Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 6.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Partie A : étude d'une première disposition.

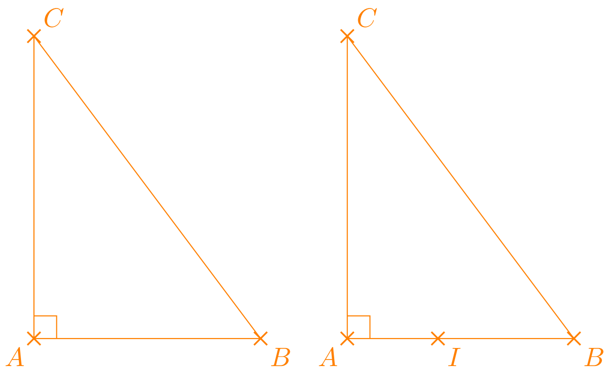
1. Justifions que $AIKJ$ est un rectangle.

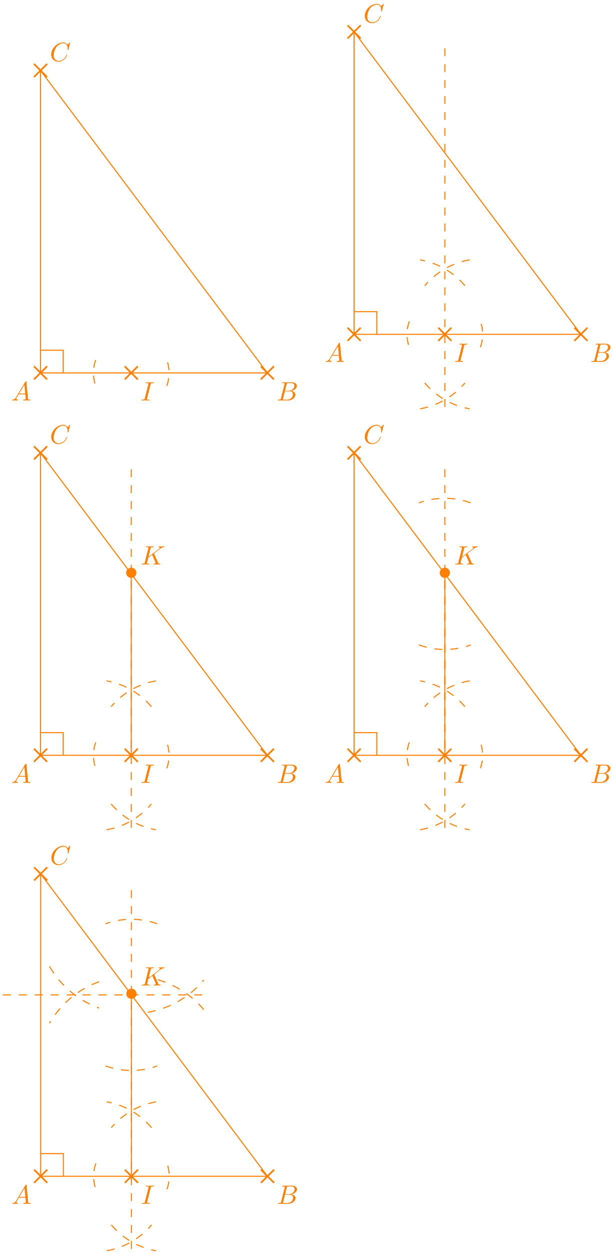
   Nous admettrons que le quadrilatère $AIKJ$ est convexe.

