Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 6.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à M. Meynier, Mme Ducournau, M. Bouvillon et Mme Champagnat pour toutes les corrections apportées.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Dans tout le problème, on considère le triangle ABC rectangle en A, tel que $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm.

Partie A : étude d'une première disposition.

Dans cette partie, trois points I, K et J sont définis de la façon suivante :

- I est un point du segment $[AB]$;
- K est le point du segment $[BC]$ tel que (KI) est perpendiculaire à (AB) ;
- J est le point du segment $[AC]$ tel que (KJ) est perpendiculaire à (AC).

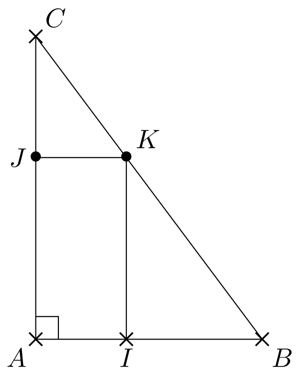


Figure 1.

1. Démontrer que $AIKJ$ est un rectangle.

   Justifions que $AIKJ$ est un rectangle.

   Nous admettrons que le quadrilatère $AIKJ$ est convexe.

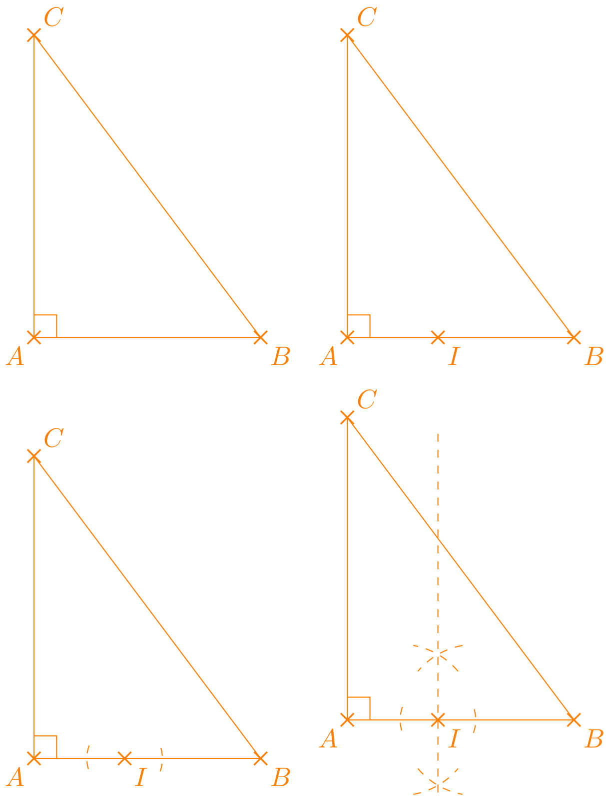
ABC est rectangle en A donc $\widehat{IAJ}$ est droit.
(KI) est perpendiculaire à (AB) donc $\widehat{KIA}$ est droit.
(KJ) est perpendiculaire à (AC) donc $\widehat{AJK}$ est droit.
Le quadrilatère convexe) $AIKJ$ ayant trois angles droits nous pouvons affirmer :

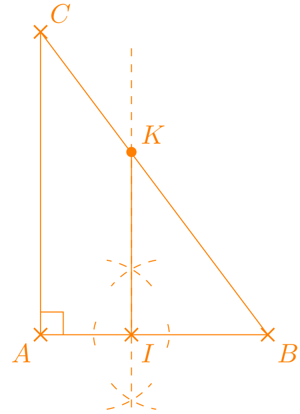
$AIKJ$ est un rectangle.

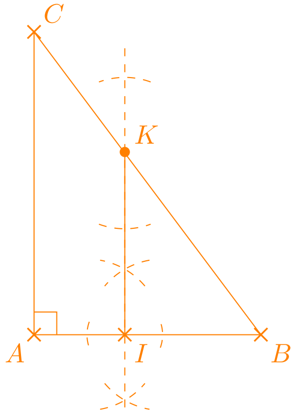
2. On se place dans le cas où $AI = 2{,}4$ cm.

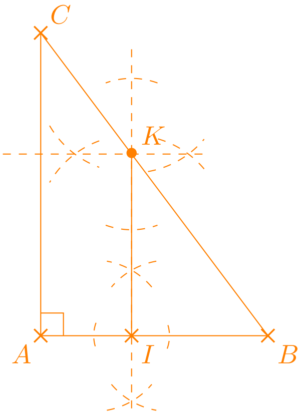
   (a) Tracer le triangle ABC en vraie grandeur et placer les points I, J et K.

