Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 7.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

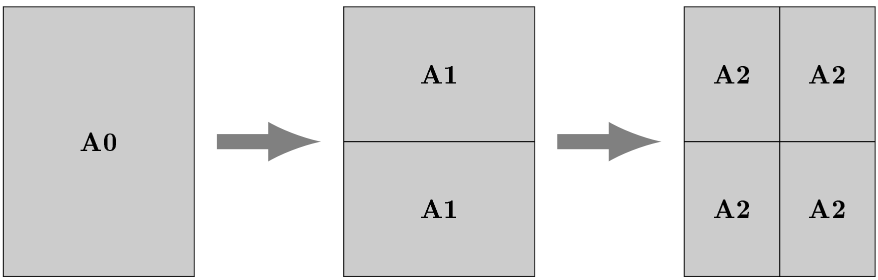
Lien vers le sujet seul : pdf.
Merci M. Meynier pour les corrections apportées.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Dans le domaine de la bureautique, les feuilles de papier ont généralement une forme de rectangle et se répartissent suivant plusieurs formats. Le plus usuel est le format A4.

On appelle format A0 une feuille rectangulaire de longueur 1189 mm et de largeur 841 mm. Si on prend une feuille de format A0 et qu'on la découpe suivant sa longueur en deux rectangles de même dimension, on obtient deux feuilles au format A1. En découpant en deux rectangles de même dimension une feuille au format A1 suivant sa longueur, on obtient deux feuilles au format A2. On recommence avec le même principe pour les autres formats.



Partie A : dimensions de formats.

Format du papier	A0	A1	A2	A3	A4	A5
Taille (en mm)	841×1189	594×841	420×594	297×420		

1. Déterminer en mètre carré, l'aire d'une feuille de format A0. On arrondira au décimètre carré.

Déterminons l'aire $\mathscr{A}_0$ de la feuille de format A0.

Puisqu'il s'agit d'un rectangle dont nous connaissons les dimensions :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_0 &= (841 \text{ mm}) \times (1189 \text{ mm}) \\
&= 841 \times 1189 \text{ mm} \cdot \text{mm} \\
&= 999\,949 \text{ mm}^2 \\
&= 999\,949 \left(\frac{1}{1\,000} \text{ m} \right)^2 \\
&= 999\,949 \left(\frac{1}{1\,000} \right)^2 \text{ m}^2 \\
&= 0{,}999\,949 \text{ m}^2
\end{aligned}$$

Et puisque $1 \text{ dm}^2 = 1 \left(\frac{1}{10} \text{ m}\right)^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \text{ m}^2 = 0{,}01 \text{ m}^2$,

$$\boxed{\mathscr{A}_0 \approx 1{,}00 \text{ m}^2.}$$

2. Vérifier que le format A4 a pour dimensions, en centimètre, $21 \times 29{,}7$.

Puisque la feuille A4 s'obtient en découpant la feuille A3 suivant la longueur, sa longueur est la moitié de celle de la feuille A3 : $\frac{420 \text{ mm}}{2} = 210 \text{ mm} = 21 \text{ cm}$. Et la longueur de la feuille A4 est alors la largeur de la feuille A3, c'est-à-dire $297 \text{ mm} = 29{,}7 \text{ cm}$.

La feuille de format A4 a pour dimensions, en centimètres, $21 \times 29{,}7$.

3. Déterminer les dimensions du format A5 en millimètre.

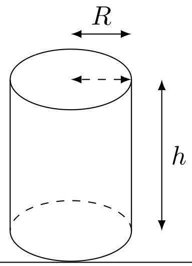
Le format A4 en millimètre est, d'après la question précédente 210×297. Or $\frac{297}{2} = 148{,}5$ donc

les dimensions du format A5 en millimètre sont $148{,}5 \times 210$.

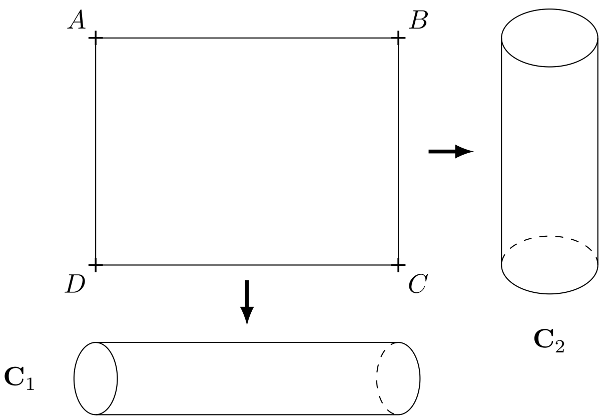
Partie B : étude de deux cylindres de révolution.