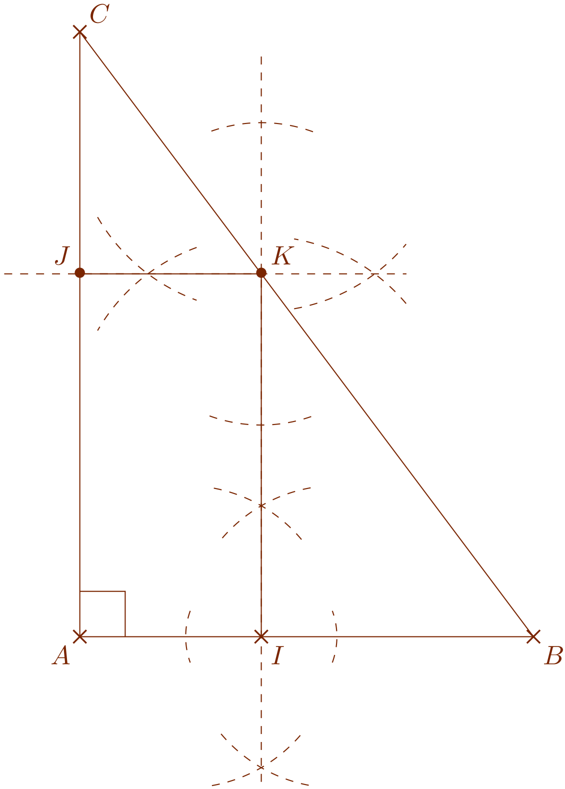
   ABC est rectangle en A donc $\widehat{IAJ}$ est droit.
   (KI) est perpendiculaire à (AB) donc $\widehat{KIA}$ est droit.
   (KJ) est perpendiculaire à (AC) donc $\widehat{AJK}$ est droit.
   Le quadrilatère convexe) $AIKJ$ ayant trois angles droits nous pouvons affirmer :

   $AIKJ$ est un rectangle.

2. (a) Voici une construction à la règle non graduée (hormis pour le point I) et au compas.




C
A
I
B
K



(b) Déterminons IK.

* Configuration de Thalès.
  Les points B, I, A d'une part et B, K ,C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* Hypothèse du théorème.
  $(IK) \parallel (AC)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BI}{BA} = \frac{IK}{AC}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\frac{AB - AI}{AB} = \frac{IK}{AC}$$

Les longueurs étant toutes exprimées en centimètres :

$$\frac{6-2{,}4}{6} = \frac{IK}{8}$$
$$\frac{3.6}{6} = \frac{IK}{8}$$
$$\frac{3.6}{6}\times 8 = \frac{IK}{8}\times 8$$
$$4{,}8 = IK$$

$$\boxed{IK = 4{,}8 \text{ cm.}}$$

(c) Calculons l'aire $\mathscr{A}(AIKJ)$ du rectangle $AIKJ$.

$$\mathscr{A}(AIKJ) = AI \times KJ$$
$$(2{,}4 \text{ cm}) \times (4{,}8 \text{ cm})$$
$$= 2{,}4 \times 4{,}8 \text{ cm} \cdot \text{cm}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(AIKJ) = 11{,}52 \text{ cm}^2.}$$

3. (a) Exprimons BI.

$I \in [AB]$, $AB = 6$ cm et $AI = x$ (avec x exprimé en centimètres) donc en centimètres :

$$BI = AB - AI$$

$$\boxed{BI = 8 - x.}$$

(b) Déterminons IK.

En utilisant le théorème de Thalès comme à la question 2.(b) nous obtenons :

$$\frac{BI}{BA} = \frac{IK}{AC}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{AB - AI}{AB} &= \frac{IK}{AC} \\
\frac{6 - x}{6} &= \frac{IK}{8} \\
\frac{6 - x}{6} \times 8 &= \frac{IK}{8} \times 8 \\
\left(\frac{6}{6} - \frac{x}{6}\right) \times 8 &= IK \\
\left(1 - \frac{1}{6}x\right) 8 &= IK \\
1 \times 8 - \frac{1}{6}x \times 8 &= IK \\
8 - \frac{8}{6}x &= IK \\
8 - \frac{4 \times 2}{3 \times 2}x &= IK
\end{aligned}$$

$$\boxed{IK = 8 - \tfrac{4}{3}x.}$$

(c) Exprimons l'aire $\mathscr{A}(AIKJ)$ du rectangle $AIKJ$ en fonction de x.

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(AIKJ) &= AI \times KJ \\
&= x \times \left(8 - \frac{4}{3}x\right)
\end{aligned}$$

Nous pourrions nous contenter de cette expression factorisée qui répond à la question. Habituellement les expressions polynomiales, afin d'être aisément identifiables, se présentent sous forme développée, ordonnée et réduite.

$$\boxed{\mathscr{A}(AIKJ) = -\tfrac{4}{3}x^2 + 8x.}$$

(d) Traduisons l'énoncé par une équation.