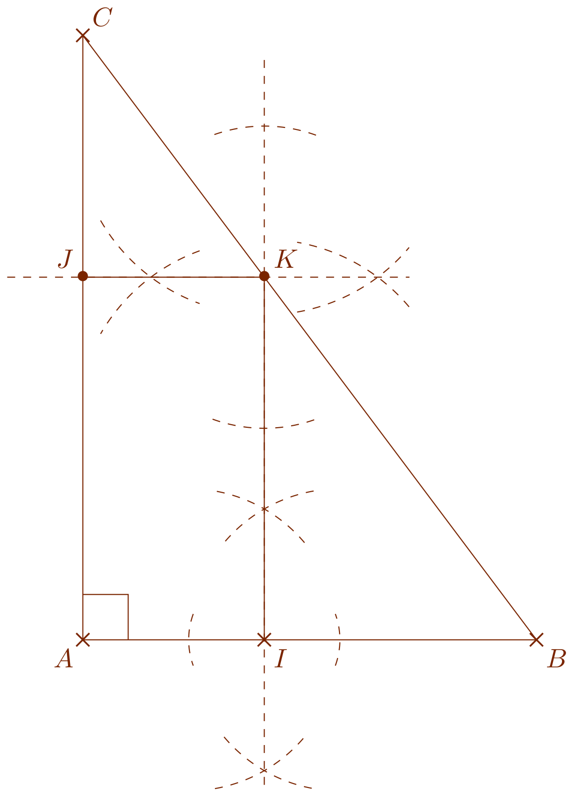
   Voici une construction à la règle non graduée (hormis pour le point I) et au compas.




C
K
A
I
B


C
K
A
I
B


C
K
A
I
B



(b) Montrer que $IK = 4{,}8$ cm.

Déterminons IK.

* Configuration de Thalès.
  Les points B, I, A d'une part et B, K ,C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* Hypothèse du théorème.
  $(IK) \parallel (AC)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BI}{BA} = \frac{IK}{AC}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\frac{AB - AI}{AB} = \frac{IK}{AC}$$

Les longueurs étant toutes exprimées en centimètres :

$$\begin{aligned}\frac{6 - 2{,}4}{6} &= \frac{IK}{8}\\ \frac{3.6}{6} &= \frac{IK}{8}\\ \frac{3.6}{6}\times 8 &= \frac{IK}{8}\times 8\\ 4{,}8 &= IK\end{aligned}$$

$$\boxed{IK = 4{,}8 \text{ cm.}}$$

(c) Calculer l'aire du rectangle $AIKJ$, en centimètre carré.

Calculons l'aire $\mathscr{A}(AIKJ)$ du rectangle $AIKJ$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AIKJ) = AI \times KJ\\ (2{,}4 \text{ cm}) \times (4{,}8 \text{ cm})\\ = 2{,}4 \times 4{,}8 \text{ cm} \cdot \text{cm}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(AIKJ) = 11{,}52 \text{ cm}^2.}$$

3. Le point I est mobile sur le segment $[AB]$, la longueur AI est donc variable. On pose $AI = x$, où x est un nombre compris entre 0 et 6.

   (a) Exprimer BI en fonction de x.

   Exprimons BI.

   $I \in [AB]$, $AB = 6$ cm et $AI = x$ (avec x exprimé en centimètres) donc en centimètres :

$$BI = AB - AI$$

$$BI = 6 - x.$$

(b) Montrer que $IK = 8 - \dfrac{4}{3}x$.

Déterminons IK.

En utilisant le théorème de Thalès comme à la question 2.(b) nous obtenons :

$$\frac{BI}{BA} = \frac{IK}{AC}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{AB - AI}{AB} &= \frac{IK}{AC} \\
\frac{6 - x}{6} &= \frac{IK}{8} \\
\frac{6 - x}{6} \times 8 &= \frac{IK}{8} \times 8 \\
\left(\frac{6}{6} - \frac{x}{6}\right) \times 8 &= IK \\
\left(1 - \frac{1}{6}x\right) 8 &= IK \\
1 \times 8 - \frac{1}{6}x \times 8 &= IK \\
8 - \frac{8}{6}x &= IK \\
8 - \frac{4 \times 2}{3 \times 2}x &= IK
\end{aligned}$$

$$IK = 8 - \tfrac{4}{3}x.$$

(c) En déduire une expression de l'aire de rectangle $AIKJ$ en fonction de x.

Exprimons l'aire $\mathscr{A}(AIKJ)$ du rectangle $AIKJ$ en fonction de x.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AIKJ) &= AI \times IK \\ &= x \times \left(8 - \frac{4}{3}x\right)\end{aligned}$$

Nous pourrions nous contenter de cette expression factorisée qui répond à la question. Habituellement les expressions polynomiales, afin d'être aisément identifiables, se présentent sous forme développée, ordonnée et réduite.

$$\boxed{\mathscr{A}(AIKJ) = -\tfrac{4}{3}x^2 + 8x.}$$

(d) Est-il possible de trouver une position du point I sur le segment $[AB]$ pour laquelle $AIKJ$ est un carré ? Justifier la réponse et, si cela est possible, donner la longueur AI correspondante.

Traduisons l'énoncé par une équation.

Déterminons pour quelles valeurs de x nous avons $AI = IK$.

$$AI = IK$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} x &= 8 - \frac{4}{3}x \\ x + \frac{4}{3}x &= 8 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}x \\ \left(1\frac{4}{3}\right)x &= 8 \\ \frac{7}{3}x &= 8 \\ \frac{7}{3}x \times \frac{3}{7} &= 8 \times \frac{3}{7} \\ x &= \frac{24}{7} \end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant \frac{24}{7} \leqslant 6$ nous pouvons conclure.

$$\boxed{AIKJ \text{ est un carré si et seulement si } AI = \tfrac{24}{7} \text{ cm.}}$$

Partie B : étude d'une seconde disposition.

