précédente.

3. Proposer une nouvelle tâche que l'enseignant pourrait proposer à Fatoulala, pour lui permettre d'aller plus loin dans ses apprentissages. Justifier cette proposition.

Situation 2.

Un enseignant propose à ses élèves de CM2 l'exercice suivant, issu du manuel « Le nouvel À portée de maths » (Hachette, 2018).

Tracer une figure à partir d'un programme de construction

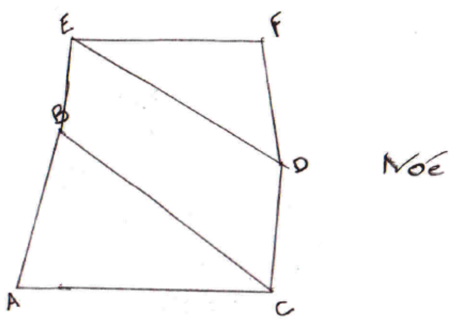
3 • Trace la figure qui correspond à ce programme de construction.

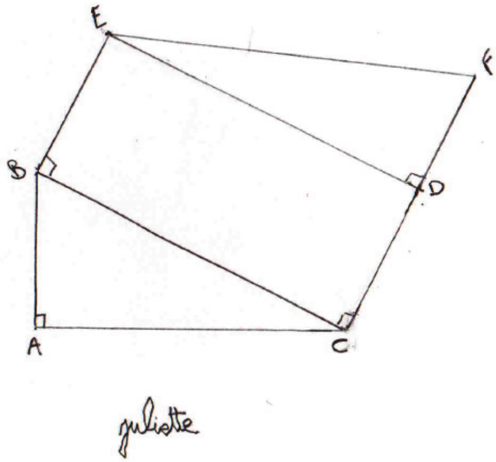
a. Trace un triangle ABC rectangle en A.

b. Trace le rectangle CDEB.

c. Trace le triangle DEF rectangle en D.

Voici 2 productions d'élèves :





1. Analyser les deux productions en terme d'erreurs et de réussites.
2. L'utilisation de papier quadrillé ou pointé pourrait-elle aider Noé ? Justifier la réponse.
3. Donner deux aides, non liées au papier utilisé, qui pourraient être proposées pour Noé.

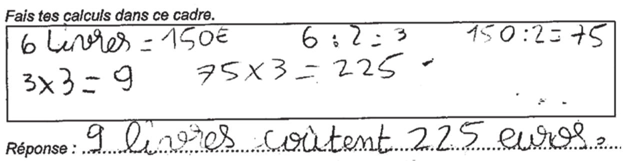
Situation 3.

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves de CM2 par une enseignante.

On commande pour la classe des cahiers et des livres. 6 livres coûtent 150 euros. Combien coûtent 9 livres ?

Voici les réponses de deux élèves : Tama et Hina.

Production de Tama.

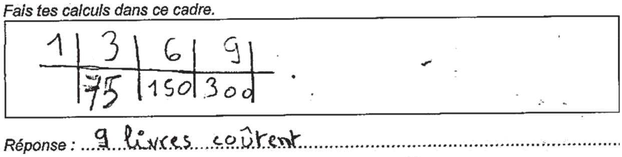

Fais tes calculs dans ce cadre.

6 Livres = 150€ 6 : 2 = 3 150 : 2 = 75

3x3 = 9 75x3 = 225

Réponse : 9 livres coûtent 225 euros.

Production de Hina.


Fais tes calculs dans ce cadre.

1	3	6	9
	75	150	300

Réponse : 9 livres coûtent

1. Quelle est la principale notion mathématique travaillée dans ce problème ?

2. Analyser chacune des deux productions ci-dessus en repérant les réussites et les erreurs éventuelles et en explicitant les propriétés mathématiques mobilisées.

3. Proposer trois procédures permettant à Tama de compléter correctement la case sous le 9 en partant du tableau qu'elle a commencé à compléter et qui est reproduit ci-dessous.

1	3	6	9
	75	150	

4. L'enseignant(e) modifie l'énoncé en demandant de calculer le prix de 8 livres.

   (a) Proposer deux procédures qu'un élève de CM2 pourrait mobiliser pour trouver le prix à payer pour l'achat de ces 8 livres.

   (b) L'enseignant souhaite que les élèves utilisent le passage à l'unité. Proposer une modification à l'énoncé initial qui encourage l'utilisation de cette procédure.

Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 4.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Mme Duplessy, M. Herminet et M. Paltoglou pour leur relecture et leurs corrections.

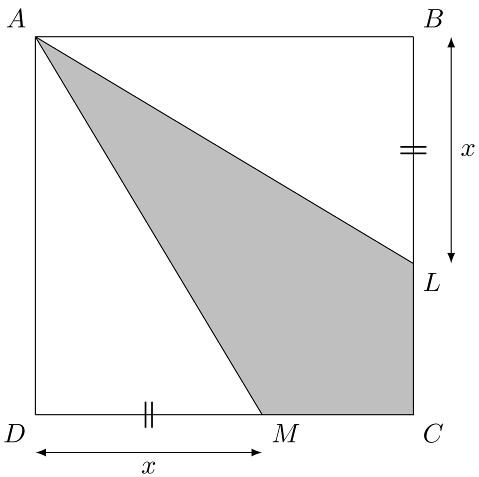
Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Dans ce problème, les figures qui sont dessinées ne sont pas représentées en vraie grandeur.

Partie A.

On souhaite partager un carré $ABCD$ de 10 cm de côté en trois parties comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



L est un point du segment $[BC]$ et M est le point du segment $[CD]$ tel que $DM = BL$. On note x la longueur, en centimètre, du segment $[BL]$.

1. Expliquez pourquoi $0 \leqslant x \leqslant 10$.

   Justifions l'encadrement.

   $M \in [DC]$ et $DC = 10$ donc $0 \leqslant x \leqslant 10$.
   Enfin $DM = x$, donc

   $$\boxed{0 \leqslant x \leqslant 10.}$$

2. Vérifier que si $x = 2$, alors l'aire du quadrilatère grisé $AMCL$ est égale à 80 cm^2.

   Calculons l'aire $\mathscr{A}(ALCM)$ de $ALCM$ lorsque $x = 2$.

La partie grisée n'est pas une figure dont l'aire peut être calculée par une formule que nous serions supposés connaître. Nous allons partir de l'aire du carré $ABCD$ et enlever les aires des parties qui ne sont pas grisées.

* Calculons l'aire du carré $ABCD$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= AB^2\\ &= (10\text{ cm})^2\\ &= 10^2\text{ cm}^2\\ &= 100\text{ cm}^2\end{aligned}$$

* Calculons l'aire du triangle AMD.
  Puisque AMD est rectangle en D :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AMD) &= \frac{1}{2}\times AD\times DM\\ &= \frac{1}{2}\times(10\text{ cm})\times(2\text{ cm})\\ &= \frac{1}{2}\times 10\times 2\text{ cm}\cdot\text{cm}\\ &= 10\text{ cm}^2\end{aligned}$$

* Du fait de la symétrie de la configuration par rapport à (AC) il est clair que $\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(ABL)$.
* Des points précédents nous déduisons :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ALCM) &= \mathscr{A}(ABCD) - \mathscr{A}(AMD) - \mathscr{A}(ABL)\\ &= 100\text{ cm}^2 - 10\text{ cm}^2 - 10\text{ cm}^2\\ &= (100-10-10)\text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } x = 2 \text{ alors } \mathscr{A}(ALCM) = 80\text{ cm}^2.}$$

3. Calculer l'aire du quadrilatère grisé $AMCL$ si $x = \dfrac{3}{5}$.

Calculons $\mathscr{A}(ALCM)$ lorsque $x = \frac{3}{5}$.

Toutes les longueurs étant exprimées en centimètres nous ferons désormais l'économie d'indiquer les unités utilisées.

*

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AMD) &= \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{3}{5} \\ &= 3\end{aligned}$$

*

$$\mathscr{A}(ALCM) = 100 - 3 - 3$$

Si $x = \frac{3}{5}$ alors $\mathscr{A}(ALCM) = 94 \text{ cm}^2$.

4. Montrer que l'aire du quadrilatère grisé $AMCL$, exprimée en centimètre carré, en fonction de x, est égale à $100 - 10x$.

   Exprimons $\mathscr{A}(ALCM)$ en fonction de x.

   procédons comme aux deux questions précédentes

   *

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AMD) &= \frac{1}{2} \times 10 \times x \\ &= 5x\end{aligned}$$

   *

$$\mathscr{A}(ALCM) = 100 - 5x - 5x$$

$\mathscr{A}(ALCM) = 100 - 10x$.

5. Déterminer x pour que les trois parties aient la même aire.

   Nous avons déjà remarqué que les parties AMD et ABL ont la même aire. Il reste à avoir, par exemple, AMD et $ALCM$ de même aire.

   Déterminons x de sorte que $\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(ALCM)$.

   Dire que

$$\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(ALCM)$$

équivaut successivement à :

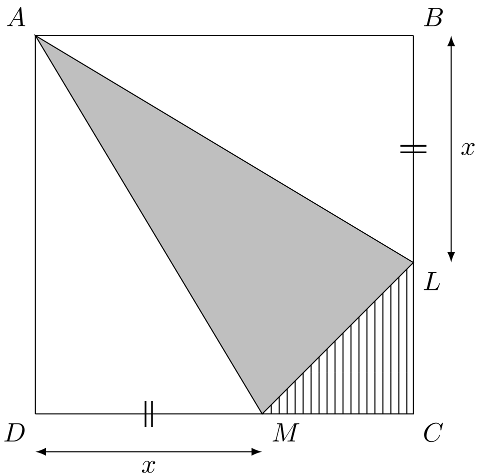
$$\begin{aligned} 5x &= 100 - 10x \\ 5x + 10x &= 100 - 10x + 10x \\ 15x &= 100 \\ \frac{15x}{15} &= \frac{100}{15} \\ x &= \frac{2^2 \times 5^2}{3 \times 5} \\ x &= \frac{2^2 \times 5}{3} \\ x &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

Et comme $\frac{20}{3} = 6{,}666\ldots$ on a bien $0 \leqslant \frac{20}{3} \leqslant 10$.
Nous pouvons donc conclure :

les trois parties ont la même aire si et seulement si $x = \frac{20}{3}$.

Partie B.

Dans cette partie, le triangle hachuré a été supprimé pour obtenir trois triangles ADM, AML et ALB.



1. (a) Vérifier que si $x = 2$, alors l'aire du triangle hachuré MCL est égale à 32 cm^2.

Déterminons l'aire $\mathscr{A}(MCL)$ du triangle MCL lorsque $x = 2$.

Là encore nous ne préciserons pas les unités, les longueurs étant touts exprimées en centimètre.

MCL est rectangle en C donc :

$$\mathscr{A}(MCL) = \frac{1}{2} \times MC \times CL$$

Du fait de la symétrie de la figure, MCL est isocèle en C et donc :

$$\mathscr{A}(MCL) = \frac{1}{2} \times MC^2$$

Puisque $DC = 10$, $DM = x$ et $M \in [DC]$:

$$\mathscr{A}(MCL) = \frac{1}{2} \times (10 - x)^2$$

Comme $x = 2$:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(MCL) &= \frac{1}{2} \times (10 - 2)^2 \\ &= 32\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(MCL) = 32 \text{ cm}^2.}$$

(b) Exprimer l'aire, en centimètre carré, de la partie hachurée MCL en fonction de x.

En reprenant le raisonnement de la question précédente mais sans substituer à x la valeur 2 nous obtenons :

$$\boxed{\mathscr{A}(MCL) = \tfrac{1}{2}(10 - x)^2 \text{ quelque soit } x \in [0; 10].}$$

(c) Montrer que l'aire du triangle grisé AML, exprimée en centimètre carré, est égale à $50 - \frac{x^2}{2}$.

Déterminons $\mathscr{A}(AML)$.