Déterminons pour quelles valeurs de x nous avons $AI = IK$.

$$AI = IK$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
x &= 8 - \frac{4}{3}x \\
x + \frac{4}{3}x &= 8 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}x \\
\left(1 \frac{4}{3}\right)x &= 8 \\
\frac{7}{3}x &= 8 \\
\frac{7}{3}x \times \frac{3}{7} &= 8 \times \frac{3}{7} \\
x &= \frac{24}{7}
\end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant \frac{24}{7} \leqslant 6$ nous pouvons conclure.

$AIKJ$ est un carré si et seulement si $AI = \frac{24}{7}$ cm.

Partie B : étude d'une seconde disposition.

1. Justifions que $IPQR$ est un rectangle.

   * R est le point du segment $[AC]$ tel que (RI) est parallèle à (BC) donc $IPQR$ est un trapèze de bases $[IR]$ et PQ.
   * P est le point du segment $[BC]$ tel que (PI) est perpendiculaire à (BC) donc $\widehat{QPI}$ est droit.
     Q est le point du segment $[BC]$ tel que (RQ) est perpendiculaire à (BC) donc $\widehat{RQP}$ est droit.

   $IPQR$ est un trapèze dont les deux angles d'une base sont droits donc

   $IPQR$ est un rectangle.

2. Calculons BC.

   ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore

   $$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

   Autrement dit, BC, AB et AC étant exprimés en centimètre :

   $$\begin{aligned} BC^2 &= 8^2 + 6^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

   BC étant une longueur c'est un nombre positif donc :

   $$BC = \sqrt{100}$$

   $$\boxed{BC = 10 \text{ cm.}}$$

3. (a) Justifions l'égalité proposée.

   * Puisque H est le pied de la hauteur issue de A l'aire, $\mathscr{A}(ABC)$, de ABC est donnée par : $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AH \times BC$.
   * Puisque ABC est rectangle en A, $[AB]$ est la hauteur issue de B de ABC et donc : $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times AC$.

   Finalement en égalant les deux formules trouvée pour $\mathscr{A}(ABC)$:

   $$\boxed{\frac{1}{2} \times AH \times BC = \frac{1}{2} \times AB \times AC.}$$

   (b) Déterminons AH.

   L'égalité obtenue à la question précédente équivaut successivement :

   $$\begin{aligned} 2\times \times AH \times BC &= 2\times \frac{1}{2} \times AB \times AC \\ AH \times BC &= AB \times AC \\ \frac{AH \times BC}{BC} &= \frac{AB \times AC}{BC} \quad \text{car } BC \neq 0 \\ AH &= \frac{AB \times AC}{BC} \\ AH &= \frac{6 \times 8}{10} \end{aligned}$$

$$AH = 4{,}8 \text{ cm.}$$

4. (a) Justifions que $(IP) \parallel (AH)$.

Par construction $(IP) \perp (BC)$ et, puisque H est le pied de la hauteur issue de A dans ABC, $(AH) \perp (BC)$, donc

$$(AH) \parallel (IP).$$

(b) Exprimons IP en fonction de x.

* Configuration de Thalès.
  Les points B, I, A d'une part et B, P ,H d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* Hypothèse du théorème.
  $(IP) \parallel (AH)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BI}{BA} = \frac{IP}{AH}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\frac{AB - AI}{AB} = \frac{IP}{AH}$$

Les longueurs étant toutes exprimées en centimètres :

$$\frac{6-x}{6} = \frac{IP}{4{,}8}$$

$$\frac{6-x}{6}\times 4{,}8 = \frac{IP}{4{,}8}\times 4{,}8$$

$$(6-x)\frac{4{,}8}{6} = IP$$

$$(6-x)\times 0{,}8 = IP$$

$$6\times 0{,}8 - x\times 0{,}8 = IP$$

$$IP = 4{,}8 - 0{,}8x.$$

5. (a) Justifions que $\frac{IR}{BC} = \frac{AI}{AB}$.

   * Configuration de Thalès.
     Les points A, I, B d'une part et A, R ,C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèse du théorème.
     Puisque $IPQR$ est un rectangle $(IR) \parallel (BC)$.

   Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

   $$\boxed{\frac{IR}{BC} = \frac{AI}{AB}.}$$

   (b) Exprimons IR en fonction de x.