Dans cette partie, quatre points I, P, R et Q sont définis de la façon suivante :

- I est un point du segment $[AB]$;
- P est le point du segment $[BC]$ tel que (PI) est perpendiculaire à (BC) ;
- R est le point du segment $[AC]$ tel que (RI) est parallèle à (BC) ;
- Q est le point du segment $[BC]$ tel que (RQ) est perpendiculaire à (BC).

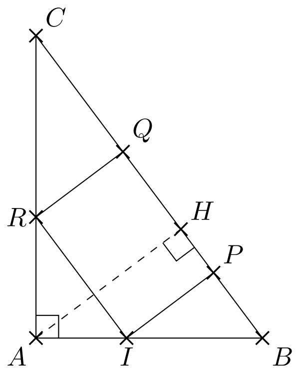


Figure 2.

1. Démontrer que $IPQR$ est un rectangle.

   Justifions que $IPQR$ est un rectangle.

   * R est le point du segment $[AC]$ tel que (RI) est parallèle à (BC) donc $IPQR$ est un trapèze de bases $[IR]$ et PQ.
   * P est le point du segment $[BC]$ tel que (PI) est perpendiculaire à (BC) donc $\widehat{QPI}$ est droit.

     Q est le point du segment $[BC]$ tel que (RQ) est perpendiculaire à (BC) donc $\widehat{RQP}$ est droit.

   $IPQR$ est un trapèze dont les deux angles d'une base sont droits donc

   $$\boxed{IPQR \text{ est un rectangle.}}$$

2. Calculer BC.

   Calculons BC.

ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore

$$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

Autrement dit, BC, AB et AC étant exprimés en centimètre :

$$\begin{aligned} BC^2 &= 8^2 + 6^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

BC étant une longueur c'est un nombre positif donc :

$$BC = \sqrt{100}$$

$$\boxed{BC = 10 \text{ cm.}}$$

3. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

   (a) Expliquer pourquoi $\dfrac{AH \times BC}{2} = \dfrac{AC \times AB}{2}$.

   Justifions l'égalité proposée.

   La formule usuelle de calcul de l'aire d'un triangle parle de « la base » et de « la hauteur ». Il s'agit d'une incorrection car en plus de l'aspect imprécis du terme base, n'importe quel côté du triangle peut être choisi comme base. Pour répondre à cette question nous allons exprimer l'aire du triangle de deux façons différentes en choisissant deux « bases » différentes.

   * Puisque H est le pied de la hauteur issue de A l'aire, $\mathscr{A}(ABC)$, de ABC est donnée par : $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AH \times BC$.
   * Puisque ABC est rectangle en A, $[AB]$ est la hauteur issue de B de ABC et donc : $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times AC$.

   En égalant les deux formules trouvées pour $\mathscr{A}(ABC)$:

   $$\frac{1}{2} \times AH \times BC = \frac{1}{2} \times AB \times AC.$$

   De façon générale : $\frac{1}{b} \times a = \frac{1 \times a}{b} = \frac{a}{b}$.
   Nous pouvons donc écrire la précédente formule de la façon suivante :

   $$\boxed{\frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2}.}$$

(b) En déduire AH.

Déterminons AH.

L'égalité obtenue à la question précédente équivaut successivement :

$$\begin{aligned}
2\times \times AH \times BC &= 2\times \frac{1}{2} \times AB \times AC \\
AH \times BC &= AB \times AC \\
\frac{AH \times BC}{BC} &= \frac{AB \times AC}{BC} \quad \text{car } BC \neq 0 \\
AH &= \frac{AB \times AC}{BC} \\
AH &= \frac{6 \times 8}{10}
\end{aligned}$$

$$\boxed{AH = 4{,}8 \text{ cm.}}$$

Le point I est mobile sur le segment $[AB]$, la longueur AI est donc variable. On pose $AI = x$, où x est un nombre compris entre 0 et 6.

4. (a) Démontrer que les droites (IP) et (AH) sont parallèles.

Justifions que $(IP) \parallel (AH)$.

Par construction $(IP) \perp (BC)$ et, puisque H est le pied de la hauteur issue de A dans ABC, $(AH) \perp (BC)$, donc

$$\boxed{(AH) \parallel (IP).}$$

(b) En déduire que $IP = 4{,}8 - 0{,}8x$.

Exprimons IP en fonction de x.

* Configuration de Thalès.
  Les points B, I, A d'une part et B, P ,H d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* Hypothèse du théorème.
  $(IP) \parallel (AH)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BI}{BA} = \frac{IP}{AH}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\frac{AB - AI}{AB} = \frac{IP}{AH}$$

Les longueurs étant toutes exprimées en centimètres :

$$\frac{6 - x}{6} = \frac{IP}{4{,}8}$$
$$\frac{6 - x}{6} \times 4{,}8 = \frac{IP}{4{,}8} \times 4{,}8$$
$$(6 - x)\frac{4{,}8}{6} = IP$$
$$(6 - x) \times 0{,}8 = IP$$
$$6 \times 0{,}8 - x \times 0{,}8 = IP$$

$$\boxed{IP = 4{,}8 - 0{,}8x.}$$

5. (a) Justifier que $\dfrac{IR}{BC} = \dfrac{AI}{AB}$.