Rappel :
Volume V du cylindre de révolution de rayon R et hauteur h :

$$V = \pi \times R^2 \times h.$$



On dispose d'une feuille A3. On peut l'enrouler de deux façons différentes en mettant bord à bord deux côtés opposés :
— en reliant $[AB]$ et $[DC]$ on obtient le cylindre $\mathbf{C}_1$.
— en reliant $[AD]$ et $[BC]$ on obtient le cylindre $\mathbf{C}_2$.



1. On s'intéresse au cylindre $\mathbf{C}_1$, dont la hauteur est 42 centimètres.

   (a) Que vaut le rayon de la base de ce cylindre ? Arrondir au millimètre.

   Remarquons que la figure est trompeuse puisque les longueurs et largeurs de $ABCD$ semblent inversées.

   Calculons le rayon R_1 de la base de $\mathbf{C}_1$.

   Le périmètre du disque formant la base de $\mathbf{C}_1$ est donné par :

$$2\pi R_1 = AD$$

La feuille étant au format A3, et puisque $AB = 42$ cm (hauteur d'après l'énoncé) :

$$2\pi R_1 = 297 \text{ mm}$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi R_1}{2\pi} &= \frac{297 \text{ mm}}{2\pi} \\
R_1 &= \frac{297}{2\pi} \text{ mm} \\
R_1 &\approx 47{,}2690 \text{ mm}
\end{aligned}$$

$$\boxed{R_1 \approx 47 \text{ mm.}}$$

(b) Calculer le volume du cylindre $\mathbf{C}_1$? Arrondir au centimètre cube.

Puisque aucune unité pour le volume n'est exigée calculons en centimètre cube et arrondissons le résultat à l'unité.

Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ de $\mathbf{C}_1$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{297}{2\pi} \text{ mm} \\
&= \frac{297}{2\pi} \times \left(\frac{1}{10} \text{ cm}\right) \\
&= \frac{297}{20\pi} \text{ cm}
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer le volume du cylindre.

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_1 &= \pi \times R_1^2 \times AB \\
&= \pi \times \left(\frac{297}{20\pi} \text{ cm}\right)^2 \times (420 \text{ mm}) \\
&= \pi \times \left(\frac{297}{20\pi} \text{ cm}\right)^2 \times (42 \text{ cm}) \\
&= \pi \times \left(\frac{297}{20\pi}\right)^2 \times 42 \text{ cm}^2 \cdot \text{cm} \\
&\approx 2948{,}168 \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_1 \approx 2\,948 \text{ cm}^3.}$$

2. On s'intéresse au cylindre $\mathbf{C}_2$, dont la hauteur est 29,7 centimètres.

   (a) Que vaut le rayon de la base de ce cylindre ? Arrondir au millimètre.

   Calculons le rayon R_2 de la base de $\mathbf{C}_2$.

   Le périmètre du disque formant la base de $\mathbf{C}_2$ est donné par :

   $$2\pi R_2 = AB$$

   D'après l'énoncé $AB = 42$ cm :

   $$2\pi R_2 = 420 \text{ mm}$$

   Ceci équivaut successivement à :

   $$\begin{aligned} \frac{2\pi R_2}{2\pi} &= \frac{420 \text{ mm}}{2\pi} \\ R_2 &= \frac{420}{2\pi} \text{ mm} \\ R_2 &\approx 66{,}8450 \text{ mm} \end{aligned}$$

   $$\boxed{R_2 \approx 67 \text{ mm.}}$$

   (b) Calculer le volume du cylindre $\mathbf{C}_2$. Arrondir au centimètre cube.

   Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ de $\mathbf{C}_2$.

   D'après la question précédente :

   $$\begin{aligned} R_2 &= \frac{420}{2\pi} \text{ mm} \\ &= \frac{210}{\pi} \times \left(\frac{1}{10} \text{ cm}\right) \\ &= \frac{21}{\pi} \text{ cm} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer le volume du cylindre dont la hauteur est $AD = 29{,}7$ cm.