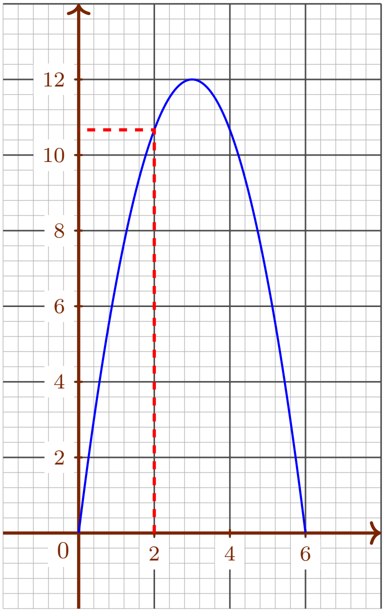
   L'égalité démontrée à la question précédente équivaut successivement à :

   $$\begin{aligned} \frac{IR}{10} &= \frac{x}{6} \\ \frac{IR}{10}\times 10 &= \frac{x}{6}\times 10 \\ IR &= \frac{10}{6}x \\ IR &= \frac{2\times 5}{2\times 3}x \end{aligned}$$

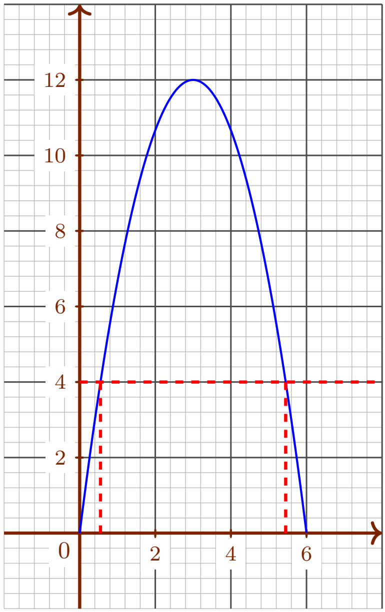
   $$\boxed{IR = \frac{5}{3}x.}$$

Partie C.

1. (a)

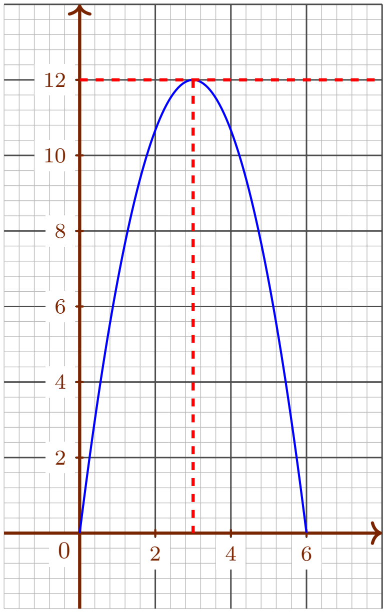


Si $AI = 2$ cm alors l'aire de $AIKJ$ est de 10,8 cm^2.



(b)

L'aire de $AIKJ$ est de 4 cm^2 lorsque AI = 0,5 cm ou AI = 5,5 cm.

(c) 

L'aire de $AIKJ$ est maximale lorsque $AI = 3$ cm.

2. Comparons les aires de $AIKJ$ et $IPQR$.

   Nous avons établi à la question A.3.(c) que $\mathscr{A}(AIKJ) = -\frac{4}{3}x^2 + 8x$.

   D'autre part l'aire du rectangle $IPQR$ est

$$\mathscr{A}(IPQR) = IP \times IR$$

   D'après les questions B.4.(a) et B.5.(b) :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(IPQR) &= (4{,}8 - 0{,}8x) \times \left(\frac{5}{3}x\right) \\ &= 4{,}8 \times \frac{5}{3}x - 0{,}8x \times \frac{5}{3}x \\ &= 8x - \frac{4}{3}x^2\end{aligned}$$

   Ainsi trouver les valeurs de x pour lesquelles les aires seraient égales équivaut à résoudre l'équation $-\frac{4}{3}x^2 + 8x = 8x - \frac{4}{3}x^2$.

Cette équation est évidemment vraie quelque soit la valeur de x choisie.

Quelque soit la position du point I choisie, les aires des deux rectangles sont égales.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. (a) Déterminons l'aire totale A_1 de papier nécessaire pour produire carte et enveloppe.