Remarquons que

$$\mathscr{A}(AML) = \mathscr{A}(AMCL) - \mathscr{A}(MCL)$$

Compte tenu des expressions obtenues pour $\mathscr{A}(AMCL)$ (question A.4) et $\mathscr{A}(MCL)$ (question précédente), nous en déduisons :

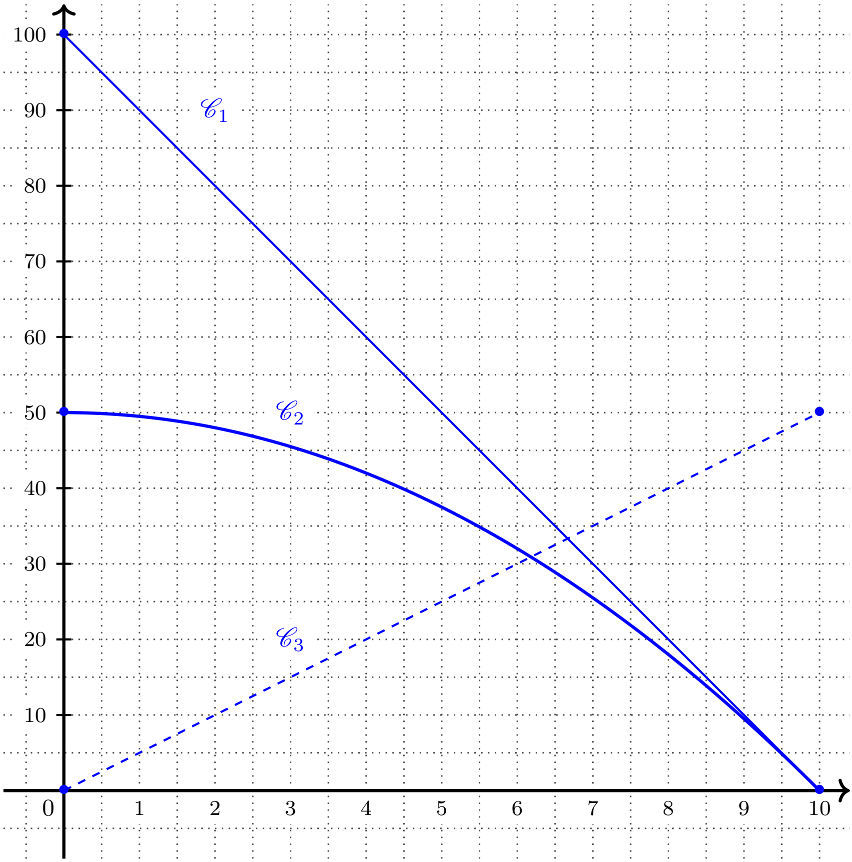
$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(AML) &= [100 - 10x] - \left[\frac{1}{2}(10-x)^2\right] \\
&= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2}\left(10^2 - 2 \times 10 \times x + x^2\right)\right] \\
&= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - 20x + 100\right)\right] \\
&= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2} \times x^2 - \frac{1}{2} \times 20x + \frac{1}{2} \times 100\right] \\
&= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2}x^2 - 10x + 50\right] \\
&= 100 - 10x - \frac{1}{2}x^2 + 10x - 50 \\
&= 50 - \frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0;10],\ \mathscr{A}(MCL) = 50 - \frac{x^2}{2}.}$$

2. On a représenté dans le repère ci-dessous les fonctions f, g et h définies pour x entre 0 et 10 par :

$$f(x) = 5x, \quad g(x) = 100 - 10x, \quad h(x) = 50 - \frac{x^2}{2}.$$

On obtient les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.



(a) Chacune des fonctions f, g et h permet de déterminer, en fonction de x, l'aire d'un des polygones ADM, $AMCL$ et AML de la figure précédente. Associer à chaque fonction le polygone dont elle permet de déterminer l'aire. Justifier.

Comme nous l'avons établi en résolvant la question A.4 :

$f$est l'aire de AMD.

D'après la question A.4 :

g est l'aire de $AMCL$.

D'après la question B.1.c :

h est l'aire de AML.

(b) Associer chaque courbe $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ à la fonction quelle représente. Justifier.

Identifions la courbe représentative de chaque fonction.

* Première méthode : en reconnaissant la nature de la fonction à partir de son expression algébrique.

  Nous pouvons reconnaître les courbe représentatives à partir des natures des fonctions.

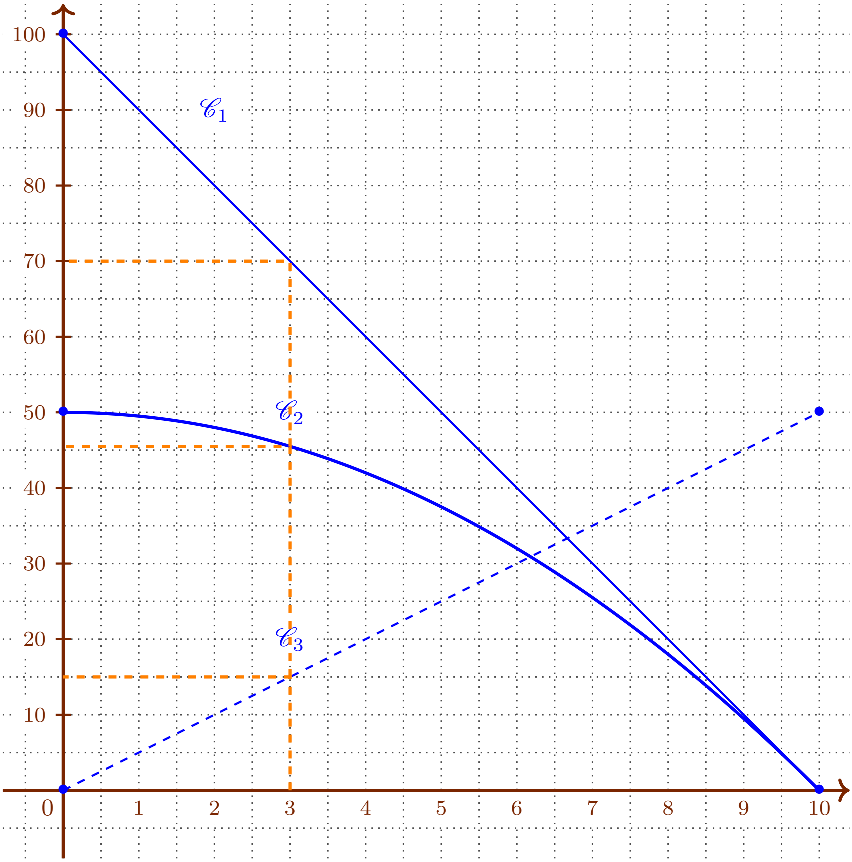
  h est une fonction polynomiale de degré deux donc sa courbe représentative est une parabole. Il ne peut s'agir que de $\mathscr{C}_2$.

  f et g sont des fonctions affines donc leurs courbes représentatives sont des droites : $\mathscr{C}_1$ ou $\mathscr{C}$. De plus le coefficient directeur de f est positif (5) alors que celui de g est négatif -10) donc la courbe représentative de f monte et celle de g descend.

* Tester un calcul d'image.

  En calculant nous obtenons : $f(3) = 5\times 3 = 15$, $g(3) = 100-10\times 3 = 70$ et $h(3) = 50 - \frac{3^2}{2} = 45{,}5$.

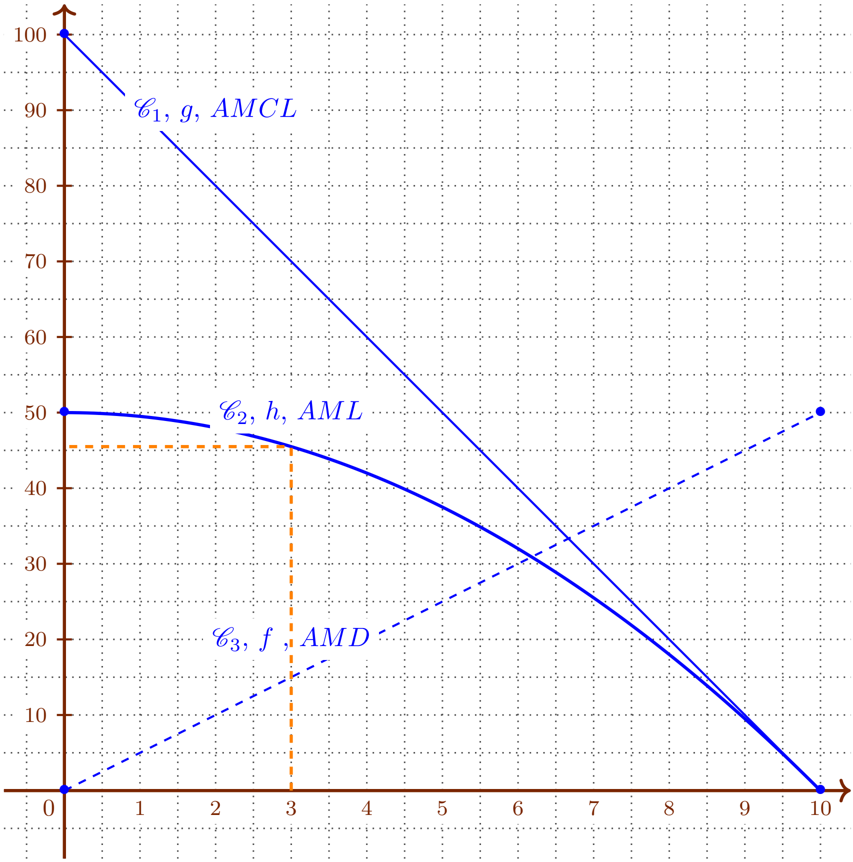
  Par lecture graphique nous pouvons identifier les courbes correspondant à ces calculs d'images.



Les courbes représentatives des fonctions f, g et h sont respectivement $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

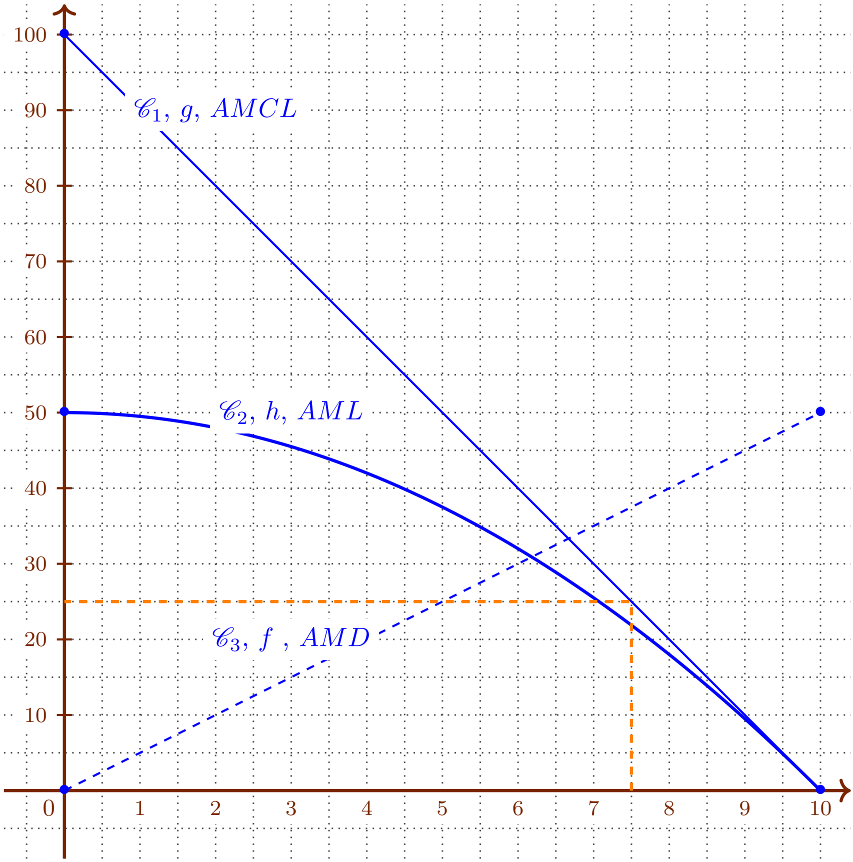
(c) Déterminer graphiquement l'aire du triangle grisé AML pour $x = 3$.

En reprenant les résultats des deux questions précédentes nous pouvons annoter le graphique.