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \pi \times R_2^2 \times AD \\ &= \pi \times \left(\frac{21}{\pi}\ \text{cm}\right)^2 \times (29{,}7\ \text{cm}) \\ &= \pi \times \left(\frac{21}{\pi}\right)^2 \times 29{,}7\ \text{cm}^2 \cdot \text{cm} \\ &\approx 4169{,}127\ \text{cm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_2 \approx 4\,169\ \text{cm}^3.}$$

3. Lequel de ces deux cylindres a le plus grand volume ?

D'après les questions précédentes

$\boxed{\text{le cylindre } \mathbf{C}_2 \text{ a un plus grand volume.}}$

Partie C : la pesée.

Noé a entamé son paquet de feuilles. Il souhaite savoir combien il lui en reste. Pour cela, il pose sur une balance son paquet de feuilles sans l'emballage.

La balance indique 1 920 g. Il peut aussi lire sur l'emballage du paquet :

> Papier très blanc écologique.
> Papier fabriqué à partir à 50 % de fibres recyclées provenant de collectes de vieux papiers post-consommation et à 50 % de fibres neuves issues de forêts certifiées PEFC.
> Format A4 : $21 \times 29{,}7$ cm.
> Grammage : 80 g/m^2.
> Velouté et planéité parfaits pour des présentations nettes et soignées.
> Ramette de 500 feuilles.

1. Quelle est l'aire d'une feuille de format A4 en centimètre carré ?

   Déterminons l'aire, $\mathscr{A}_4$, d'une feuille au format A4.

   D'après la question A.2 :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_4 &= (21 \text{ cm})\,(29{,}7 \text{ cm})\\ &= 21 \times 29{,}7 \text{ cm} \cdot \text{cm}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_4 = 623{,}7 \text{ cm}^2.}$$

2. Quelle est la masse d'une ramette de 500 feuilles ? Arrondir au gramme.

   La masse d'une feuille est de

$$\begin{aligned}m_4 &= \mathscr{A}_4 \times \left(80 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}\right)\\ &= \left(623{,}7 \text{ cm}^2\right) \times \left(80 \text{ g} \cdot (100 \text{ cm})^{-2}\right)\\ &= \left(623{,}7 \text{ cm}^2\right) \times \left(80 \text{ g} \cdot \left(\frac{1}{100^2} \text{ cm}^{-2}\right)\right)\\ &= 623{,}7 \times 80 \times \frac{1}{100^2} \text{ cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{cm}^{-2}\\ &= 4{,}9896 \text{ g}\end{aligned}$$

   Nous en déduisons la masse des 500 feuilles :

$$\begin{aligned}m_5 &= 500 \times m_4\\ &= 500 \times 4{,}9896 \text{ g}\\ &= 2494{,}8 \text{ g}\end{aligned}$$

$$\boxed{m_5 \approx 2495 \text{ g}.}$$

3. Estimer le nombre de feuilles restantes dans le paquet de Noé.

   Estimons le nombre n_4 de feuilles restantes dans le paquet.

$$\begin{aligned} n_4 &= \frac{1920\text{ g}}{m_4} \\ &\approx \frac{1920\text{ g}}{5\text{ g}} \\ &\approx \frac{1920}{5}\frac{\text{g}}{\text{g}} \\ &\approx 384 \end{aligned}$$

Il reste, approximativement, 384 feuilles dans le paquet.

Partie D : calculs de dimensions de format.

On appellera « rapport d'une feuille » le quotient entre sa longueur et sa largeur.

Dans la feuille de calcul d'un tableur ci-dessous, on a indiqué les formats du papier. On a renseigné la ligne correspondant au format A0 et on a choisi l'arrondi à l'unité pour les nombres des colonnes `C` et `D`, jusqu'à la ligne 9.

	A	B	C	D	E
1					
2		**Format du papier**	**largeur**	**Longueur**	**Rapport d'une feuille**
3		**A0**	841	1189	
4		**A1**			
5		**A2**			
6		**A3**			
7		**A4**			
8		**A5**			
9		**A6**			

1. Donner les formules qu'il convient de saisir dans les cellules `C4` et `D4` qui permettront de déterminer automatiquement les valeurs des dimensions des formats d'une feuille respectivement de format A1, A2, A3, A4, A5 et A6, en copiant par glissement les colonnes `C` et `D`.

