Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 7.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Partie A : dimensions de formats.

1. Déterminons l'aire $\mathscr{A}_0$ de la feuille de format A0.

   Puisqu'il s'agit d'un rectangle dont nous connaissons les dimensions :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_0 &= (841 \text{ mm}) \times (1189 \text{ mm})\\ &= 841 \times 1189 \text{ mm} \cdot \text{mm}\\ &= 999\,949 \text{ mm}^2\\ &= 999\,949 \left(\frac{1}{1\,000} \text{ m}\right)^2\\ &= 999\,949 \left(\frac{1}{1\,000}\right)^2 \text{ m}^2\\ &= 0{,}999\,949 \text{ m}^2\end{aligned}$$

   Et puisque $1 \text{ dm}^2 = 1\left(\frac{1}{10} \text{ m}\right)^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \text{ m}^2 = 0{,}01 \text{ m}^2$,

   $\mathscr{A}_0 \approx 1{,}00 \text{ m}^2$. '

2. Puisque la feuille A4 s'obtient en découpant la feuille A3 suivant la longueur, sa longueur est la moitié de celle de la feuille A3 : $\frac{420 \text{ mm}}{2} = 210 \text{ mm} = 21 \text{ cm}$. Et la longueur de la feuille A4 est alors la largeur de la feuille A3, c'est-à-dire $297 \text{ mm} = 29{,}7 \text{ cm}$.

   La feuille de format A4 a pour dimensions, en centimètres, $21 \times 29{,}7$.

3. Le format A4 en millimètre est, d'après la question précédente 210×297. Or $\frac{297}{2} = 148{,}5$ donc

   les dimensions du format A5 en millimètre sont $148{,}5 \times 210$.

Partie B : étude de deux cylindres de révolution.

1. (a) Remarquons que la figure est trompeuse puisque les longueurs et largeurs de $ABCD$ semblent inversées.

   Calculons le rayon R_1 de la base de $\mathbf{C}_1$.

   Le périmètre du disque formant la base de $\mathbf{C}_1$ est donné par :

$$2\pi R_1 = AD$$

   La feuille étant au format A3, et puisque $AB = 42$ cm (hauteur d'après l'énoncé) :

$$2\pi R_1 = 297 \text{ mm}$$

   Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{2\pi R_1}{2\pi} &= \frac{297 \text{ mm}}{2\pi} \\ R_1 &= \frac{297}{2\pi} \text{ mm} \\ R_1 &\approx 47{,}2690 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\boxed{R_1 \approx 47 \text{ mm.}}$$

   (b) Puisque aucune unité pour le volume n'est exigée calculons en centimètre cube et arrondissons le résultat à l'unité.

   Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ de $\mathbf{C}_1$.

   D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{297}{2\pi} \text{ mm} \\ &= \frac{297}{2\pi} \times \left(\frac{1}{10} \text{ cm}\right) \\ &= \frac{297}{20\pi} \text{ cm} \end{aligned}$$

   Nous pouvons maintenant calculer le volume du cylindre.

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_1 &= \pi \times R_1^2 \times AB \\
&= \pi \times \left(\frac{297}{20\pi}\ \text{cm}\right)^2 \times (420\ \text{mm}) \\
&= \pi \times \left(\frac{297}{20\pi}\ \text{cm}\right)^2 \times (42\ \text{cm}) \\
&= \pi \times \left(\frac{297}{20\pi}\right)^2 \times 42\ \text{cm}^2 \cdot \text{cm} \\
&\approx 2948{,}168\ \text{cm}^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_1 \approx 2\,948\ \text{cm}^3.}$$

2. (a) Calculons le rayon R_2 de la base de $\mathbf{C}_2$.

Le périmètre du disque formant la base de $\mathbf{C}_2$ est donné par :

$$2\pi R_2 = AB$$

D'après l'énoncé $AB = 42$ cm :

$$2\pi R_2 = 420\ \text{mm}$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi R_2}{2\pi} &= \frac{420\ \text{mm}}{2\pi} \\
R_2 &= \frac{420}{2\pi}\ \text{mm} \\
R_2 &\approx 66{,}8450\ \text{mm}
\end{aligned}$$

$$\boxed{R_2 \approx 67\ \text{mm}.}$$

(b) Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ de $\mathbf{C}_2$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{420}{2\pi} \text{ mm} \\ &= \frac{210}{\pi} \times \left(\frac{1}{10} \text{ cm} \right) \\ &= \frac{21}{\pi} \text{ cm} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer le volume du cylindre dont la hauteur est $AD = 29{,}7$ cm.