L'aire de AML égale 45 cm^2 lorsque $x = 3$.

(d) Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle l'aire du quadrilatère grisé $AMCL$ de la partie A est égale à 25 cm^2 ?

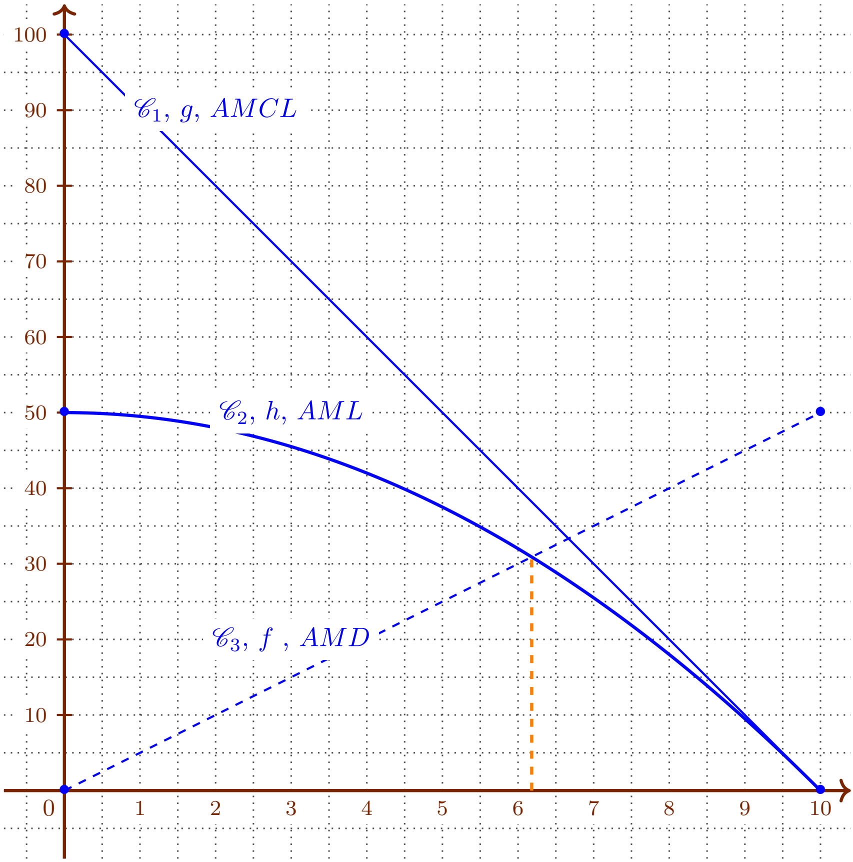


L'aire de $AMCL$ égale 25 cm^2 lorsque $x = 7{,}5$.

(e) Déterminer graphiquement la valeur de x pour que les trois triangles ABL, ADM et AML de la partie B aient la même aire. Justifier.

ABL et ADM ont la même aire donc la question pourrait être : déterminer x pour que les aires de AMD et AML soient égales.

Or ces aires sont égales lorsque les fonctions les représentant ont la même image ce qui correspond aux points d'intersections de leur courbes représentatives :

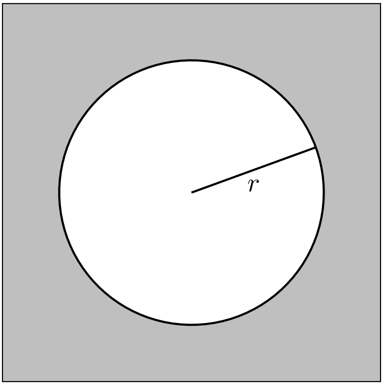


et donc :

les aires de ABL, ADM et AML sont égales lorsque $x = 6{,}2$.

Partie C.

On veut maintenant partager un carré de 10 cm de côté en deux parties. L'une d'entre elles est un disque intérieur ayant pour centre celui du carré et pour rayon r. La seconde partie est l'extérieur du disque, grisée sur la figure ci-dessous.



1. Entre quelles valeurs le rayon r peut-il varier ? Justifier.

   Le plus grand diamètre possible pour le cercle est la longueur du côté du carré, c'est-à-dire 10 cm, par conséquent

   $$\boxed{0 \leqslant r \leqslant 5.}$$

2. Déterminer pour quelle valeur du rayon r, exprimée en centimètre, l'aire du disque est égal au quart de celle du carré. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

   Notons $\mathscr{A}_1$ l'aire du carré et $\mathscr{A}_2$ celle du cercle.

   Déterminons r tel que : $\mathscr{A}_2 = \frac{1}{4}\mathscr{A}_1$.

   $$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{4}\mathscr{A}_1$$

   équivaut successivement à

   $$\begin{aligned} \pi r^2 &= \frac{1}{4} \times 10^2 \\ \pi r^2 &= 25 \\ \frac{\pi r^2}{\pi} &= \frac{25}{\pi} \\ r^2 &= \frac{25}{\pi} \end{aligned}$$

Puisque r est une longueur c'est un nombre positif donc :

$$r = \sqrt{\frac{25}{\pi}}$$
$$r = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{\pi}}$$

Pour que l'aire du cercle soit le quart de l'aire du carré il faut que $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

En arrondissant au centième :

$r \approx 2{,}82$ cm.

3. Pour déterminer l'aire du disque dans le carré en fonction de son rayon, on réalise avec un tableur la feuille de calcul suivante :

	A	B
1	**Rayon**	**Aire**
2	0	0
3	0,5	0,78539816
4	1	3,14159265
5	1,5	7,06858347
6	2	12,5663706
7	2,5	19,6349541
8	3	28,2743339
9	3,5	38,48451
10	4	50,2654825
11	4,5	63,6172512
12	5	78,5398163

(a) Quelle formule permettant de calculer l'aire du disque doit être écrite dans la cellule B2 pour être ensuite copiée par glissement vers le bas ?
Note : on pourra utiliser la fonction PI() du tableur qui renvoie une valeur approchée du nombre π.

= PI() ∗ A2 ∧ 2.

(b) Déduire de ce tableau, un encadrement d'amplitude minimale de la valeur r_0 du rayon du disque pour que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée.

Déterminons un encadrement de r_0.

Dire que l'aire du disque égale l'aire du carré signifie qu'elle doit être égale à $\frac{10^2}{2} = 50$.
En considérant cette partie :

9	3,5	38,48451
10	4	50,2654825

nous voyons que :

$$\boxed{3{,}5 \leqslant r_0 \leqslant 4.}$$

(c) Déterminer la valeur exacte de r_0, exprimée en centimètre, puis donner l'arrondi au centième.

Déterminons r_0 tel que : $\mathscr{A}_2 = \frac{1}{2}\mathscr{A}_1$.

$$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{2}\mathscr{A}_1$$

équivaut successivement à

$$\pi r_0^2 = \frac{1}{2} \times 10^2$$
$$\pi r_0^2 = 50$$
$$\frac{\pi r_0^2}{\pi} = \frac{50}{\pi}$$
$$r_0^2 = \frac{50}{\pi}$$

Puisque r_0 est une longueur c'est un nombre positif donc :

$$r_0 = \sqrt{\frac{50}{\pi}}$$
$$r_0 = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{\pi}}$$
$$r_0 = \frac{\sqrt{2\times 5^2}}{\sqrt{\pi}}$$
$$r_0 = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5^2}}{\sqrt{\pi}}$$

Pour que l'aire du cercle soit le quart de l'aire du carré il faut que $r_0 = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$.

En arrondissant au centième :

$r_0 \approx 3{,}99$ cm.

(d) Déterminer la valeur exacte r_1 du rayon du disque telle que l'aire du disque soit égale au tiers de l'aire de la surface grisée et donner son arrondi au dixième de millimètre.

Déterminons r_1 tel que : $\mathscr{A}_2 = \frac{1}{3}\left(\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2\right)$.

$$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{3}\left(\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2\right)$$

équivaut successivement à

$$\pi r_1^2 = \frac{1}{3}\times\left(10^2 - \pi r_1^2\right)$$
$$\pi r_1^2 = \frac{1}{3}\times 100 - \frac{1}{3}\pi r_1^2$$
$$\pi r_1^2 + \frac{1}{3}\pi r_1^2 = \frac{100}{3} - \frac{1}{3}\pi r_1^2 + \frac{1}{3}\pi r_1^2$$
$$\frac{4}{3}\pi r_1^2 = \frac{100}{3}$$
$$\frac{3}{4\pi}\times\frac{4\pi r_1^2}{3} = \frac{3}{4\pi}\times\frac{100}{3}$$
$$r_1^2 = \frac{100}{4\pi}$$

Puisque r_1 est une longueur c'est un nombre positif donc :

$$r_1 = \sqrt{\frac{100}{4\pi}}$$
$$r_1 = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4\pi}}$$
$$r_1 = \frac{10}{\sqrt{4} \times \sqrt{\pi}}$$

Pour que l'aire du cercle soit le tiers de l'aire du carré il faut que $r_1 = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

En arrondissant au centième :

$r_1 \approx 2{,}82$ cm.

II Deuxième partie (13 points).

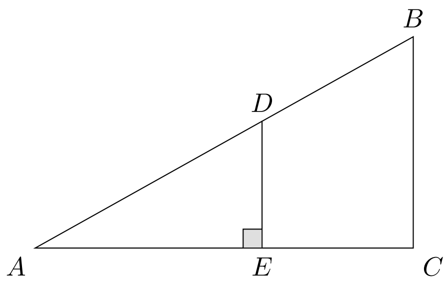
Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, D et E sont des points des côtés $[AB]$ et $[AC]$ tels que :

$$AD = 9 \text{ cm}, \quad DB = 6 \text{ cm}, \quad AC = 10 \text{ cm}, \quad EC = 4 \text{ cm}.$$



Affirmation 1 : « Le triangle ABC est rectangle en C. »

Un angle droit est visible sur la figure et on nous demande de vérifier qu'un triangle est rectangle. Il semble naturel de penser au théorème de Pythagore. Une rapide tentative nous montre que nous manquons de données pour ce théorème.

La figure évoque par contre une configuration de Thalès et même la configuration classique d'un agrandissement de figure.

* Configuration de Thalès. Les points A, D, B et A, E, C sont alignés dans cet ordre.
* Hypothèses pour la réciproque du théorème de Thalès.
  Nous avons d'une part

$$\begin{aligned}\frac{AE}{AC} &= \frac{AC - AE}{AC}\\ &= \frac{10-4}{10}\\ &= \frac{6}{10}\\ &= \frac{2\times 3}{2\times 5}\\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

  et d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{AD}{AB} &= \frac{AD}{AD+DB}\\ &= \frac{9}{9+6}\\ &= \frac{9}{15}\\ &= \frac{3\times 3}{3\times 5}\\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

  donc $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$.

Nous déduisons des deux points précédents, d'après la réciproque du théorème de Thalès que $(DE) \parallel (BC)$.

Comme de plus $(DE) \perp (AC)$ nous en déduisons $(BD) \perp (AC)$.

L'affirmation 1 est vraie.

2. **Affirmation 2** : « La somme de deux nombres entiers impairs consécutifs ne peut pas être un nombre premier. »

   Un nombre premier est un nombre qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Quelques essais permettent de remarquer que la somme de deux nombres impaires consécutifs est toujours divisible par 2.

   Soient m et n deux nombres entiers impairs consécutifs.
   nous avons alors :

$$\begin{aligned} m + n &= m + (m + 2) \\ &= 2m + 2 \\ &= 2 \times m + 2 \times 1 \\ &= 2(m + 1) \end{aligned}$$

   Donc $m + n$ est divisible par 2. Par conséquent $m + n$ n'est pas premier.

   L'affirmation 2 est vraie.

3. On suppose qu'une voiture perd chaque année 20 % de sa valeur.
   Affirmation 3 : « Dans 5 ans, la voiture vaudra encore plus d'un tiers de sa valeur initiale. »

   Pour déterminer l'évolution globale correspondant à des évolutions successives nous allons utiliser les coefficients multiplicateurs.