Justifions que $\frac{IR}{BC} = \frac{AI}{AB}$.

* Configuration de Thalès.
  Les points A, I, B d'une part et A, R ,C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* Hypothèse du théorème.
  Puisque $IPQR$ est un rectangle $(IR) \parallel (BC)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\boxed{\frac{IR}{BC} = \frac{AI}{AB}.}$$

(b) En déduire que $IR = \dfrac{5}{3}x$.

Exprimons IR en fonction de x.

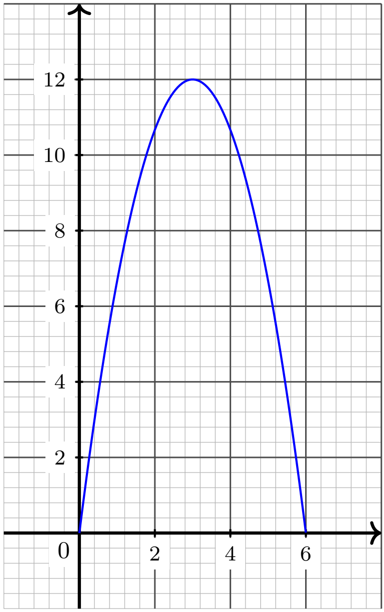
L'égalité démontrée à la question précédente équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{IR}{10} &= \frac{x}{6} \\
\frac{IR}{10}\times 10 &= \frac{x}{6}\times 10 \\
IR &= \frac{10}{6}x \\
IR &= \frac{2\times 5}{2\times 3}x
\end{aligned}$$

$$\boxed{IR = \tfrac{5}{3}x.}$$

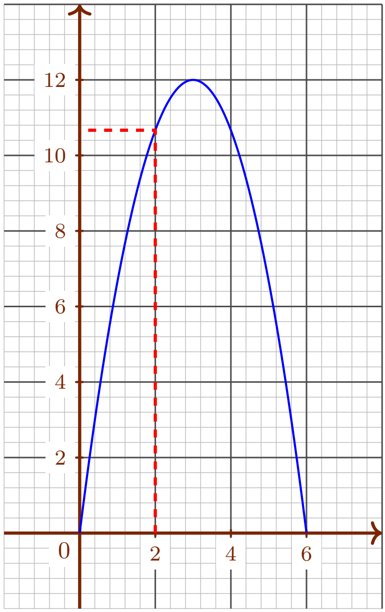
Partie C.

1. On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f, qui, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 6]$, associe l'aire du rectangle $AIKJ$ exprimée en centimètre carré (en lien avec la figure 1 de la situation de la partie A).



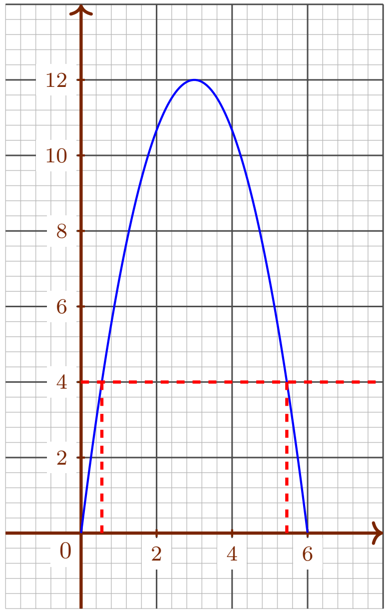
Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

(a) Quelle est l'aire du rectangle $AIKJ$ lorsque $AI = 2$ cm.



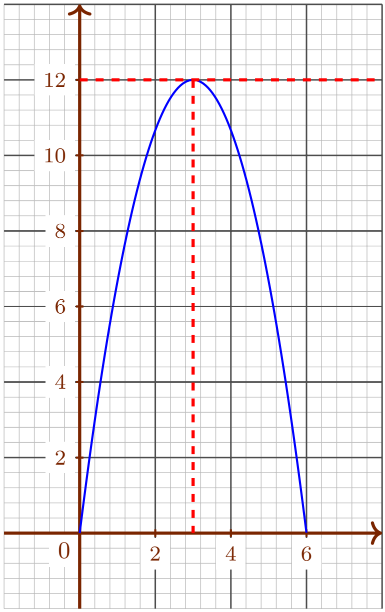
Si $AI = 2$ cm alors l'aire de $AIKJ$ est de 10,8 cm^2.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de AI l'aire du rectangle $AIKJ$ est-elle égale à 4 cm^2 ?



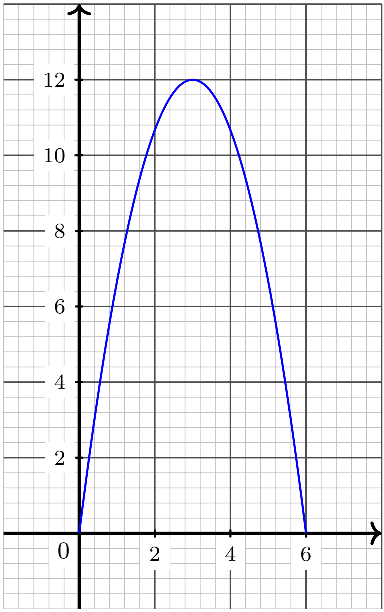
L'aire de $AIKJ$ est de 4 cm^2 lorsque AI = 0,5 cm ou AI = 5,5 cm.