   La largeur de la feuille plus petite s'obtient en divisant la longueur de la plus grande par 2 donc,

   en `C4`, il faut saisir : `= D3/2`

La longueur de la feuille plus petite égale la largeur de la plus grande donc,

en `D4`, il faut saisir : `= C3`

2. Quelle formule faut-il saisir dans la cellule `E3`, pour compléter la colonne `E`, en copiant et glissant ?

Puisque le rapport est le quotient entre la longueur et la largeur de la feuille :

en `E3` il faut saisir : `= D3/C3`

3. Voici les résultats obtenus dans la colonne `E` :

	A	B	E
1			
2		**Format du papier**	**Rapport d'une feuille**
3		**A0**	1,413793103
4		**A1**	1,414634146
5		**A2**	1,413793103
6		**A3**	1,414634146
7		**A4**	1,413793103
8		**A5**	1,414634146
9		**A6**	1,413793103

On remarque que ces valeurs sont proches de $\sqrt{2}$ (on rappelle que $\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$).
Démontrer que si une feuille a pour rapport $\sqrt{2}$ alors, en coupant cette feuille au milieu dans la longueur, on obtient deux feuilles ayant chacune pour rapport $\sqrt{2}$.

Imaginons choisie une feuille A dont la largeur est ℓ et la longueur L de sorte que $\frac{L}{\ell} = \sqrt{2}$.

Démontrons que la feuille A' obtenu en coupant A au milieu de sa longueur a aussi pour rapport $\sqrt{2}$.

Notons ℓ' et L' respectivement les largeur et longueur de A'.
Nous avons donc : $\ell' = \frac{L}{2}$ et $L' = \ell$.
Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{L'}{\ell'} &= \frac{\ell}{\frac{L}{2}}\\ &= \frac{\frac{\ell}{1}}{\frac{L}{2}}\\ &= \frac{\ell}{1}\times\frac{2}{L}\\ &= \frac{2\ell}{L}\\ &= 2\frac{\ell}{L}\end{aligned}$$

Or $\frac{L}{\ell}=\sqrt{2}$ donc $\frac{\ell}{L}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et

$$\begin{aligned}\frac{L'}{\ell'} &= 2\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Si A a pour rapport $\sqrt{2}$ alors A' a aussi pour rapport $\sqrt{2}$.

Partie E : un angle droit.

On dispose d'une feuille rectangulaire $ABCD$ telle que $AB=\sqrt{2}$ et $BC=1$ (figure 1).

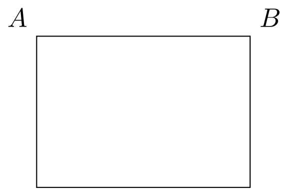
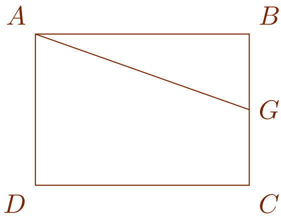


Figure 1

On appelle E le milieu de $[DC]$ et F l'intersection des droites (AE) et (BD).

1. On appelle G le milieu de $[BC]$. Démontrer que la longueur AG vaut $\frac{3}{2}$.



Calculons AG.

ABG est rectangle en B, donc, d'après le théorème de Pythagore

$$AG^2 = AB^2 + BG^2.$$

Donc :

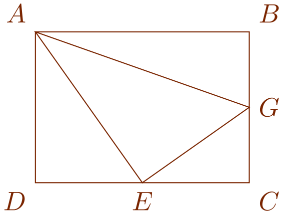
$$\begin{aligned} AG^2 &= \sqrt{2}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 2 + \frac{1^2}{2^2} \\ &= 2 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{8}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Puisque AG est une longueur c'est un nombre positif donc

$$\begin{aligned} AG &= \sqrt{\frac{9}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} \end{aligned}$$

$$AG = \frac{3}{2}.$$

2. Démontrer que AEG est un triangle rectangle en E.



Démontrons que AEG et rectangle en E.

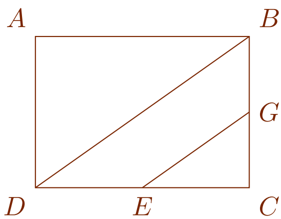
En procédant comme à la question précédente :
— puisque ADE est rectangle en D, $AE^2 = \frac{3}{2}$,
— puisque ECG est rectangle en C, $EG = \frac{3}{4}$.
Ainsi

$$\begin{aligned} AE^2 + EG^2 &= \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Or nous avions établi que $AG^2 = \frac{9}{4}$, donc $AE^2 + EG^2 = AG^2$.
Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore que

AEG est rectangle en E.