   Déterminons le taux d'évolution globale t_g en cinq ans.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 20 % est

$$\begin{aligned} CM_a &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-20}{100} \\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Donc le coefficient multiplicateur global correspondant à 5 baisses de 20 % est

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_a \times CM_a \times CM_a \times CM_a \times CM_a \\ &= CM_a^5 \\ &= 0{,}8^5 \\ &= 0{,}32768 \end{aligned}$$

Nous en déduisons le taux d'évolution global :

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM_g - 1) \\ &= 100 \times (0{,}32768 - 1) \\ &= -67{,}232 \end{aligned}$$

La valeur de la voiture a diminuée de 67,232 %. Plus que 66,666... % car, en effet $\frac{1}{3} = 0{,}666\ldots$

L'affirmation 3 est fausse.

4. Dans mon équipe, les trois quarts des joueurs sont mineurs et le tiers des majeurs a plus de 25 ans.
   Affirmation 4 : « Un équipier sur six a entre 18 et 25 ans. »

   Un quart des joueurs sont majeurs et deux tiers de ce quart à moins de 25 ans donc la proportion de personnes ayant entre 18 et 25 ans est :

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 2.

Dans une classe de 28 élèves, on souhaite comparer les tailles des filles et des garçons. Voici les données dont on dispose :

Taille des treize filles en centimètre : 149 155 161 142 167 163 157 150 165 152 161 159 160
Taille des garçons : Toutes les tailles sont des nombres entiers de centimètres et il n'y a pas deux garçons qui ont la même taille. On connaît également les indicateurs suivants : Étendue : 29 cm Moyenne : 159 cm Médiane : 161 cm.

1. Calculer l'écart, en centimètre, entre la taille moyenne des filles et la taille moyenne des garçons.

   Déterminons l'écart, $\overline{e}$, entre la taille moyenne des filles, $\overline{x}_f$, et la taille moyenne des garçons, $\overline{x}_g$.

   Par définition de la moyenne :

$$\begin{aligned}\overline{x}_f &= \frac{149 + 155 + 161 + \cdots + 160}{13} \\ &= 157\end{aligned}$$

   D'où

$$\begin{aligned}\overline{e} &= \overline{x}_g - \overline{x}_f \\ &= 159 - 157\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{e} = 2 \text{ cm.}}$$

2. Dans la classe, l'élève de plus petite taille mesure 140 cm. Quelle est la taille de l'élève le plus grand ?

   Déterminons le max de la classe.

   Puisque la plus petite fille mesure 142 cm c'est donc un garçon qui mesure 140 cm.

L'étendue chez les garçons étant de 29 cm, le plus grand garçon mesure 140 cm + 29 cm = 169 cm.

Comme la plus grande fille mesure 167 cm nous pouvons conclure.

$$\boxed{\text{max} = 169 \text{ cm.}}$$

3. Dans la classe, combien d'élèves mesurent 162 cm ou plus ?

Remarquons que 3 filles mesurent 162 cm ou plus.

Il y a $28 - 13 = 15$ garçons.

De plus la médiane est de 161 cm ce qui signifie que $\frac{15}{2} + 0{,}5 = 8$ garçons ont une taille supérieure ou égale à 161 cm.

Or tous les garçons ont des tailles distinctes donc il y a 7 garçons dont la taille est supérieure ou égale à 162 cm.

En regroupant filles (3) et garçons (7) :

$$\boxed{\text{il y a 10 élèves qui mesurent plus de 162 cm.}}$$

4. Calculer la taille moyenne, en centimètre, arrondie au millimètre, des élèves de cette classe.

Déterminons la moyenne $\overline{x}$.

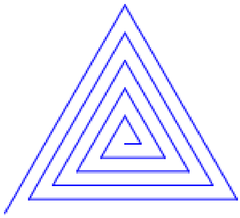
Il s'agit d'un calcul de moyenne de moyennes. Il faut être prudent et ne pas oublier de prendre en compte l'effectif correspondant à la moyenne.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{13 \times \overline{x}_f + 15 \times \overline{x}_g}{28} \\ &= \frac{13 \times 157 + 15 \times 159}{28} \\ &= \frac{2213}{14} && \approx 158{,}07142\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} \approx 158{,}1 \text{ cm.}}$$

Exercice 3.

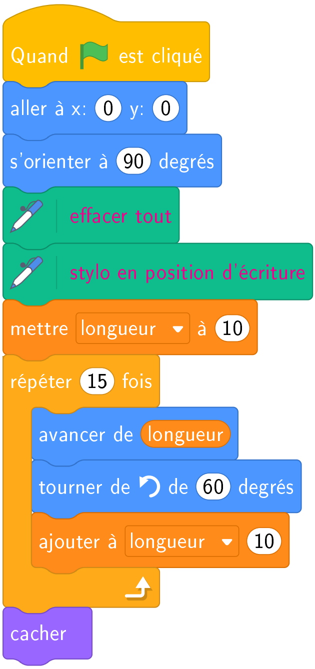
Un élève veut obtenir la figure ci-contre à l'aide du logiciel de programmation Scratch :

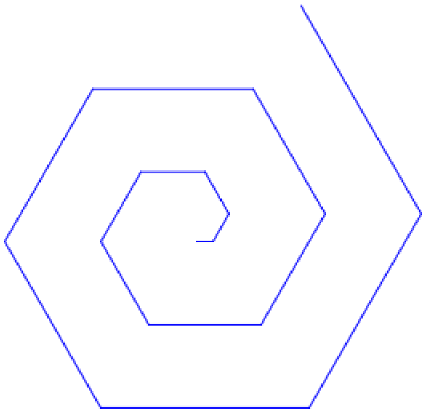


Le plus petit segment mesure 10 pixels et chaque segment mesure 10 *pixels de plus que le précédent.*

Pour télécharger le programme Scratch il suffit de cliquer dessus.

1. Un élève écrit le programme suivant et obtient la figure ci-dessous.





Que doit-il modifier dans son programme pour obtenir la figure attendue ? Aucune justification n'est attendue.

2. Quelle est la longueur, exprimée en pixel, du dernier segment tracé ?

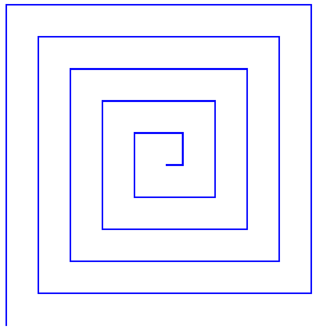
   La longueur suit une progression arithmétique (on parle de suite arithmétique) de raison 10 : à chaque étape la longueur variable est augmentée de 10.

   La valeur initiale de la *longueur* est 10 puis dans la boucle elle est augmentée 15 fois de 10. Autrement dit la *longueur* du dernier segment tracé est :

$$longueur = 10 + 15 \times 10$$

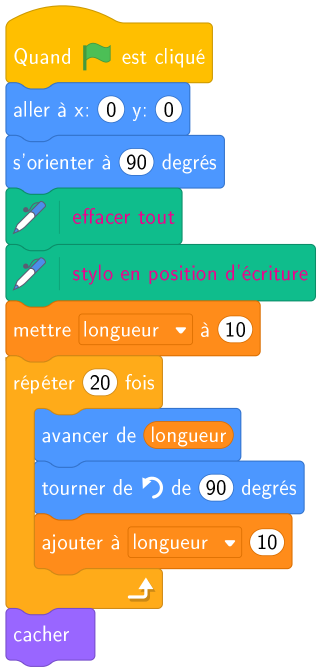
   La longueur du dernier segment est 160 pixels.

3. Que doit-on modifier dans le programme précédent pour obtenir la spirale suivante ?



Le plus petit segment mesure 10 *pixels et chaque segment mesure* 10 *pixels de plus que le précédent.*

Voici une modification possible :



III Troisième partie (14 points).

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

Situation 1.

Extrait du Bulletin officiel n° 31 du 30-7-2020 pour le cycle 3 : « connaître des procédures élémentaires de calcul, notamment : multiplier par 5*, par* 25*, par* 50*, par* 0,1*, par* 0,5 *».*

Dans le cadre d'une séance de calcul mental, un enseignant propose à des élèves de CM1 de revenir sur les procédures qu'ils ont utilisées pour effectuer le calcul : 5×14. Ci-dessous sont présentées les productions de Paco, Léa, Julie et Ali.

Paco	**Léa**
$5 \times 4 = 20$ $5 \times 1 = 5 + 2 = 7$ $14 \times 5 = 70$	$10 \times 5 = 50$ $11 \times 5 = 50$ $12 \times 5 = 60$ $13 \times 5 = 65$ $14 \times 5 = 70$
Julie	**Ali**
$14 + 14 + 14 + 14 + 14 = 70$	$14 \times 5 = 70$ J'ai trouvé ce résultat car j'ai fait $5 \times 10 + 5 \times 4 = 70$

1. Pour chacun des quatre élèves, analyser les procédures et expliciter les faits numériques sollicités.

2. Que peut proposer l'enseignant pour encourager Julie à abandonner sa procédure additive ?

3. Indépendamment des nombres en jeu, comment l'enseignant peut-il procéder pour introduire la procédure suivante : $5 \times 14 = 10 \times 14 : 2$?

4. Proposer une trace écrite à faire noter dans les cahiers lors de l'institutionnalisation de la procédure introduite dans la question 3.

Situation 2.

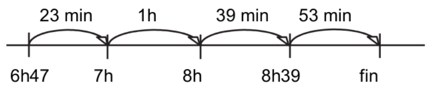
Une enseignante de CM2 propose le problème suivant à ses élèves :
« Un touriste prend un train à Paris à 6 h 47, le train s'arrête une première fois en gare de Bourg-en-Bresse d'où il repart à 8 h 39. Le train arrive en gare de Bellegarde-sur-Valserine 53 minutes plus tard. Quelle a été la durée totale du voyage ? »

Matéo

$$\begin{array}{r} 8\text{ h }{}_1 39 \\ -\ \underline{6{}_1\text{h } 47} \\ \cancel{1}\text{ h }\cancel{9}2 \\ 2 \quad\;\; 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2\text{ h } 32 \\ +\ \underline{\quad\;\; 53} \\ \cancel{2}\text{ h }\cancel{8}5 \\ 3 \quad\;\; 2 \end{array}$$

La durée totale du voyage est 3 h 25.

Lucille



$$\begin{array}{r} {}^1\;\; \\ 23 \\ +\ 39 \\ +\ \underline{53} \\ 115 \end{array} \qquad\qquad 115 - 60 = 55$$

La durée est 2 h 55.

Léa

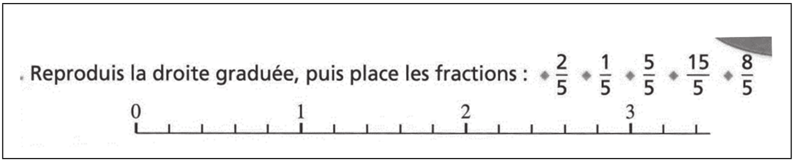
$$\begin{array}{r} 8\text{ h}\overset{1}{3}9 \\ +\ \underline{\quad\;\; 53} \\ \cancel{8}\text{ h }\cancel{9}2 \\ 9 \quad\;\; 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 9\text{ h } 32 \\ -\ \underline{6\text{ h } 47} \\ 3\text{ h } 15 \end{array}$$

La durée totale du voyage est 3 h 15.

1. Dans un tableau, analyser chacune des 3 productions d'élèves en termes de réussites et d'erreurs.
2. Quelle aide peut-on apporter à Lucille pour qu'elle comprenne et remédie à son ou ses erreur(s) ?
3. Parmi les procédures utilisées par ces 3 élèves, laquelle privilégier pour une mise en commun en classe de CM2 ? Justifier ce choix.

Situation 3.