(c) Pour quelle position du point I l'aire du rectangle $AIKJ$ est-elle maximale ?



L'aire de $AIKJ$ est maximale lorsque $AI = 3$ cm.

2. On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction g, qui pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 6]$, associe l'aire du rectangle $IPQR$, exprimée en centimètre carré (en lien avec la figure 2 de la situation de la partie B).



La comparaison de ces deux courbes laisse penser que, pour un point I fixé sur le côté $[AB]$, les aires des rectangles $AIKJ$ et $IPQR$ sont égales. Ce résultat est-il vrai ? Justifier la réponse.

Comparons les aires de $AIKJ$ et $IPQR$.

Nous avons établi à la question A.3.(c) que $\mathscr{A}(AIKJ) = -\frac{4}{3}x^2 + 8x$.

D'autre part l'aire du rectangle $IPQR$ est

$$\mathscr{A}(IPQR) = IP \times IR$$

D'après les questions B.4.(a) et B.5.(b) :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(IPQR) &= (4{,}8 - 0{,}8x) \times \left(\frac{5}{3}x\right)\\ &= 4{,}8 \times \frac{5}{3}x - 0{,}8x \times \frac{5}{3}x\\ &= 8x - \frac{4}{3}x^2\end{aligned}$$

Ainsi trouver les valeurs de x pour lesquelles les aires seraient égales équivaut à résoudre l'équation $-\frac{4}{3}x^2 + 8x = 8x - \frac{4}{3}x^2$.

Cette équation est évidemment vraie quelque soit la valeur de x choisie.

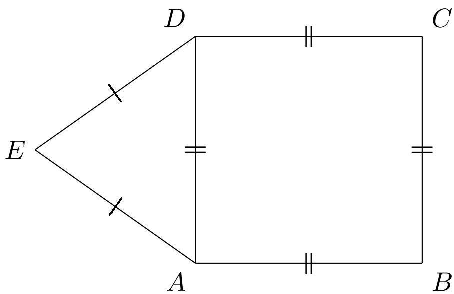
Quelque soit la position du point I choisie, les aires des deux rectangles sont égales.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

Une entreprise veut créer de grands modèles de cartes originales. Elle décide également de produire des enveloppes carrées avec rabat triangulaire selon le modèle ci-contre.



$ABCD$ est un carré ; on note x la longueur du segment $[AB]$ exprimée en centimètre.

On donne les formules suivantes :

Aire total de papier d'un enveloppe : $2{,}2 \times$ aire $ABCD$.
Aire totale de papier d'une carte : $1{,}8 \times$ aire $ABCD$.

On dispose des documents suivants :

Document 1.

Qualité	Grammage (g/m^2)
Papier « luxe »	120
Papier « super luxe »	150
Papier cartonné	350

Document 2.

Source : La Poste							
Prix du timbre							
Type de lettre	**Délai maximum d'acheminement**	**Tarifs**					
	Poids maximum	**20 g**	**100 g**	**250 g**	**500 g**	**3 kg**
Ecopli - timbre gris	4 jours (J+4)	0,86 €	1,72 €	3,44 €	-	-
Lettre verte - timbre vert	2 jours (J+2)	0,88 €	1,76 €	3,52 €	5,28 €	7,04 €
Lettre prioritaire - timbre rouge	1 jour (J+1)	1,05 €	2,01 €	4,20 €	6,30 €	8,40 €

1. L'entreprise choisit de fabriquer une enveloppe dont le côté $[AB]$ mesure 20 cm.

   (a) Montrer que l'aire totale de papier nécessaire pour produire la carte et l'enveloppe est de 1600 cm^2.

   Déterminons l'aire totale A_1 de papier nécessaire pour produire carte et enveloppe.

   L'aire du carré $ABCD$ est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= (20\text{ cm})^2\\ &= 20^2\text{ cm}^2\\ &= 400\text{ cm}^2\end{aligned}$$

   Donc, d'après les formules données :

$$\begin{aligned}A_1 &= 2{,}2\times\mathscr{A}(ABCD)+1{,}8\times\mathscr{A}(ABCD)\\ &= 2{,}2\times\left(400\text{ cm}^2\right)+1{,}8\times\left(400\text{ cm}^2\right)\\ &= (2{,}2\times 400+1{,}8\times 400)\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

   Finalement

$$A_1 = 1\,600 \text{ cm}^2.$$

(b) Déterminer le tarif de l'affranchissement de cette carte en tarif « lettre verte - timbre vert » si l'enveloppe et la carte sont fabriquées en papier « super luxe ».

Déterminons la masse, P_1, de l'enveloppe et de la lettre.

Puisqu'ils sont façonnés avec le papier « super luxe » :

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left(150 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}\right) \times A_1 \\
&= \left(150 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}\right) \times \left(1\,600 \text{ cm}^2\right) \\
&= 150 \times 1\,600 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{cm}^2 \\
&= 240\,000 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \left(\frac{1}{100} \text{ m}\right)^2 \\
&= 240\,000 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^2 \\
&= 24 \text{ g}
\end{aligned}$$

Déterminons le tarif, T_1, de l'affranchissement.