L'aire du carré $ABCD$ est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= (20 \text{ cm})^2 \\ &= 20^2 \text{ cm}^2 \\ &= 400 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Donc, d'après les formules données :

$$\begin{aligned}A_1 &= 2{,}2 \times \mathscr{A}(ABCD) + 1{,}8 \times \mathscr{A}(ABCD) \\ &= 2{,}2 \times \left(400 \text{ cm}^2\right) + 1{,}8 \times \left(400 \text{ cm}^2\right) \\ &= (2{,}2 \times 400 + 1{,}8 \times 400) \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Finalement

$$A_1 = 1\,600 \text{ cm}^2.$$

(b) Déterminons la masse, P_1, de l'enveloppe et de la lettre.

Puisqu'ils sont façonnés avec le papier « super luxe » :

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left(150 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}\right) \times A_1 \\
&= \left(150 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}\right) \times \left(1\,600 \text{ cm}^2\right) \\
&= 150 \times 1\,600 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{cm}^2 \\
&= 240\,000 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \left(\frac{1}{100} \text{ m}\right)^2 \\
&= 240\,000 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^2 \\
&= 24 \text{ g}
\end{aligned}$$

Déterminons le tarif, T_1, de l'affranchissement.

La missive pesant entre 20 g et 100 g si le tarif « lettre verte » s'applique alors il faudra payer, d'après le document 2 :

$$\boxed{T_1 = 1{,}76 \text{ €}.}$$

2. (a) Exprimons la masse, P_2, de la missive.

En procédant comme à la question précédente, nous obtenons l'aire A_2, en mètre carré, de l'ensemble :

$$\begin{aligned}
A_2 &= 2{,}2 \times \left(\frac{1}{100}x\right)^2 + 1{,}8 \times \left(\frac{1}{100}x\right)^2 \\
&= (2{,}2 + 1{,}8) \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 x^2 \\
&= \frac{3}{10\,000}x^2
\end{aligned}$$

En papier « luxe » la masse est donc, en gramme, d'après le document 1 :

$$P_2 = 120 \times \frac{3}{10000}x^2$$

Enfin

$$\boxed{\text{La masse en gramme est } P_2 = 0{,}36x^2.}$$

(b) De nombreux arguments sont sans doute acceptables pour justifier notre réponse.

La masse est fonction de l'aire du carré, or si la longueur du côté du carré est multipliée par a alors sa surface est multipliée par a^2.

Nous pourrions choisir deux longueurs distinctes de coté de carré et vérifier qu'il n'y a pas proportionnalité pour ces valeurs particulière.

Je fais ici le choix d'un argument sur la nature des fonctions.

La masse de papier en fonction de la longueur x obtenue à la question précédente est une fonction polynomiale de degré deux. Ce n'est donc pas une fonction linéaire qui correspondrait à une situation de proportionnalité.

La masse de papier n'est pas proportionnelle à AB.

Exercice 2.

1. (a) Pour que le quadrilatère tracé soit un losange il faut que tous ses côtés aient la même longueur. Or le premier côté avait pour longueur 50 donc, nécessairement

en A il faut écrire 50.

(b) Dans un parallélogramme, donc *a fortiori*, dans un losange la somme des mesures de angles consécutifs est 180°. Nous devons donc avoir

$$40 + B = 180$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 40 + B - 40 &= 180 - 40 \\ B &= 140 \end{aligned}$$

$B = 140$.

(c) Les quatre blocs d'instructions en bleu sont des blocs de mouvement qui tracent (« avancer ») deux côtés du quadrilatère. Il suffit donc d'effectuer une nouvelle fois ce bloc de 4 instructions.

La plus petite valeur possible pour C est 2.

2.

Figure	1	2	3
Script	B	C	A

Exercice 3.

1. * Déterminons l'étendue e.

Pour déterminer l'étendue et la médiane nous aurons besoin d'ordonner la série. Ce n'est pas indispensable, mais pour faciliter la lisibilité de cette série nous allons également la regroupée par modalités, c'est-à-dire, dénombrer les valeurs identiques.

Nombre affiché	6	8	10	11	12	14	16	17	20	25	30
Effectif	4	1	2	2	2	2	2	1	1	2	1

$$\begin{aligned} e &= max - min \\ &= 30 - 6 \end{aligned}$$

$e = 24.$

* Déterminons la médiane, Me, de la série.