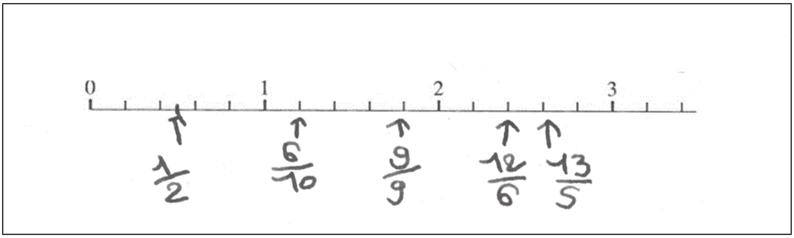
1. Voici une situation proposée par le manuel « Pour comprendre les maths » - Hachette éducation - CM1 :



Cet exercice a été réussi par l'ensemble des élèves d'une classe de CM1. L'enseignant propose cette même situation avec les fractions :

$$\frac{13}{5};\ \frac{6}{10};\ \frac{12}{6};\ \frac{1}{2};\ \frac{9}{9}$$

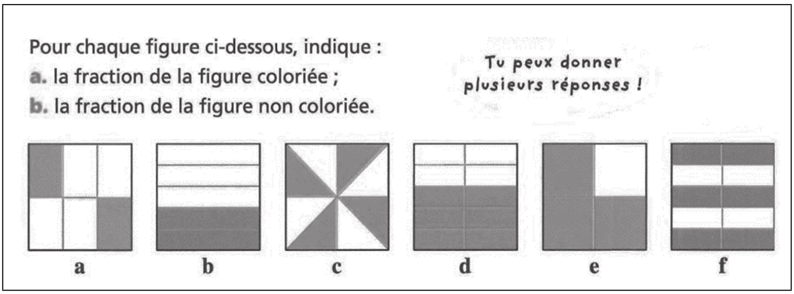
Voici les réponses de Léo :



(a) Analyser les réponses proposées par Léo, en repérant ses erreurs et réussites.

(b) Expliquer la différence de réussites aux deux tâches proposées.

2. Voici une nouvelle situation extraite du même manuel :



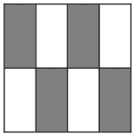
(a) Donner un intérêt et une limite de cet exercice par rapport à l'exercice proposé à la question 1 précédente.

(b) L'enseignant propose de comparer les figures **e**, **g** et une nouvelle figure **h**.

e g h

Quel est l'intérêt de proposer ces trois figures ?

(c) L'enseignant décide ensuite de proposer la figure **i**.



i

Lilou trouve $\frac{4}{8}$. Tom dit : « ce n'est pas possible car c'est la figure **c** et elles ne sont pas pareilles. »
Comment l'enseignant peut-il amener Tom à comprendre que son affirmation est fausse ?

Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 5.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

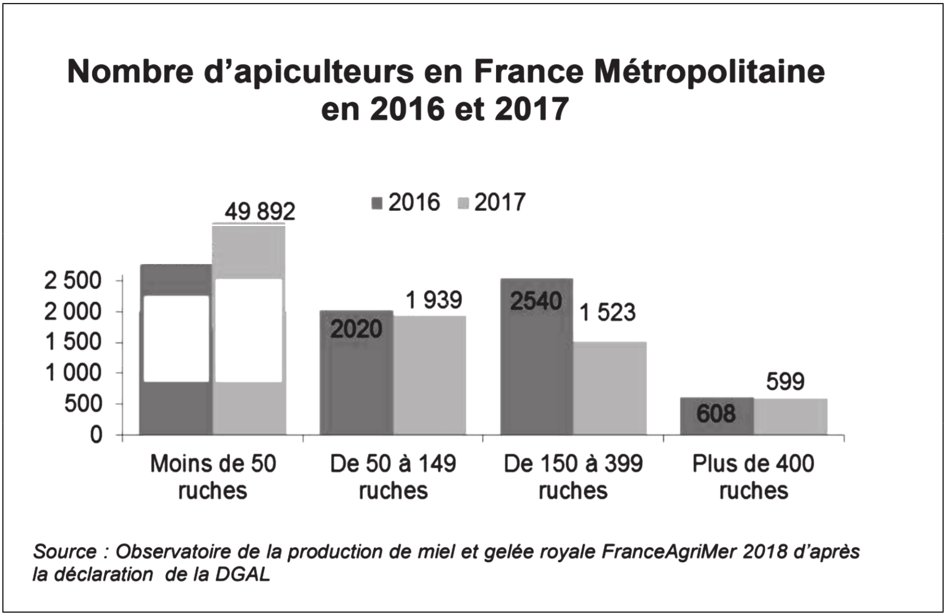
Merci à M. Langlois, Mme Schulz et M. Herminet pour leurs corrections.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Partie A.

Voici un graphique présentant le nombre d'apiculteurs en France métropolitaine :



Extrait de « France-Agricole-FranceAgriMer-MIEL-2018-Observatoire miel et GR 2017 »

1. (a) Donner le nombre d'apiculteurs qui possédaient entre 150 ruches et 399 ruches en France métropolitaine en 2017.

   1 523 apiculteurs possédaient entre 150 et 399 ruches en 2017.

   (b) Donner le nombre total d'apiculteurs en 2017 en France métropolitaine.

   $49\,892 + 1\,939 + 1\,523 + 599 = 53\,953$.

   En 2017 il y avait 53 953 apiculteurs.

   (c) Donner le nombre d'apiculteurs qui possédaient entre 50 ruches et 399 ruches en France métropolitaine en 2016.

   $2\,020 + 2\,540 = 4\,560$.

   En 2016 il y avait 4 560 apiculteurs avaient entre 50 et 399 ruches.

2. (a) Expliquer pourquoi la partie du diagramme concernant les apiculteurs possédant moins de 50 ruches n'est pas représenté de la même façon que les autres parties.

Il y a, approximativement 20 fois plus d'apiculteurs ayant moins de 50 ruches que dans les autres classes.

> Le choix de la représentation découle de la disproportion dans le nombre d'apiculteurs dans cette classe.

(b) Pour les apiculteurs ayant moins de 50 ruches, le pourcentage d'augmentation entre 2016 et 2017 a été de 10,4 %.
Calculer le nombre d'apiculteurs en 2016 dans cette catégorie.

Calculons le nombre, n_{2016}, d'apiculteurs en 2016.

Nous devons retrouver la valeur initiale, avant évolution. Pour cela nous allons utiliser le coefficient multiplicateur réciproque, qui n'est autre que l'inverse du coefficient multiplicateur de l'évolution.

Le coefficient multiplication correspondant à une augmentation de 10,4 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{10,4}{100} \\ &= 1,104 \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$n_{2016} \times CM = n_{2017}.$$

Donc :

$$n_{2016} = CM_r n_{2017},$$

où $CM_{=}\frac{1}{CM}$ est le coefficient multiplicateur réciproque.
Enfin :

$$\begin{aligned} n_{2016} &= \frac{1}{1,104} \times 49\,892 \\ &\approx 45\,192,02 \end{aligned}$$

> 45 192 apiculteurs avaient moins de 50 ruches en 2016.

3. Calculer le pourcentage d'évolution du nombre d'apiculteurs possédant au moins 150 ruches de 2016 à 2017, on arrondira le résultat au dixième d'unité de pourcentage.

   Calculons le taux d'évolution $t_{16\to17}$ du nombre d'apiculteurs possédant au moins 150 ruches ente 2016 et 2017.

   Le nombre d'apiculteurs ayant au moins 150 ruches en 2016 est

$$\begin{aligned} V_{16} &= 2540 + 608 \\ &= 3148 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{17} &= 1523 + 599 \\ &= 2122 \end{aligned}$$

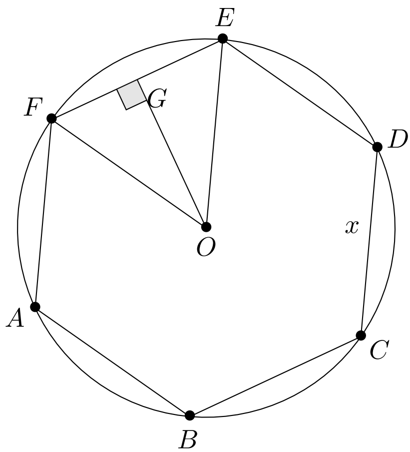
$$\begin{aligned} t_{16\to17} &= \frac{V_{17} - V_{16}}{V_{16}} \times 100 \\ &= \frac{2122 - 3148}{3148} \times 100 \\ &\approx -3259I1 \end{aligned}$$

> $t_{16\to17} \approx -32{,}6$ %. Autrement dit le nombre d'apiculteurs a diminué de 32,6 %.

Partie B.

Dans une ruche, le miel est stocké par les abeilles dans des alvéoles. On considère que l'entrée de ces alvéoles a la forme d'un hexagone régulier, c'est-à-dire d'un hexagone non croisé, ayant tous ses côtés de même longueur et tous ses angles de même mesure.

1. Soit l'hexagone régulier $ABCDEF$. On note x la longueur d'un de ses côtés. Cet hexagone est inscrit dans un cercle de centre O.



(a) Montrer que le triangle FOE est un triangle équilatéral.

Démontrons que FOE est équilatéral.

FOE est équilatéral si et seulement si FOE est isocèle en O et $\widehat{EOF} = 60°$.

* $[OF]$ et $[OE]$ sont des rayons du cercle donc FOE est isocèle en O.
* Puisque l'hexagone est régulier $\widehat{EOF} = \frac{1}{6} \times 360° = 60°$.

FOE est équilatéral.

On admet que l'aire d'un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur x est $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

(b) Déterminer l'aire de l'hexagone $ABCDEF$ en fonction de x.

Déterminons l'aire $\mathscr{A}_1$ de l'hexagone.

L'hexagone est constitué de 6 triangles équilatéraux tous isométriques à FOE. Donc

$$\mathscr{A}_1 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3}x^2.}$$

(c) La périmètre de l'hexagone régulier vaut 18 mm. Montrer que l'aire de cet hexagone, arrondie au millième près, vaut 0,234 cm^2.

Calculons $\mathscr{A}_1$.

Le périmètre de l'hexagone est 18 mm, autrement dit

$$6x = 18 \text{ mm}$$

ce qui équivaut successivement à :

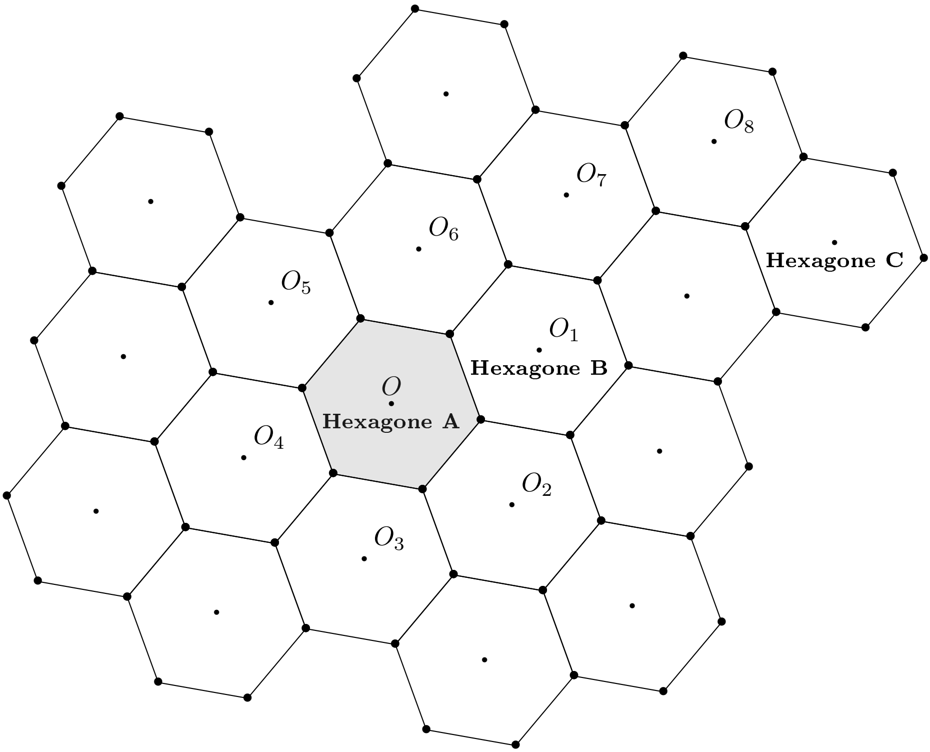
$$\begin{aligned} \frac{6x}{6} &= \frac{18 \text{ mm}}{6} \\ x &= \frac{18}{6} \text{ mm} \\ x &= 3 \text{ mm} \end{aligned}$$

Avec la formule de la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_1 &= \frac{3}{2}\sqrt{3}\,(3 \text{ mm})^2 \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{3} \times 3^2 \text{ mm}^2 \\ &= \frac{27}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{100} \text{ cm}^2 \\ &\approx 0{,}2338 \text{ cm}^2 \quad \text{en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 \approx 0{,}234 \text{ cm}^2.}$$

2. Les abeilles utilisent cette forme hexagonale régulière pour paver le plan :



(a) Caractériser trois transformations qui permettent de passer de l'**Hexagone A** à l'**Hexagone B**.