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_2 &= \pi \times R_2^2 \times AD \\ &= \pi \times \left(\frac{21}{\pi} \text{ cm} \right)^2 \times (29{,}7 \text{ cm}) \\ &= \pi \times \left(\frac{21}{\pi} \right)^2 \times 29{,}7 \text{ cm}^2 \cdot \text{cm} \\ &\approx 4169{,}127 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\mathscr{V}_2 \approx 4\,169 \text{ cm}^3.$$

3. D'après les questions précédentes

le cylindre $\mathbf{C}_2$ a un plus grand volume.

Partie C : la pesée.

1. Déterminons l'aire, $\mathscr{A}_4$, d'une feuille au format A4.

   D'après la question A.2 :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_4 &= (21 \text{ cm})(29{,}7 \text{ cm}) \\ &= 21 \times 29{,}7 \text{ cm} \cdot \text{cm} \end{aligned}$$

$$\mathscr{A}_4 = 623{,}7 \text{ cm}^2.$$

2. La masse d'une feuille est de

$$\begin{aligned}
m_4 &= \mathscr{A}_4 \times \left(80\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{m}^{-2}\right) \\
&= \left(623{,}7\ \mathrm{cm}^2\right) \times \left(80\ \mathrm{g} \cdot (100\ \mathrm{cm})^{-2}\right) \\
&= \left(623{,}7\ \mathrm{cm}^2\right) \times \left(80\ \mathrm{g} \cdot \left(\frac{1}{100^2}\ \mathrm{cm}^{-2}\right)\right) \\
&= 623{,}7 \times 80 \times \frac{1}{100^2}\ \mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-2} \\
&= 4{,}9896\ \mathrm{g}
\end{aligned}$$

$$\boxed{m_4 \approx 5\ \mathrm{g}.}$$

3. Estimons le nombre n_4 de feuilles restantes dans le paquet.

$$\begin{aligned}
n_4 &= \frac{1920\ \mathrm{g}}{m_4} \\
&\approx \frac{1920\ \mathrm{g}}{5\ \mathrm{g}} \\
&\approx \frac{1920}{5}\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{g}} \\
&\approx 384
\end{aligned}$$

Il reste, approximativement, 384 feuilles dans le paquet.

Partie D : calculs de dimensions de format.

1. La largeur de la feuille plus petite s'obtient en divisant la longueur de la plus grande par 2 donc,

en `C4`, il faut saisir : `= D3/2`

La longueur de la feuille plus petite égale la largeur de la plus grande donc,

en `D4`, il faut saisir : `= C3`

2. Puisque le rapport est le quotient entre la longueur et la largeur de la feuille :

   en `E3` il faut saisir : `= D3/C3`

3. Imaginons choisie une feuille A dont la largeur est ℓ et la longueur L de sorte que $\frac{L}{\ell} = \sqrt{2}$.

   Démontrons que la feuille A' obtenu en coupant A au milieu de sa longueur a aussi pour rapport $\sqrt{2}$.

   Notons ℓ' et L' respectivement les largeur et longueur de A'.
   Nous avons donc : $\ell' = \frac{L}{2}$ et $L' = \ell$.
   Par conséquent

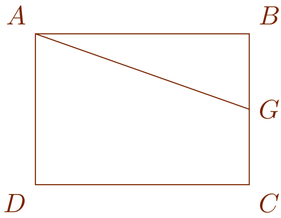
$$\begin{aligned}\frac{L'}{\ell'} &= \frac{\ell}{\frac{L}{2}}\\ &= \frac{\frac{\ell}{1}}{\frac{L}{2}}\\ &= \frac{\ell}{1} \times \frac{2}{L}\\ &= \frac{2\ell}{L}\\ &= 2\frac{\ell}{L}\end{aligned}$$

   Or $\frac{L}{\ell} = \sqrt{2}$ donc $\frac{\ell}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et

$$\begin{aligned}\frac{L'}{\ell'} &= 2\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

   Si A a pour rapport $\sqrt{2}$ alors A' a aussi pour rapport $\sqrt{2}$.