La missive pesant entre 20 g et 100 g si le tarif « lettre verte » s'applique alors il faudra payer, d'après le document 2 :

$$T_1 = 1{,}76 \text{ €}.$$

2. L'entreprise choisit du papier « luxe » pour l'enveloppe et du papier cartonné pour la carte.

(a) Donner en fonction de la longueur x, exprimée en cm, la masse totale de papier utilisé pour produire l'enveloppe et la carte.

Exprimons la masse, P_2, de la missive.

En procédant comme à la question précédente, nous obtenons l'aire A_2, en mètre carré, de l'enveloppe :

$$\begin{aligned} A_2 &= 2{,}2 \times \left(\frac{1}{100}x\right)^2 \\ &= 2{,}2 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 x^2 \\ &= \frac{2{,}2}{10\,000}x^2 \end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit d'un papier « luxe » la masse, exprimée en gramme, de l'enveloppe est

$$\begin{aligned} m_2 &= 120 \times A_2 \\ &= \frac{264}{10000}x^2 \end{aligned}$$

Puis l'aire de la carte :

$$\begin{aligned} A_3 &= 1{,}8 \times \left(\frac{1}{100}x\right)^2 \\ &= 1{,}8 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 x^2 \\ &= \frac{1{,}8}{10\,000}x^2 \end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit d'un papier cartonné la masse, exprimée en gramme, de la carte est

$$\begin{aligned} m_3 &= 350 \times A_3 \\ &= \frac{630}{10000}x^2 \end{aligned}$$

La masse de l'ensemble enveloppe et carte est donc

$$\begin{aligned} P_2 &= m_2 + m_3 \\ &= \frac{264}{10\,000}x^2 + \frac{630}{10000}x^2 \\ &= \frac{894}{10000}x^2 \end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{\text{La masse en gramme est } P_2 = 0{,}0894x^2.}$$

(b) La masse de papier utilisé pour l'enveloppe et la carte est-elle proportionnelle à la longueur du segment $[AB]$? Justifier.

De nombreux arguments sont sans doute acceptables pour justifier notre réponse.

La masse est fonction de l'aire du carré, or si la longueur du côté du carré est multipliée par a alors sa surface est multipliée par a^2.

Nous pourrions choisir deux longueurs distinctes de coté de carré et vérifier qu'il n'y a pas proportionnalité pour ces valeurs particulières.

Je fais ici le choix d'un argument sur la nature des fonctions.

La masse de papier en fonction de la longueur x obtenue à la question précédente est une fonction polynomiale de degré deux. Ce n'est donc pas une fonction linéaire qui correspondrait à une situation de proportionnalité.

$$\boxed{\text{La masse de papier n'est pas proportionnelle à } AB.}$$

Exercice 2.

1. Le bloc ci-dessous, réalisé sous Scratch, permet de dessiner un losange. Trois nombres A, B et C ont été effacés.

(a) Expliquer pourquoi le nombre A est 50.

Pour que le quadrilatère tracé soit un losange il faut que tous ses côtés aient la même longueur. Or le premier côté avait pour longueur 50 donc, nécessairement

$$\boxed{\text{en } A \text{ il faut écrire } 50.}$$

(b) Justifier que le nombre B est 140.

Dans un parallélogramme, donc *a fortiori*, dans un losange la somme des mesures de angles consécutifs est 180°. Nous devons donc avoir

$$40 + B = 180$$

Ceci équivaut successivement à :

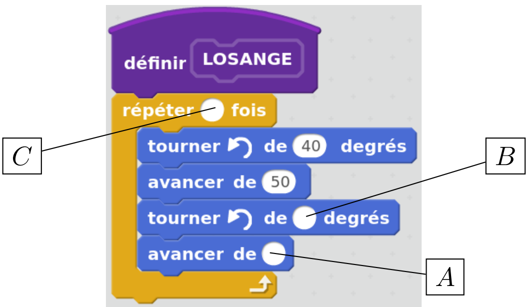
$$40 + B - 40 = 180 - 40$$
$$B = 140$$

$B = 140$.

(c) Déterminer la plus petite valeur possible pour le nombre C en expliquant.

Les quatre blocs d'instructions en bleu sont des blocs de mouvement qui tracent (« avancer ») deux côtés du quadrilatère. Il suffit donc d'effectuer une nouvelle fois ce bloc de 4 instructions.

La plus petite valeur possible pour C est 2.



2. Voici trois figures et trois scripts écrits sous Scratch à l'aide du bloc précédent. Dans chacune des trois figures, le point marqué représente le point de départ du lutin. Associer à chaque figure le script qui permet de l'obtenir, aucune justification n'est attendue.

Figure 1.

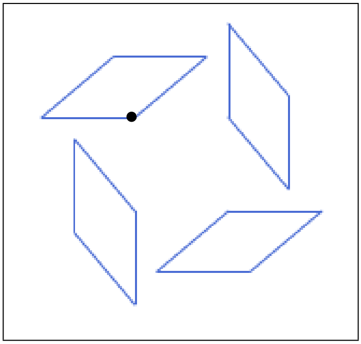


Figure 2.