3. Démontrer que les droites (BD) et (EG) sont parallèles.



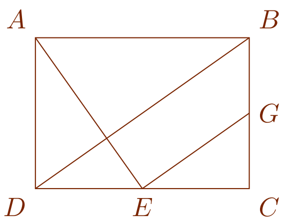
Démontrons que $(BD) \parallel (EG)$.

* Configuration de Thalès. Les points D, E, C d'une part et B, G, C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* Hypothèse de la réciproque du théorème de Thalès.
  E (resp. G) étant le milieu de $[DC]$ (resp. $[BC]$) nous avons $\frac{CE}{CD} = \frac{CG}{CB} = \frac{1}{2}$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$\boxed{(BD) \parallel (EG).}$$

4. En déduire que les droites (BD) et (AE) sont perpendiculaires en F.



D'après la question 2 : $(AE) \perp (EG)$,
et d'après la question précédente : $(BD) \parallel (EG)$,
donc $(AE) \perp (BD)$.

Comme de plus, par construction le point d'intersection de (AE) et (BD) est F nous pouvons conclure

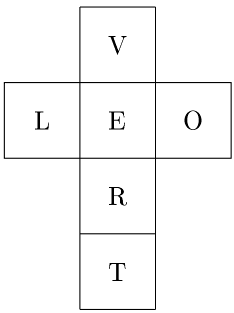
$$\boxed{(BD) \text{ et } (AE) \text{ se coupent perpendiculairement en } F.}$$

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

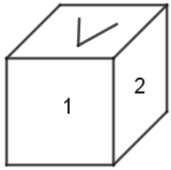
Exercice 1.

1. On donne le patron d'un cube pour lequel est écrite une lettre sur chacune des six faces :



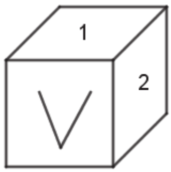
Pour chacun des cubes représentés en perspective ci-dessous, déterminer la lettre écrite sur les faces 1 et 2.

(a) Première représentation du cube.



La face 1 est celle du E et la 2 celle du O.

(b) Seconde représentation du cube.



La face 1 est celle du T et la 2 celle du O.

2. On donne à présent le patron d'un cube avec les faces décorées de figures géométriques particulières (figure 1 ci-dessous).

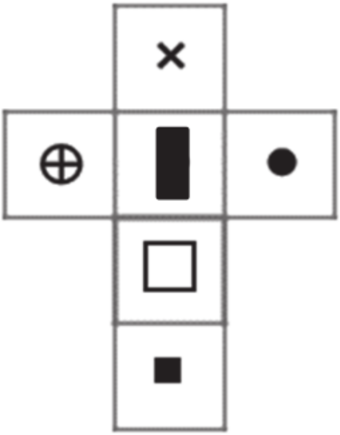


Figure 1.

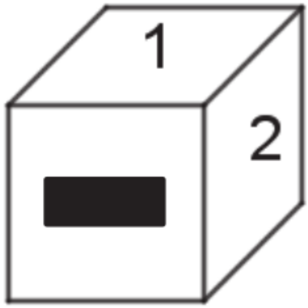


Figure 2.

Ce même cube est également représenté en perspective (figure 2).
De combien de façons peut-on remplacer le 1 et le 2 sur le cube représenté en perspective cavalière ? Donner toutes les réponses possibles.

Il est possible de remplacer le 1 et le 2 de deux façons :

première possibilité

1	●
2	□

seconde possibilité

1	⊕
2	×

Exercice 2.

On considère le programme Scratch suivant :

Lien pour télécharger le programme Scratch.

1. Si l'utilisateur saisit le nombre 17, quelles seront les valeurs des variables Q et R en fin d'exécution ?

Construisons le tableau d'état des variables de ce programme.

	réponse	R	Q	R < 7
demander	17			
mettre Q à 0	17		0	
mettre R à réponse	17	17	0	
répéter jusqu'à R < 7	17	17	0	0 (faux)
mettre Q à Q + 1	17	17	1	0 (faux)
mettre R à R - 7	17	10	1	0 (faux)
répéter jusqu'à R < 7	17	10	1	0 (faux)
mettre Q à Q + 1	17	10	2	0 (faux)
mettre R à R - 7	17	3	2	0 (faux)
répéter jusqu'à R < 7	17	3	2	1 (vrai)

Si l'utilisateur choisi 17, alors le programme renvoie $R = 3$ et $Q = 2$.