On peut passer de l'hexagone **A** à l'hexagone **B** par

- la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$,
- La symétrie centrale de centre le milieu de $[OO_1]$,
- la symétrie axiale d'axe $[O_2O_6]$.

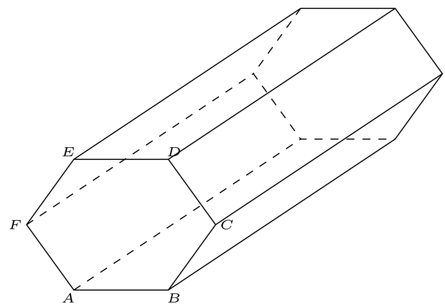
(b) Caractériser une transformation qui permet de passer de l'**Hexagone A** à l'**Hexagone C**.

On peut passer de l'hexagone **A** à l'hexagone **C** par

la translation de vecteur $3\overrightarrow{OO_1}$.

3. On admet qu'une alvéole a la forme d'un prisme régulier à base hexagonale, et est ouverte sur une face pour permettre le passage de l'abeille.

   On admet que la partie visible de chacune des alvéoles est un hexagone régulier dont le côté mesure 3 mm et que la profondeur des alvéoles, notée h, mesure 11,5 mm.



   (a) Montrer que la contenance d'une alvéole est environ 270 mm^3.

   Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ d'une alvéole.

   Puisque l'alvéole à une forme de prisme son volume est

$$\mathscr{V}_1 = \mathscr{B} \times h, \quad \text{ou } \mathscr{B} \text{ est l'aire de la base.}$$

   Or la base est ici hexagonale, donc, d'après la quesion B.1.(b) :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= \frac{3}{2}\sqrt{3}\,(3\text{ mm})^2 \times 11{,}5\text{ mm}\\ &= \frac{3}{2}\sqrt{3} \times 3^2 \times 11{,}5\text{ mm}^3\\ &\approx 268{,}90089\text{ mm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_1 \approx 270\text{ mm}^3.}$$

   (b) En déduire la contenance d'une alvéole en millilitre.

$$\begin{aligned}1\ \text{mm}^3 &= 1 \times \left(\frac{1}{100}\ \text{dm}\right)^3 \\ &= 1 \times \left(\frac{1}{100}\right)^3\ \text{dm}^3 \\ &= 10^{-6}\ \text{L} \\ &= 10^{-6} \times 1000\ \text{mL} \\ &= 10^{-3}\ \text{mL}\end{aligned}$$

Par conséquent la contenance d'une alvéole est de

$$\mathscr{V}_1 \approx 270 \times 10^{-3}\ \text{mL}$$

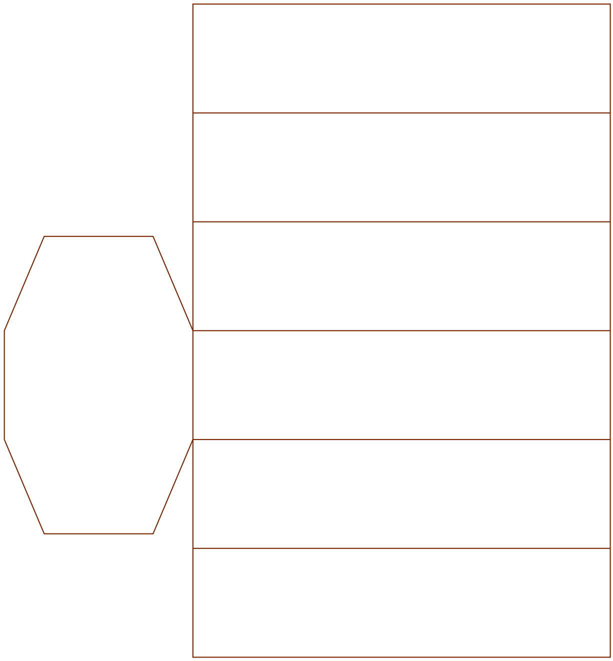
$$\boxed{\mathscr{V}_1 \approx 0{,}27\ \text{mL.}}$$

(c) Construire un patron d'une alvéole à l'échelle 6 : 1.

Dessinons un patron d'une alvéole à l'échelle imposée.

Taille réelle	1	3 mm	11,5 mm
Taille à l'échelle	6	18 mm	69 mm

La figure n'est pas à l'échelle demandée car ça ne rentrait pas. Elle est à 80 % de la taille demandée.



Partie C.

Une ruche Dadant est un modèle de ruche à cadres. Elle porte le nom de son inventeur, Charles Dadant (1817-1902). Un cadre de ruche Dadant est un rectangle de dimensions 41 cm × 26,5 cm ; dans ce qui suit, on négligera l'épaisseur du cadre. Une ruche contient 10 ou 12 cadres rectangulaires qui vont accueillir les alvéoles sur les faces avant et arrière de chaque cadre.

Dans cette partie on considère uniquement des ruches Dadant à 12 cadres.

1. En assimilant chaque alvéole à un carré dont les côtés mesurent 5 mm, montrer que l'on peut estimer qu'une telle ruche peut héberger 100 000 alvéoles.

   Déterminons le nombre n_r d'alvéole hébergés dans une ruche.

   Une alvéole occupe une surface de $(5\text{ mm})^2 = 5^2\text{ mm}^2 = 25\text{ mm}^2$.
   Or la surface d'un cadre est de

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_2 &= (41 \text{ cm}) \times (26{,}5 \text{ cm}) \\ &= (410 \text{ mm}) \times (265 \text{ mm}) \\ &= 410 \times 265 \text{ mm} \cdot \text{mm} \\ &= 108\,650 \text{ mm}^2\end{aligned}$$

donc le nombre d'alvéole hébergées par les deux côtés du cadre est :

$$\begin{aligned}n_c &= 2 \times \frac{108\,650 \text{ mm}^2}{25 \text{ mm}^2} \\ &= 8\,692\end{aligned}$$

Nous en déduisons pour 12 cadres :

$$\begin{aligned}n_r &= 12 \times n_c \\ &= 12 \times 8\,692 \\ &= 104\,304\end{aligned}$$

Une ruche héberge approximativement 100 000 alvéoles.

2. Montrer que le volume de miel, arrondi au litre, que peuvent contenir l'ensemble des 100 000 alvéoles d'une ruche Dadant à 12 cadres est 27 L.

Déterminons le volume de miel $\mathscr{V}_2$ dans une ruche.

D'après la question B.3.(b) le volume de miel dans les 100 000 alvéoles est :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= 100\,000 \times 0{,}27 \text{ mL} \\ &= 100\,000 \times 0{,}27 \ \frac{1}{1000} \text{ L}\end{aligned}$$

$$\mathscr{V}_2 = 27 \text{ L}.$$

3. On dispose des deux documents ci-dessous.

Une sortie d'une abeille butineuse.
Nombre de fleurs butinées : 20 à 300. Durée de la sortie : 20 minutes. Distance parcourue : 1 km. Vitesse de l'abeille en vol : 27 km/h. Masse de nectar récolté : 6×10^{-5} kg.

Miel.
Masse volumique : 1,4 kg/L. Quantité de nectar nécessaire pour fabriquer 1 kg de miel : 4 kg.

Répondre aux questions suivantes en utilisant les documents ci-dessus et les questions précédentes.

(a) Quelle masse de nectar doivent récolter les abeilles pour obtenir 25 g de miel ?

Il s'agit d'une situation de proportionnalité. Schématisons la par un tableau.

1 kg = 1 000 g	25 g
4 kg = 4 000 g	x g

Les changements d'unités ne sont pas indispensables ici puisque les proportions sont des nombres sans unités. Cependant cela peut faciliter un raisonnement consistant à se ramener à l'unité.

Donc $x = 25 \times \frac{4000}{1000}$.

Pour obtenir 25 g il faut récolter 100 g de nectar.

(b) Quelle masse de nectar doivent récolter les abeilles pour obtenir 100 mL de miel ?

Raisonnons là encore par proportionnalité. Nous savons que la masse volumique du miel est de 1,4 kg/L. Autrement dit chaque litre à une masse de 1,4 kg.

1,4 kg	x kg
1 L = 1 000 mL	100 mL

Donc : $x = \frac{1{,}4 \text{ kg}}{1\,000 \text{ mL}} \times 100$ mL.

Pour obtenir 100 mL de miel les abeilles doivent récolter 0,14 kg de nectar.

(c) Estimer la masse de miel que peuvent contenir l'ensemble des alvéoles d'une ruche Dadant à 12 cadres.

D'après la question C.2. la ruche contient 27 L or chaque litre a une masse de 1,4 kg donc la masse de miel est

$$\begin{aligned} m_1 &= 27 \text{ L} \times 1{,}4 \text{ kg/L} \\ &= 27 \times 1{,}4 \text{ L} \cdot \text{kg/L} \\ &= 37{,}8 \text{ kg} \end{aligned}$$

la masse contenue dans une ruche est 37,8 kg.

(d) Montrer qu'une estimation de la distance parcourue par l'ensemble des abeilles pour obtenir 1 kilogramme de miel est de 67 000 km.

* Déterminons le nombre, n_s, de sorties nécessaires pour obtenir 1 kg de miel.

Pour obtenir un 1 kg de miel il faut récolter 4 kg de nectar.
Chaque sortie permet de récolter 6×10^{-5} kg de nectar, donc (encore de la proportionnalité) pour obtenir 4 kg de miel le nombre de sorties nécessaires est :

$$\begin{aligned} n_s &= \frac{4 \text{ kg}}{6 \times 10^{-5} \text{ kg}} \\ &= \frac{4}{6 \times 10^{-5}} \\ &\approx 66\,667 \end{aligned}$$

* Déterminons la distance parcourue pour récolter 4 kg de nectar.

À chaque sortie la distance parcourue est de 1 km donc la distance parcourue lors de 66 667 sorties est 66 667 × 1 kg.

Pour obtenir 1 kg de miel les abeilles doivent parcourir approximativement 67 000 km.

(e) Estimer la distance parcourue par l'ensemble des abeilles pour remplir de miel l'ensemble des alvéoles d'une ruche Dadant à 12 cadres (sans compter le miel consommé par les abeilles elles-mêmes).

D'après la question C.3.(c) la ruche contient 37,8 kg et, d'après la question précédente, chaque kilogramme nécessite un parcours de 67 000 km donc la distance parcouru, en kilomètre, pour remplir la ruche est :

$$37{,}8 \times 67\,000 = 2\,532\,600$$

Pour remplir une ruche les abeilles doivent parcourir 2 532 600 km.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

Une urne contient des boules rouges, bleues, noires et vertes. On suppose que ces boules sont indiscernables au toucher.

La probabilité de tirer une boule rouge est de $\frac{1}{4}$.
La probabilité de tirer une boule verte est de 0,3.
La probabilité de tirer une boule noire est de 20 %.

1. On tire au hasard une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue ?

Ici l'univers n'est pas descriptible par ses issues puisque nous ne connaissons pas le nombre de boules. Nous allons travailler avec le système complet d'événements correspondant aux différentes couleurs.

Notons B l'événement « obtenir une boule bleue » et de même R, N et V. Considérons l'univers $\Omega = \{N,R,B,V\}$ muni de la loi de probabilité décrite par l'énoncé.