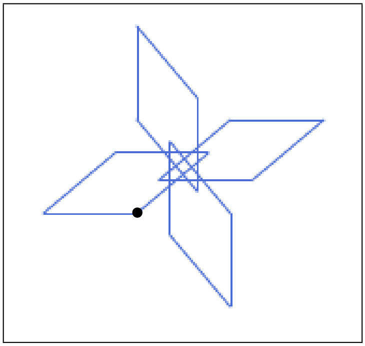
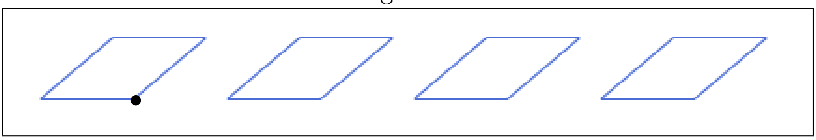


Figure 3.



Script A :

Script B :

Script C :

On rappelle :

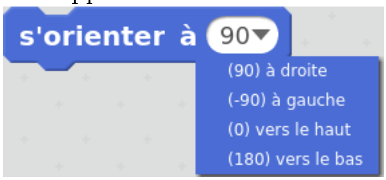


Figure	1	2	3
Script	B	C	A

Exercice 3.

Dans une urne, on place les boules suivantes : sur chaque boule sont écrits une lettre et un nombre.

I 14	V 25	E 6	L 8	E 6	S 16	M 10
T 11	H 20	E 6	M 10	A 12	T 11	I 14
U 17	E 6	S 16	V 25	A 12	Q 30	

1. On considère la série statistique composée des nombres écrits sur les boules placées dans l'urne. Calculer l'étendue, la médiane et la moyenne de cette série.

* Déterminons l'étendue e.

Pour déterminer l'étendue et la médiane nous aurons besoin d'ordonner la série. Ce n'est pas indispensable, mais pour faciliter la lisibilité de cette série nous allons également la regroupée par modalités, c'est-à-dire, dénombrer les valeurs identiques.

Nombre affiché	6	8	10	11	12	14	16	17	20	25	30
Effectif	4	1	2	2	2	2	2	1	1	2	1

$$\begin{aligned} e &= max - min \\ &= 30 - 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{e = 24.}$$

* Déterminons la médiane, Me, de la série.

Complétons le précédent tableau avec les effectifs cumulés croissants :

Nombre affiché	6	8	10	11	12	14	16	17	20	25	30
Effectif	4	1	2	2	2	2	2	1	1	2	1
E.C.C.	4	5	7	9	11	13	15	16	17	19	20

- Ordre. La série des nombres inscrits sur les boules est rangée dans l'ordre croissant.
- Position de la médiane. L'effectif total est $N = 20$. $\frac{N}{2} = \frac{20}{2} = 10$. Donc Me est (série paire) entre la dixième et la onzième valeurs.

- Calcul de la médiane.

$$Me = \frac{12 + 12}{2}$$

$$\boxed{Me = 12.}$$

- Calculons la moyenne $\overline{x}$ de la série.

  Puisque nous avons regrouper la série par modalités nous allons calculer la moyenne avec la formule de moyenne pondérée.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_r x_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{4 \times 6 + 1 \times 8 + \cdots + 1 \times 30}{4 + 1 + \cdots + 1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} = 13{,}75.}$$

2. On suppose que les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne.

   (a) Montrer que la probabilité de « tirer un nombre pair » est $\frac{3}{4}$.

   Choisissons une modélisation, *i.e.* un univers et une loi de probabilité, qui soit cohérente avec la situation.
   Notons Ω l'ensemble de toutes les boules. Munissons Ω de la loi d'équi-probabilité : toutes les boules ont donc la même probabilité d'être tirées.

   Notons E_1 l'événement « tirer un nombre pair ».

   Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

   Il y a équiprobabilité, d'après le tableau que nous avons construit à la question précédente E_1 est réalisé par $4 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 15$ issues (il y a 15 boules portant des nombres pairs), Ω contient 20 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1) &= \frac{15}{20} \\ &= \frac{3 \times 5}{4 \times 5}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{3}{4}.$$

(b) Calculer la probabilité de « tirer une voyelle ou un nombre pair ».

La description de l'événement contient le connecteur logique « ou » qui en termes ensembliste se traduit par la réunion. Nous devons donc considérer toutes les boules comportant un numéro pair mais aussi celles comportant un numéro impair et une voyelle.

Notons E_2 l'événement « tirer une voyelle ou un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(E_2)$.

Il y a équiprobabilité, en dénombrant dans la liste des boules nous voyons que E_2 est réalisé par 16 issues (il y a 15 boules portant des nombres pairs et la boule portant U et 17), Ω contient 20 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_2) &= \frac{16}{20}\\ &= \frac{4 \times 4}{5 \times 4}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(E_2) = \frac{4}{5}.$$

(c) Calculer la probabilité de « tirer une voyelle et un nombre pair ».

La description de l'événement contient le connecteur logique « et » qui en termes ensembliste se traduit par l'intersection. Nous devons donc considérer toutes les boules comportant un numéro pair et (en même temps) une voyelle.

Notons E_3 l'événement « tirer une voyelle et un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(E_3)$.