2. Que représentent, par rapport au nombre saisi par l'utilisateur, les valeurs des variables Q et R obtenues en fin d'exécution ?

   Q est un compteur de passage dans la boucle et à chaque passage dans la boucle R est diminué de 7. Autrement dit il s'agit de déterminer combien de fois il est possible de mettre 7 dans R.

   Plus simplement

   > Q est le quotient de la valeur choisie par l'utilisateur dans la division euclidienne par 7, et R son reste.

3. En déduire les valeurs des variables Q et R obtenues en fin d'exécution lorsque l'utilisateur saisit le nombre 2020.

   Procédons à la division euclidienne de 2020 par 7.

$$\begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,0 & 7 \\ \cline{2-2} 6\,2 & 2\,8\,8 \\ 6\,0 & \\ 4 & \end{array}$$

   Donc

$$2020 = 288 \times 7 + 4.$$

   > Si l'utilisateur choisi 2020, alors le programme renvoie $R = 4$ et $Q = 288$.

Exercice 3.

Le mathématicien suédois von Koch a imaginé en 1904 une figure géométrique obtenue à partir d'un triangle équilatéral par réitération d'une transformation appliquée à chaque côté d'un triangle. Cette figure s'appelle *le flocon de von Koch.*

Pour passer d'une figure à la suivante, chaque côté est partagé en trois segments de même longueur. On remplace le tiers central de chaque segment par un triangle équilatéral sans base. On répète cette opération sur la figure obtenue.

On donne les trois premières étapes de construction :

Étape 0. Étape 1. Étape 2.

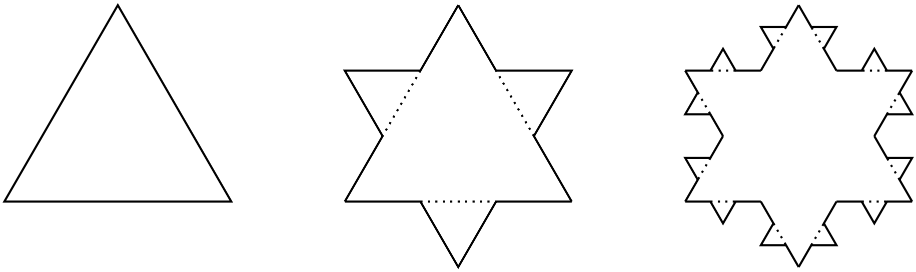


Figure 0. Figure 1. Figure 2.

1. (a) Donner le nombre de côtés de la Figure 1, puis de la Figure 2.

   Chacun des trois côtés de la figure 0 est séparé en quatre côtés donc un total de 3×4 côtés

   la figure 1 compte 12 côtés.

   De nouveau chacun des côtés de la figure 1 est partagé en 4 nouveaux côtés.

   La figure 2 compte 48 côtés.

   (b) Déterminer le nombre de côtés de la Figure 3.

   Nous avons remarqué que le nombre de côtés est multiplié par 4 donc

   la figure 3 compte 192 côtés.

   (c) Exprimer le nombre de côtés de la Figure n obtenue à l'Étape n pour un nombre entier positif n.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Notons N_k le nombre de côté de la figure k quelque soit k entier naturel.

   Exprimons N_n en fonction de n.

   Nous avons remarqué que pour passer passer d'une étape à la suivante le nombre de côtés est multiplié par 4, par conséquent (N_n) est une suite géométrique de terme initial $N_0 = 3$ et de raison $q = 4$.

Nous en déduisons la formule explicite :

$$N_n = N_0 \times q^n.$$

En tenant compte des données numériques :

$$N_n = 3 \times 4^n.$$

Ainsi, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $N_n = 3 \times 4^n$.

On suppose que le côté du triangle équilatéral de la Figure 0 mesure 1 cm.
On appelle L_0, L_1, L_2, ..., L_n les longueurs d'un côté des Figures 0, 1, 2, ..., n.
On appelle P_0, P_1, P_2, ..., P_n les périmètres des Figures 0, 1 , 2, ..., n.
Par exemple, $L_0 = 1$ et $P_0 = 3$.