Partie E : un angle droit.



1.

Calculons AG.

ABG est rectangle en B, donc, d'après le théorème de Pythagore

$$AG^2 = AB^2 + BG^2.$$

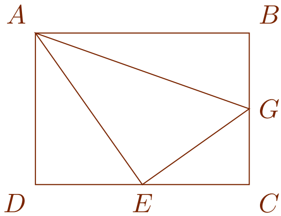
Donc :

$$\begin{aligned} AG^2 &= \sqrt{2}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 2 + \frac{1^2}{2^2} \\ &= 2 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{8}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Puisque AG est une longueur c'est un nombre positif donc

$$\begin{aligned} AG &= \sqrt{\frac{9}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} \end{aligned}$$

$$\boxed{AG = \frac{3}{2}.}$$



2.

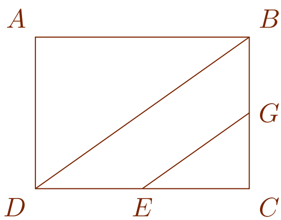
Démontrons que AEG et rectangle en E.

En procédant comme à la question précédente :
— puisque ADE est rectangle en D, $AE^2 = \frac{3}{2}$,
— puisque ECG est rectangle en C, $EG = \frac{3}{4}$.
Ainsi

$$\begin{aligned} AE^2 + EG^2 &= \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Or nous avions établi que $AG^2 = \frac{9}{4}$, donc $AE^2 + EG^2 = AG^2$.
Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore que

AEG est rectangle en E.



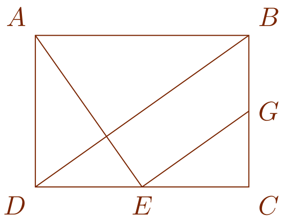
3.

Démontrons que $(BD) \parallel (EG)$.

* Configuration de Thalès. Les points D, E, C d'une part et B, G, C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* Hypothèse de la réciproque du théorème de Thalès.
  E (resp. G) étant le milieu de $[DC]$ (resp. $[BC]$) nous avons $\frac{CE}{CD} = \frac{CG}{CB} = \frac{1}{2}$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$(BD) \parallel (EG).$$

4. 

D'après la question 2 : $(AE) \perp (EG)$,
et d'après la question précédente : $(BD) \parallel (EG)$,
donc $(AE) \perp (BD)$.

Comme de plus, par construction le point d'intersection de (AE) et (BD) est F nous pouvons conclure

(BD) et (AE) se coupent perpendiculairement en F.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. (a) La face 1 est celle du E et la 2 celle du O.

   (b) La face 1 est celle du E et la 2 celle du O.

2. Il est possible de remplacer le 1 et le 2 de deux façons :

première possibilité

1	●
2	□

seconde possibilité

1	⊕
2	×

Exercice 2.

Lien pour télécharger le programme Scratch.

1. Construisons le tableau d'état des variables de ce programme.

	réponse	R	Q	R < 7
demander	17			
mettre Q à 0	17		0	
mettre R à réponse	17	17	0	
répéter jusqu'à R < 7	17	17	0	0 (faux)
mettre Q à Q + 1	17	17	1	0 (faux)
mettre R à R - 7	17	10	1	0 (faux)
répéter jusqu'à R < 7	17	10	1	0 (faux)
mettre Q à Q + 1	17	10	2	0 (faux)
mettre R à R - 7	17	3	2	0 (faux)
répéter jusqu'à R < 7	17	3	2	1 (vrai)

Si l'utilisateur choisi 17, alors le programme renvoie $R = 3$ et $Q = 2$.

2. Q est un compteur de passage dans la boucle et à chaque passage dans la boucle R est diminué de 7. Autrement dit il s'agit de déterminer combien de fois il est possible de mettre 7 dans R.
Plus simplement

> Q est le quotient de la valeur choisie par l'utilisateur dans la division euclidienne par 7, et R son reste.

3. Procédons à la division euclidienne de 2020 par 7.

$$\begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,0 & 7 \\ \cline{2-2} 6\,2 & 2\,8\,8 \\ 6\,0 & \\ 4 & \end{array}$$

Donc

$$2020 = 288 \times 7 + 4.$$

> Si l'utilisateur choisi 2020, alors le programme renvoie $R = 4$ et $Q = 288$.