Complétons le précédent tableau avec les effectifs cumulés croissants :

Nombre affiché	6	8	10	11	12	14	16	17	20	25	30
Effectif	4	1	2	2	2	2	2	1	1	2	1
E.C.C.	4	5	7	9	11	13	15	16	17	19	20

- Ordre. La série des nombres inscrits sur les boules est rangée dans l'ordre croissant.

- Position de la médiane. L'effectif total est $N = 20$. $\frac{N}{2} = \frac{20}{2} = 10$. Donc Me est (série paire) entre la dixième et la onzième valeurs.
- Calcul de la médiane.

$$Me = \frac{12 + 12}{2}$$

$$\boxed{Me = 12.}$$

- Calculons la moyenne $\overline{x}$ de la série.

  Puisque nous avons regrouper la série par modalités nous allons calculer la moyenne avec la formule de moyenne pondérée.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{4 \times 6 + 1 \times 8 + \cdots + 1 \times 30}{4 + 1 + \cdots + 1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} = 13{,}75.}$$

2. (a) Choisissons une modélisation, *i.e.* un univers et une loi de probabilité, qui soit cohérente avec la situation.

   Notons Ω l'ensemble de toutes les boules. Munissons Ω de la loi d'équiprobabilité : toutes les boules ont donc la même probabilité d'être tirées.

   Notons E_1 l'événement « tirer un nombre pair ».

   Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

   Il y a équiprobabilité, d'après le tableau que nous avons construit à la question précédente E_1 est réalisé par $4 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 15$ issues (il y a 15 boules portant des nombres pairs), Ω contient 20 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1) &= \frac{15}{20} \\ &= \frac{3 \times 5}{4 \times 5}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{3}{4}.$$

(b) La description de l'événement contient le connecteur logique « ou » qui en termes ensembliste se traduit par la réunion. Nous devons donc considérer toutes les boules comportant un numéro pair mais aussi celles comportant un numéro impair et une voyelle.

Notons E_2 l'événement « tirer une voyelle ou un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(E_2)$.

Il y a équiprobabilité, en dénombrant dans la liste des boules nous voyons que E_2 est réalisé par 16 issues (il y a 15 boules portant des nombres pairs et la boule portant U et 17), Ω contient 20 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_2) &= \frac{16}{20}\\ &= \frac{4 \times 4}{5 \times 4}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(E_2) = \frac{4}{5}.$$

(c) La description de l'événement contient le connecteur logique « et » qui en termes ensembliste se traduit par l'intersection. Nous devons donc considérer toutes les boules comportant un numéro pair et (en même temps) une voyelle.

Notons E_3 l'événement « tirer une voyelle et un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(E_3)$.

Il y a équiprobabilité, en dénombrant dans la liste des boules nous voyons que E_3 est réalisé par 8 issues (toutes les boules avec des voyelles sauf celle avec U et 17), Ω contient 20 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_3) &= \frac{8}{20}\\ &= \frac{2 \times 4}{5 \times 4}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(E_3) = \frac{2}{5}.$$

3. Choisissons une nouvelle modélisation pour décrire cette situation.
Notons Ω' l'ensemble de toutes les boules restant dans l'urne après le tirage des lettres M, A, T, H. Munissons Ω' de la loi d'équiprobabilité : toutes les boules (restantes) ont donc la même probabilité d'être tirées.
Les boules M, A, T et H ayant déjà été tirées il reste :

I 14	V 25	E 6	L 8	E 6	S 16	
		E 6	M 10		T 11	I 14
U 17	E 6	S 16	V 25	A 12	Q 30	

Notons E_4 l'événement « obtenir S au cinquième tirage ».

Calculons $\mathbb{P}(E_4)$.

Il y a équiprobabilité, E_4 est réalisé par 2 issues (il y a deux boules portant la lettre S), Ω' contient 16 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_4) &= \frac{2}{16}\\ &= \frac{1 \times 1}{8 \times 2}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(E_4) = \frac{1}{8}.$$

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3.
4.

Situation 2.

1.
2. (a)
   (b)
3. (a)
   (b)

Situation 3.

1. (a)
   (b)
   (c)
2.