2. (a) Justifier que $L_1 = \frac{1}{3}$, puis donner sous forme de fraction irréductible les valeurs de L_2 et L_3.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Chaque côté de la figure n est partagé en trois segment de même longueur donc : $L_{n+1} = \frac{1}{3} \times L_n$.
En particulier : $L_1 = \frac{1}{3} \times L_0 = \frac{1}{3} \times 1$.

$$L_1 = \frac{1}{3}.$$

De même : $L_2 = \frac{1}{3}L_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^2}$.

$$L_2 = \frac{1}{9}.$$

$\frac{1}{9}$ est bien la forme irréductible car les numérateurs et dénominateurs de $\frac{1}{3^2}$ correspondent à des décompositions en facteurs premiers et que plus aucune simplification n'est possible.

De même

$$L_3 = \frac{1}{27}.$$

(b) Donner une expression de L_n en fonction de n.

Nous avons remarqué à la question précédente la formule de récurrence

$$L_{n+1} = \frac{1}{3}L_n$$

quelque soit $n \in \mathbb{N}$, qui est la formule de récurrence définissant une suite géométrique.
Nous en déduisons que (L_n) est une suite géométrique de terme initial $L_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.
Par conséquent une formule explicite de (L_n) est

$$\boxed{L_n = \frac{1}{3^n} \text{ quelque soit } n \in \mathbb{N}.}$$

3. (a) Justifier que $P_1 = 4$, puis donner les valeurs de P_2 et P_3.

Nous remarquons que, quelque soit l'entier naturel n, $P_n = N_n \times L_n$.
Donc

$$\boxed{P_1 = 4,\ P_2 = \frac{16}{3} \text{ et } P_3 = \frac{64}{9}.}$$

(b) Donner une expression de P_n en fonction de n.

Soit n$\in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P_n &= N_n \times L_n \\ &= 3 \times 4^n \times \frac{1}{3^n} \\ &= 4^n \times \frac{3}{3^n} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n = \frac{4^n}{3^{n-1}}.}$$

4. Peut-on trouver un nombre entier n tel que le périmètre P_n de la Figure n soit supérieur à 1 km ? expliquer le raisonnement suivi.

Démontrons l'existence du n cherché.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$: $P_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Par conséquent (P_n) est une suite arithmétique de terme initial $P_0 = 3$ et de raison $q = \frac{4}{3}$.
Puisque $q > 1$ nous en déduisons que (P_n) diverge vers $+\infty$.
En particulier

il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_n \geqslant 100\,000$.

Dans un démarche plus constructiviste nous pouvons essayer de déterminer un rang $n \in \mathbb{N}$ qui convienne.

1 km = 100 000 cm.

Cherchons n tel que $P_n \geqslant 100\,000$.

La méthode la plus propre pour trouver le rang n pour lequel la valeur souhaitée est atteinte nécessite la fonction logarithme qui est dorénavant au programme de terminale. Nous allons adopter une résolution algorithmique.

* Première méthode.
  En entrant la fonction $x \mapsto \frac{4^x}{3^{n-1}}$ dans la calculatrice nous obtenons ensuite un tableau de valeur. En faisant défiler les valeurs nous voyons que $P_{36} \approx 94\,388$ et $P_{37} \approx 125\,850$.
* Deuxième méthode.
  Nous pouvons aussi faire un algorithme. Par exemple en Python :

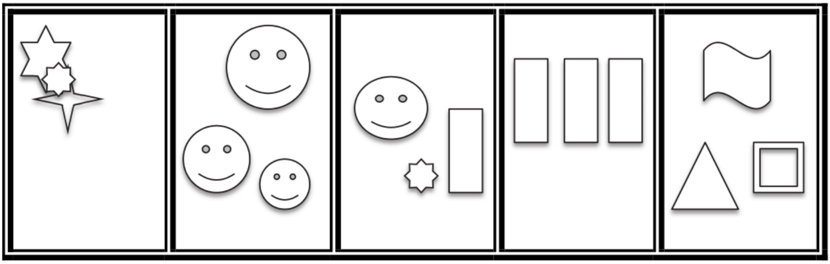
```
def seuil():
    P=3
    n=0
    while P<100000:
        n=n+1
        P=4**n/3**(n-1)
    return(n)
```

III Troisième partie (14 points).