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Puisque, par définition de la loi de probabilité :

$$\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(V) = 1$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{20}{100} + \frac{1}{4} + \mathbb{P}(B) + 0{,}3 &= 1 \\ \mathbb{P}(B) + \frac{3}{4} &= 1 \\ \mathbb{P}(B) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} &= 1 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \tfrac{1}{4}.}$$

2. Il y a 140 boules dans l'urne. Donner le nombre de boules de chaque couleur.

Le contexte de l'exercice laisse entendre que chaque boule à la même probabilité d'être tirée qu'une autre. Autrement dit il y a équiprobabilité entre les diverses boules. Par conséquent les probabilités se confondent avec les proportions.

Déterminons le nombre, n_R, de boules rouges.

Puisque $\frac{1}{4}$ des 140 boules sont rouges :

$$\begin{aligned} n_R &= \frac{1}{4} \times 140 \\ &= 35 \end{aligned}$$

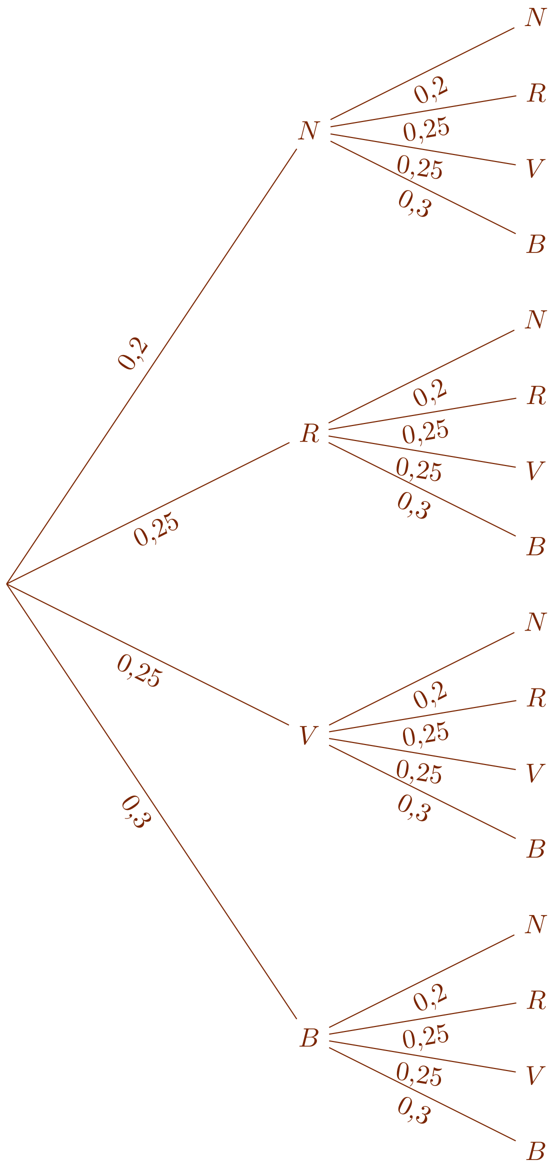
En procédant de même pour les différentes couleurs :

Couleur	N	R	B	V
Nombre	28	35	35	42

3. On effectue maintenant deux tirages successifs avec remise.

   (a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge puis une boule verte ?

   Schématisons l'expérience aléatoire par un arbre pondéré. Il y a 2 tirages donc notre arbre aura deux niveaux. De plus comme le tirage se fait avec remise nous retrouverons les mêmes embranchements sur chaque niveau avec les mêmes probabilités : $\frac{28}{140} = 0{,}2$, $\frac{35}{140} = 0{,}25$ et $\frac{42}{140} = 0{,}3$.



Calculons $\mathbb{P}(RV)$.

D'après le principe multiplicatif :

$$\mathbb{P}(RV) = 0{,}25 \times 0{,}25$$

$$\boxed{\mathbb{P}(RV) = 0{,}0625.}$$

(b) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge et une boule verte ?

Calculons $\mathbb{P}(R \cap V)$.

$R \cap V = \{RV ; VR\}$ donc

$$\mathbb{P}(R \cap V) = \mathbb{P}(RV) + \mathbb{P}(VR)$$

D'après le principe multiplicatif :

$$\mathbb{P}(R \cap V) = 0{,}25 \times 0{,}25 + 0{,}25 \times 0{,}25$$

$$\boxed{\mathbb{P}(R \cap V) = 0{,}125.}$$

(c) Quelle est la probabilité de tirer deux boules de la même couleur ?

Notons E l'événement « obtenir deux boules de la même couleur ».

Calculons $\mathbb{P}(E)$.

$E = \{NN, RR, VV, BB\}$.
Donc :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(NN) + \mathbb{P}(RR) + \mathbb{P}(VV) + \mathbb{P}(BB)$$

D'après le principe multiplicatif :

$$\mathbb{P}(E) = 0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}25 \times 0{,}25 + 0{,}25 \times 0{,}25 + 0{,}3 \times 0{,}3$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = 0{,}255.}$$

Exercice 2.

On donne la copie d'écran de deux algorithmes réalisés à l'aide du logiciel Scratch.

```
Quand [drapeau] est cliqué
demander (Saisir un nombre) et attendre
mettre Résultat à (réponse)
ajouter à Résultat (3)
mettre Résultat à (Résultat * Résultat)
mettre Résultat à (Résultat - 9)
dire (Résultat) pendant (2) secondes
```

Algorithme 1

```
Quand [drapeau] est cliqué
demander (Saisir un nombre) et attendre
mettre Résultat à (réponse)
ajouter à Résultat (3)
mettre Résultat à (Résultat * Réponse)
dire (Résultat) pendant (2) secondes
```

Algorithme 2

Cliquez sur les programmes ci-dessus pour les télécharger.

1. Montrer que si le nombre de départ est 2, on obtient 16 avec chacun des deux algorithmes.

   Pour le premier algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

Ligne de code.	Réponse.	Résultat.
demander (Saisir un nombre) et attendre	2	
mettre Résultat à (réponse)	2	2
ajouter à Résultat (3)	2	$2+3=5$
mettre Résultat à (Résultat * Résultat)	2	$5\times5=25$
mettre Résultat à (Résultat - 9)	2	$25-9=16$

   Pour le second algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

Ligne de code.	Réponse.	Résultat.
demander (Saisir un nombre) et attendre	2	
mettre Résultat à (réponse)	2	2
ajouter à Résultat (6)	2	$2+6=8$
mettre Résultat à ((Résultat) * (Réponse))	2	$8\times 2=16$

Si le nombre choisi en entrée est 2 alors les deux algorithmes renvoient 16.

2. Le nombre de départ est 1,2. Quel(s) nombre(s) obtient-on avec chacun des deux algorithmes ?

Pour le premier algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

Ligne de code.	Réponse.	Résultat.
demander (Saisir un nombre) et attendre	1,2	
mettre Résultat à (réponse)	1,2	2
ajouter à Résultat (3)	1,2	$1{,}2+3=4{,}2$
mettre Résultat à ((Résultat) * (Résultat))	1,2	$4{,}2\times 4{,}2=17{,}64$
mettre Résultat à ((Résultat) - (9))	1,2	$17{,}64-9=8{,}64$

Pour le second algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

Ligne de code.	Réponse.	Résultat.
demander (Saisir un nombre) et attendre	1,2	
mettre Résultat à (réponse)	1,2	1,2
ajouter à Résultat (6)	1,2	$1{,}2+6=7{,}2$
mettre Résultat à ((Résultat) * (Réponse))	1,2	$7{,}2\times 1{,}2=8{,}64$

Si le nombre choisi en entrée est 1,2 alors les deux algorithmes renvoient 8,64.

3. Quelle conjecture peut-on émettre ? Démontrer cette conjecture.

Nous conjecturons :

Il semble que les deux algorithme renvoie la même valeur.

Recherchons ce que renvoient les deux algorithmes pour une valeur en entrée égale à x.

Pour le premier algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

Ligne de code.	Réponse.	Résultat.
demander Saisir un nombre et attendre	x	
mettre Résultat à réponse	x	x
ajouter à Résultat 3	x	$x+3$
mettre Résultat à Résultat * Résultat	x	$(x+3)\times(x+3)$
mettre Résultat à Résultat - 9	x	$(x+3)^2-9$

Pour le second algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

Ligne de code.	Réponse.	Résultat.
demander Saisir un nombre et attendre	x	
mettre Résultat à réponse	x	x
ajouter à Résultat 6	x	$x+6$
mettre Résultat à Résultat * Réponse	x	$(x+6)\times x$

Démontrons que $(x+3)^2-9=(x+6)\times x$.

La méthode consiste ici à développer, réduire et ordonner autant que possible les deux expressions ci-dessus pour s'assurer qu'elles sont égales.

D'une part :

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - 9 &= x^2 + 2 \times x \times 3^2 - 9 \\ &= x^2 - 3x + 9 - 9 \\ &= x^2 - 6x\end{aligned}$$

d'autre part :

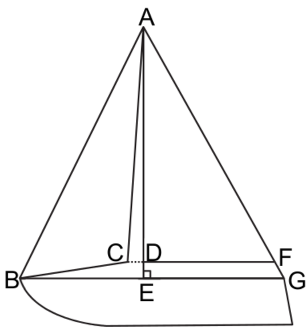
$$\begin{aligned}(x+6) \times x &= x \times x + 6 \times x \\ &= x^2 + 6x\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(x+3)^2 - 9 = x^2 + 6x.}$$

Exercice 3.

Les dimensions du voilier de madame Guidel sont données ci-dessous.



Vue en coupe du bateau
La figure n'est pas à l'échelle.

$AE = 12$ m, $BG = 11$ m, $DE = CD = 1$ m, $BE = 5$ m.

Les points A, F et G ainsi que les points C, D et F et les points B, E et G sont alignés.

Les droites (DF) et (EG) sont parallèles.

Les droites (AE) et (BG) sont perpendiculaires.

La voile de l'avant, appelée foc, est représentée par le triangle ABC.

La grand-voile est représentée par le triangle ADF.

1. En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle AEG, déterminer la longueur de la bôme $[DF]$.

Calculons DF.

- Configuration de Thalès. A, D et E d'une part, A, F et G d'autre part sont alignés dans le même ordre.
- Hypothèse pour la forme directe du théorème. $(DF) \parallel (EG)$.

Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{AD}{AE} = \frac{DF}{EG}.$$

Puisque $E \in [BG]$

$$EG = BG - BE = 11 \text{ m} - 5 \text{ m} = 6 \text{ m}$$

et puisque $D \in [AE]$,

$$AD = AE - DE = 12 \text{ m} - 1 \text{ m} = 11 \text{ m}$$

nous avons donc

$$\frac{11}{12} = \frac{DF}{6}.$$

Nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned} \frac{11}{12}\times 6 &= \frac{DF}{6}\times 6 \\ 5{,}5 &= DF \end{aligned}$$

$$\boxed{DF = 5{,}5 \text{ m}.}$$

2. Calculer l'aire de la grand-voile.

Calculons l'aire $\mathscr{A}_g$ de la grand-voile.

La grand-voile a une forme triangulaire nous devrions donc chercher une hauteur pour calculer son aire mais il s'agit en fait d'un triangle rectangle donc nous choisirons l'un des côtés de l'angle droit comme hauteur.

Puisque $(EG) \perp (AE)$ et $(EG) \parallel (DF)$, nécessairement $(DF) \perp (AE)$.

Puisque ADF est un triangle rectangle en D :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_g &= \frac{1}{2} \times AD \times DF \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \text{ m} \times 5{,}5 \text{ m} \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \times 5{,}5 \text{ m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_g = 30{,}25 \text{ m}^2.}$$

3. Lorsque le vent forcit, on remplace le foc par une voile plus petite appelée trinquette. La trinquette est une réduction du foc de coefficient $\frac{4}{5}$ (appliquée aux longueurs).

   (a) Calculer l'aire du triangle ADC et du quadrilatère $BCDE$.

   Calculons l'aire $\mathscr{A}(ADC)$ de ADC.

   ADC est rectangle en D donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ADC) &= \frac{1}{2} \times AD \times DC \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \text{ m} \times 1 \text{ m} \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \times 1 \text{ m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ADC) = 5{,}5 \text{ m}^2.}$$

   Calculons l'aire $\mathscr{A}(BCDE)$ de $BCDE$.