Exercice 3.

1. (a) Chacun des trois côtés de la figure 0 est séparé en quatre côtés donc un total de 3×4 côtés

   > la figure 1 compte 12 côtés.

   De nouveau chacun des côtés de la figure 1 est partagé en 4 nouveaux côtés.

   > La figure 2 compte 48 côtés.

   (b) Nous avons remarqué que le nombre de côtés est multiplié par 4 donc

   > la figure 3 compte 192 côtés.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Notons N_k le nombre de côté de la figure k quelque soit k entier naturel.

   Exprimons N_n en fonction de n.

Nous avons remarqué que pour passer passer d'une étape à la suivante le nombre de côtés est multiplié par 4, par conséquent (N_n) est une suite géométrique de terme initial $N_0 = 3$ et de raison $q = 4$.
Nous en déduisons la formule explicite :

$$N_n = N_0 \times q^n.$$

En tenant compte des données numériques :

$$N_n = 3 \times 4^n.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, quelque soit } n \in \mathbb{N},\ N_n = 3 \times 4^n.}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Chaque côté de la figure n est partagé en trois segment de même longueur donc : $L_{n+1} = \frac{1}{3} \times L_n$.
En particulier : $L_1 = \frac{1}{3} \times L_0 = \frac{1}{3} \times 1$.

$$\boxed{L_1 = \frac{1}{3}.}$$

De même : $L_2 = \frac{1}{3} L_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^2}$.

$$\boxed{L_2 = \frac{1}{9}.}$$

$\frac{1}{9}$ est bien la forme irréductible car les numérateurs et dénominateurs de $\frac{1}{3^2}$ correspondent à des décompositions en facteurs premiers et que plus aucune simplification n'est possible.

De même

$$\boxed{L_3 = \frac{1}{27}.}$$

(b) Nous avons remarqué à la question précédente la formule de récurrence

$$L_{n+1} = \frac{1}{3} L_n$$

quelque soit $n \in \mathbb{N}$, qui est la formule de récurrence définissant une suite géométrique.

Nous en déduisons que (L_n) est une suite géométrique de terme initial $L_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.
Par conséquent une formule explicite de (L_n) est

$$\boxed{L_n = \frac{1}{3^n} \text{ quelque soit } n \in \mathbb{N}.}$$

3. (a) Nous remarquons que, quelque soit l'entier naturel n, $P_n = N_n \times L_n$.
Donc

$$\boxed{P_1 = 4,\ P_2 = \frac{16}{3} \text{ et } P_3 = \frac{64}{9}.}$$

(b) Soit n$\in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P_n &= N_n \times L_n \\ &= 3 \times 4^n \times \frac{1}{3^n} \\ &= 4^n \times \frac{3}{3^n} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n = \frac{4^n}{3^{n-1}}.}$$

4. Démontrons l'existence du n cherché.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$: $P_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Par conséquent (P_n) est une suite arithmétique de terme initial $P_0 = 3$ et de raison $q = \frac{4}{3}$.
Puisque $q > 1$ nous en déduisons que (P_n) diverge vers $+\infty$.
En particulier

$$\boxed{\text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } P_n \geqslant 100\,000.}$$

Dans un démarche plus constructiviste nous pouvons essayer de déterminer un rang $n \in \mathbb{N}$ qui convienne.

1 km = 100 000 cm.

Cherchons n tel que $P_n \geqslant 100\,000$.

La méthode la plus propre pour trouver le rang n pour lequel la valeur souhaitée est atteinte nécessite la fonction logarithme qui est dorénavant au programme de terminale. Nous allons adopter une résolution algorithmique.

* Première méthode.
  En entrant la fonction $x \mapsto \frac{4^x}{3^{n-1}}$ dans la calculatrice nous obtenons ensuite un tableau de valeur. En faisant défiler les valeurs nous voyons que $P_{36} \approx 94\,388$ et $P_{37} \approx 125\,850$.
* Deuxième méthode.
  Nous pouvons aussi faire un algorithme. Par exemple en Python :

```
def seuil():
    P=3
    n=0
    while P<100000:
        n=n+1
        P=4**n/3**(n-1)
    return(n)
```

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

Situation 2.

Situation 3.

1.
2.

Situation 4.

1.
2. (a)
   (b)