Cette partie est composée de quatre situations indépendantes.

Situation 1.

Dans le cadre de la construction du nombre 3 en petite section, les élèves élaborent des affichages à l'aide de gommettes. Les affiches sont reproduites ci-dessous.



Donner trois intérêts d'un tel affichage.

Situation 2.

Un enseignant veut évaluer la compréhension de l'écriture décimale par ses élèves de CM1. Il trouve les deux exercices ci-dessous dans un manuel.

Exercice 1 : Ranger les nombres ci-dessous dans l'ordre croissant.

4,32 4,56 3,25 4,11 4,78 3,18

Exercice 2 : Ranger les nombres ci-dessous dans l'ordre croissant.

4,32 4,7 5 4,09 3,2 3,18

Donner au moins deux conceptions erronées fréquentes des élèves que l'exercice 1 ne permet pas de repérer contrairement à l'exercice 2.

Situation 3.

Voici un extrait de la note de service n°2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ».

« **Modéliser** » **et** « **Calculer** » **sont deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes à l'école élémentaire** qui doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :

— difficultés à « modéliser » : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;

— difficultés à « calculer » : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calculs utilisés.

Dans une classe de CE2, l'enseignant propose le problème ci-dessous :

Une bibliothécaire a reçu 12 cartons de 35 livres chacun. Elle a mis 125 livres le matin sur les étagères de la bibliothèque et 217 l'après-midi.
Combien de livres doit-elle encore ranger ?

Élève 1

$$\begin{array}{r} 125 \\ +\ 217 \\ \hline 332 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 332 \\ 12 \\ +\ 35 \\ \hline 379 \end{array}$$

Elle doit ranger 379 livres.

Élève 2

35
35 70
35
35 70
35
35 70
35
35 70
35
35 70
35
35 70
420

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 420 \\ +\ 125 \\ +\ 217 \\ \hline 762 \end{array}$$

Elle a rangé 762 livres.

Élève 3

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ \ 12 \\ \hline 35 \\ 610 \\ \hline 645 \end{array}$$

Elle a reçu 645 livres.

$$\begin{array}{r} 645 \\ -\ \ 342 \\ \hline 303 \end{array}$$

Elle doit ranger 303 livres.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 125 \\ +\ \ 217 \\ \hline 342 \end{array}$$

Elle a mis 342 livres sur les étagères.

1. En vous appuyant sur l'extrait de la note de service proposé ci-dessus, analyser les productions des élèves en termes de réussites et d'erreurs pour chacune des compétences « Modéliser » et « Calculer ».

2. Proposer une remédiation ou un accompagnement que l'enseignant pourrait mettre en place pour aider l'élève 1 à résoudre ce type de problème.

Situation 4.

Lors d'un séjour en classe de mer, des élèves de CM2 ont mené des expériences pour récupérer du sel contenu dans l'eau de mer. Avec deux litres d'eau de mer, ils ont obtenu 70 grammes de sel. L'enseignant décide d'utiliser ce résultat pour leur soumettre l'exercice suivant.

> Exercice :
>
> A. J'ai rapporté 6 litres d'eau de mer de notre séjour scolaire. Quelle quantité de sel va-t-on obtenir en réalisant la même expérience qu'en classe de mer ?
>
> B. Avec 7 litres d'eau de mer, quelle serait la masse de sel obtenue ?
>
> C. Si je veux récupérer 350 grammes de sel, combien de litres d'eau de mer dois-je utiliser ?

1. Donner trois procédures que l'on peut attendre d'élèves de CM2 pour répondre à la question B. ?

2. On a reproduit ci-dessous, la trace écrite d'un élève :

> **A.** 2 litres +2 litres+2 litres = 6 litres
>
> 70 grammes +70 grammes +70 grammes = 210 grammes
>
> **B.** 2 litres+2 litres + 2 litres + 1 litre = 7 litres ; 70 + 70 + 70 + 35 = 245 grammes
>
> **C.** 70 × 5 = 350 2×5=10 litres

(a) Sur quelle propriété mathématique l'élève s'appuie-t-il pour répondre à la première question de l'exercice ?

(b) Sur quelle propriété mathématique l'élève s'appuie-t-il pour répondre à la question C. ?