   $BCDE$ est un trapèze rectangle en E de bases $[BE]$ et $[CD]$ donc son aire est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(BCDE) &= \frac{1}{2}\times(BE+CD)\times DE\\ &= \frac{1}{2}\times(5\text{ m}+1\text{ m})\times 1\text{ m}\\ &= \frac{1}{2}\times 6\text{ m}\times 1\text{ m}\\ &= \frac{1}{2}\times 6\times 1\text{ m}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(BCDE) = 3\text{ m}^2.}$$

(b) En déduire que l'aire du foc (ABC) est de 21,5 m^2.

Calculons l'aire $\mathscr{A}(ABC)$ de ABC.

ABE est rectangle en E donc son aire est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{E} &= \frac{1}{2}\times AE\times EB\\ &= \frac{1}{2}\times 12\text{ m}\times 5\text{ m}\\ &= 30\text{ m}^2\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABC) &= \mathscr{A}(ABE)-\mathscr{A}(ADC)-\mathscr{A}(BCDE)\\ &= 30\text{ m}^2-5{,}5\text{ m}^2-3\text{m}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ABC) = 21{,}5\text{ m}^2.}$$

(c) En déduire l'aire de la trinquette.

Calculons l'aire $\mathscr{A}_t$ de la trinquette.

Si les longueurs, exprimées en m, sont multipliées par $\frac{4}{5}$ alors les aires, exprimées en m^2 sont multipliées par $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_t &= \frac{16}{25} \times \mathscr{A}(ABC)\\ &= \frac{16}{25} \times 21{,}5 \text{ m}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_t = 13{,}76 \text{ m}^2.}$$

4. Pour cette question, on admet que l'aire de la surface totale des voiles (grand-voile, foc et trinquette) est égale à 65,51 m^2. La propriétaire hésite entre deux voileries pour la fabrication de ses voiles.

Maître voilier local	**Usine en Asie**
• Tarif : 86 €/m^2. • Qualité du tissu : 340 g/m^2. • Livraison offerte.	• Tarif de base : 64 euro/m^2. • Qualité du tissu : 340 g/m^2. • Taxes d'importation : 32 % du prix de base de la marchandise. • Frais de port à la charge du client

Frais de port de l'Asie vers la France

Masse (en kg, arrondie à l'unité)	Prix à payer
Entre 5 et 10	100 €
Entre 11 et 18	150 €
Entre 19 et 25	250 €
Au-delà de 26 kg	Contacter le service client.

Déterminer la solution la plus économique en justifiant la réponse.

Calculons les deux tarifs.

* En local.
Par proportionnalité, le prix des voiles sera de

$$\begin{aligned}86 \text{ €/m}^2 \times 65{,}51 \text{ m}^2 &= 86 \times 65{,}51 \text{ €}\\ &= 5633{,}86 \text{ €}\end{aligned}$$

* En Asie.
Par proportionnalité, le prix des voiles sera de

$$\begin{aligned} 64 \text{ €/m}^2 \times 65{,}51 \text{ m}^2 &= 64 \times 65{,}51 \text{ €} \\ &= 4192{,}64 \text{ €} \end{aligned}$$

Les taxes induisent une augmentation de 32 %, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{32}{100} = 1{,}32$.
Donc après taxation le prix sera de

$$1{,}32 \times 4192{,}64 \text{ €} = 5534{,}2848 \text{ €}$$

La qualité du tissu étant de 0,34 kg/m², la masse des voiles commandées est de

$$\begin{aligned} 0{,}34 \text{ kg/m}^2 \times 65{,}51 \text{ m}^2 &= 0{,}34 \times 65{,}51 \text{ kg} \\ &= 22{,}2734 \text{ kg} \end{aligned}$$

Il faudra donc payer 250 € de frais de port.
Finalement l'achat des voileries reviendra à

$$5534{,}2848 \text{ €} + 250 \text{ €} = 5784{,}2848$$

L'achat en local est plus économique.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

Après avoir introduit les nombres décimaux et l'addition des nombres décimaux, un enseignant de CM1 propose à ses élèves le problème ci-dessous.

Chez le fromager, Madame Costa a dépensé 41 €.
Elle a acheté une part de comté à 18,28 euro, une part de beaufort à 15,72 € et un reblochon.
Combien a coûté le reblochon ?

On a retranscrit ci-dessous les réponses de quatre élèves.

$$\begin{array}{r} {}^{1}\,{}^{1}\;\;{}^{1} \\ 41 \\ +\ 18,28 \\ +\ 15,72 \\ \hline 34,41 \end{array}$$

La réponse est 34,41 €.

ÉLÈVE A

$$\begin{array}{r} {}^{1}\quad \\ +\ 18 \\ +\ 15 \\ \hline 33 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1}\quad \\ 28 \\ +\ 72 \\ \hline 100 \end{array}$$

33 + 100 = 34

41 – 34 = 11 – 4 = 7

Il coûte 7 euros.

ÉLÈVE B

$$\begin{array}{r} {}^{1}\quad{}^{1}\quad \\ +\ 18,28 \\ +\ 15,72 \\ \hline 33,100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\ {}_{1}1 \\ -\ 3_{1}\,3,100 \\ \hline 8,100 \end{array}$$

41 € – 33,100 € = 8,100 €.

Le reblochon coûte 8,10 €

ÉLÈVE C

$$\begin{array}{r} {}^{1}\,{}^{1}\;\;{}^{1} \\ 18,28 \\ +\ 15,72 \\ \hline 34,00 \end{array}$$

41 + 34 = 70 + 5 = 75

Le reblochon a coûté 75 €.

ÉLÈVE D

1. Justifier qu'il est possible de proposer un tel problème alors que la soustraction des nombres décimaux n'a pas encore été étudiée.

2. En s'appuyant sur l'extrait de la note de service proposé ci-dessous, analyser les productions des quatre élèves en termes de réussites et d'erreurs pour chacune des compétences « Modéliser » et « Calculer ».

Extrait de la note de service n°2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ».

***« Modéliser » et « Calculer » sont deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes à l'école élémentaire** qui doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :*

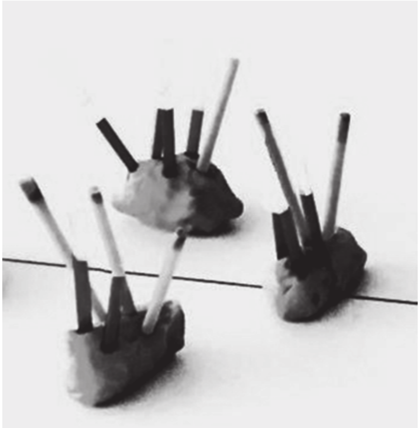
— *difficultés à « modéliser » : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;*

— *difficultés à « calculer » : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calculs utilisés.*

3. Proposer une remédiation ou un accompagnement que l'enseignant pourrait mettre en place pour aider l' **ÉLÈVE A** à résoudre ce type de problème.

Situation 2.

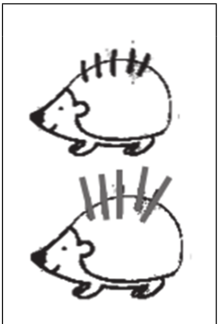
Dans une classe de Moyenne Section de maternelle, un enseignant propose le jeu « ***Les piquants des hérissons*** ». L'enseignant propose à ses élèves de fabriquer, par groupes de 4 élèves, des hérissons en pâte à modeler, chaque hérisson devant avoir cinq piquants. Il donne la consigne suivante : « *Vous allez composer des hérissons à 5 piquants, pas plus, pas moins, en choisissant des petits piquants rouges ou des grands piquants verts. Un mélange des couleurs est possible. Vous devez faire le plus de hérissons possible, mais les hérissons doivent être différents, ils ne doivent pas avoir autant de piquants de la même couleur.* »

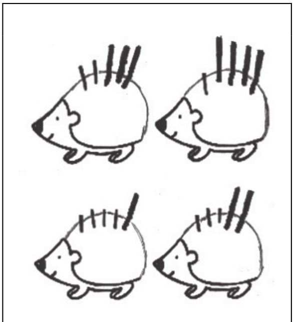


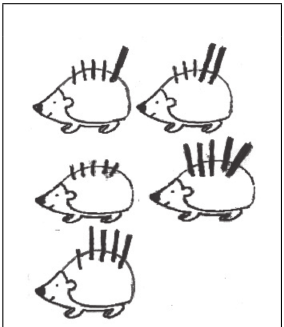
Matériel utilisé :
— Pâte à modeler (corps du hérisson) ;
— Petites pailles rouges et grandes pailles vertes.

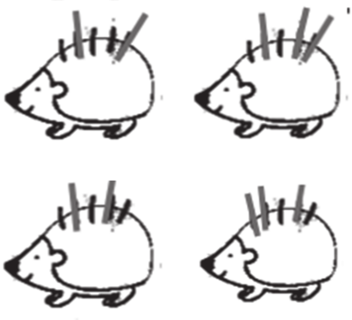
1. Est-ce l'« ordinal » ou l'usage « cardinal » du nombre qui est mobilisé dans cette séance ? Justifier la réponse.

2. Après la manipulation, les élèves représentent leurs solutions sur des hérissons dessinés.
   L'enseignant récupère les quatre productions ci-dessous.


Groupe 1.


Groupe 2.


Groupe 3.

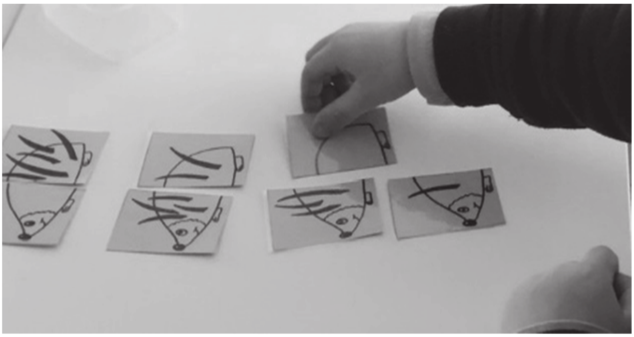


Groupe 4.

Légende :	
Petit piquant rouge	Grand piquant vert

Analyser les productions de chacun des groupes d'élèves en termes de réussites et d'erreurs.

3. Après avoir demandé aux élèves de trouver tous les hérissons différents possibles à 5 piquants, l'enseignant propose aux élèves une nouvelle activité : les élèves doivent reconstituer des hérissons à 5 piquants, à partir de cartes représentant des demi-hérissons.



Expliquer le lien, concernant les premiers apprentissages numériques, entre cette activité et la précédente.

4. Proposer une nouvelle activité sans lien avec la précédente permettant de travailler les différentes décompositions du nombre 5.

Situation 3.

1. Dans les programmes en vigueur pour le cycle 3, (programmes consolidés à partir du BOEN n°31 du 30 juillet 2020), il est inscrit dans les attendus du domaine Nombres et calculs : « *Comprendre et appliquer aux nombres décimaux les règles de la numération décimale de position* ».

   (a) Rappeler ce que sont « les règles de la numération décimale de position », en précisant ce que sont l'aspect décimal et l'aspect positionnel dont il est fait mention. Les explications pourront s'appuyer sur des exemples.

   (b) Proposer un exercice permettant de contribuer à l'évaluation de l'aptitude des élèves à « comprendre et appliquer aux nombres décimaux les règles de la numération décimale de position ».

2. Un enseignant de CM1 souhaite interroger ses élèves, il hésite entre les trois questions suivantes :

   Question 1 : « Donner un nombre décimal plus grand que 3,7 et plus petit que 3,9. »

   Question 2 : « Donner un nombre décimal plus grand que 3,7 et plus petit que 3,8. »

   Question 3 : « Donner un nombre décimal plus grand que 3,9 et plus petit que 4,1. »

   Donner les éventuels intérêts et inconvénients de chacune de ces trois questions pour évaluer la compréhension des élèves de ce que sont les décimaux et de l'écriture à virgule.

3. Un enseignant de CM2 pose la question suivante à ses élèves : « Comparer 12,76 et 12,745. ». Ceux-ci sont en difficulté.

   Proposer une méthode en plusieurs étapes permettant aux élèves de comparer ces deux nombres pour déterminer lequel est le plus grand.