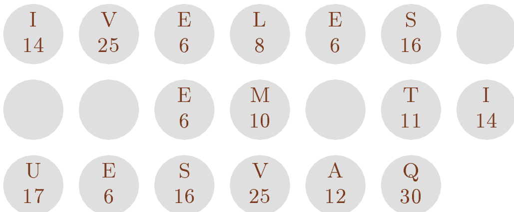
Il y a équiprobabilité, en dénombrant dans la liste des boules nous voyons que E_3 est réalisé par 8 issues (toutes les boules avec des voyelles sauf celle avec U et 17), Ω contient 20 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_3) &= \frac{8}{20}\\ &= \frac{2 \times 4}{5 \times 4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_3) = \frac{2}{5}.}$$

3. On tire successivement et sans remise 5 boules. On obtient après les quatre premiers tirages les lettres M, A, T, H. Quelle est la probabilité d'obtenir grâce au cinquième tirage le mot « M A T H S » ?

   Choisissons une nouvelle modélisation pour décrire cette situation.
   Notons Ω' l'ensemble de toutes les boules restant dans l'urne après le tirage des lettres M, A, T, H. Munissons Ω' de la loi d'équiprobabilité : toutes les boules (restantes) ont donc la même probabilité d'être tirées.
   Les boules M, A, T et H ayant déjà été tirées il reste :



   Notons E_4 l'événement « obtenir S au cinquième tirage ».

   Calculons $\mathbb{P}(E_4)$.

   Il y a équiprobabilité, E_4 est réalisé par 2 issues (il y a deux boules portant la lettre S), Ω' contient 16 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_4) &= \frac{2}{16}\\ &= \frac{1\times 1}{8\times 2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_4) = \frac{1}{8}.}$$

III Troisième partie (14 points).

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

Situation 1.

Un enseignant de CM2 propose les exercices suivants :

<u>Exercice 1</u>

Si j'achète 4 verres, je paie 6 €. Si j'achète 12 verres comme les précédents, combien dois-je payer ?

Réponse de l'élève : $6 \times 3 = 18$.

<u>Exercice 2</u>

On dispose d'un sac de billes identiques. On sait que la masse de 3 billes est 51 g et que la masse de 5 billes est 85 g. Quelle est la masse de 8 billes ?

Réponse de l'élève : $51 + 85 = 136$.

<u>Exercice 3</u>

Pour préparer un gâteau au chocolat, il faut : 90 g de beurre pour 6 personnes et 120 g de beurre pour 8 personnes. Quelle masse de beurre faut-il prévoir pour 20 personnes ?

Réponse de l'élève : $180 + 120 = 300$.

1. Quelle est la notion du programme travaillée dans ces trois exercices ?

2. Pour chaque exercice, analyser la réponse de l'élève et expliciter la procédure utilisée.

3. Expliquer l'intérêt de proposer le troisième exercice après les deux premiers.

4. L'enseignant propose un nouvel énoncé.

<u>Exercice 4</u>

Au marché, 5 kg de cèpes coûtent 100 e. Combien coûtent 2 kg ?

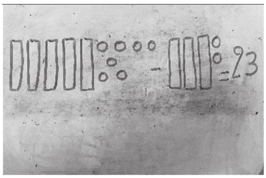
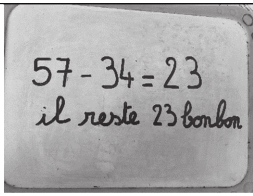
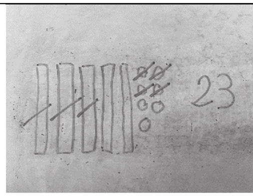
Justifier le choix de ce nouvel énoncé et la procédure encouragée par cet exercice.

Situation 2.

Dans le cadre d'une séance de numération, les problèmes suivants sont proposés à des élèves de CP en milieu d'année.

Problème 1 : Camille met 46 bonbons dans la boîte. Thomas en prend 14. **Combien en reste-t-il dans la boîte ?**
Problème 2 : Camille met 57 bonbons dans la boîte. Thomas en prend 34. **Combien en reste-t-il dans la boîte ?**
Problème 3 : Camille met 52 bonbons dans la boîte. Thomas en prend 28. **Combien en reste-t-il dans la boîte ?**
Problème 4 : Camille met 92 bonbons dans la boîte. Thomas en prend 37. **Combien en reste-t-il dans la boîte ?**

1. Analyser les différentes représentations des élèves pour le problème 2.

<table>
<tr><th>Élève A.</th><th>Élève B.</th><th>Élève C.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

2. (a) À quelle difficulté nouvelle un élève est-il confronté en passant du problème 2 au problème 3 ?

   (b) Que va devoir faire l'élève C s'il utilise la même représentation ?

3. Pour le problème 3, l'élève B a répondu :

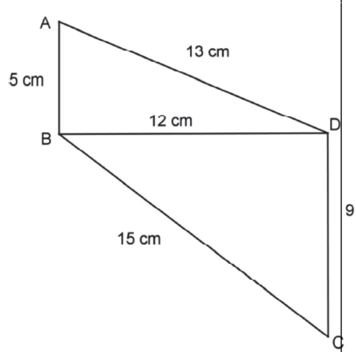
52 − 28 = 36. Il reste 36 bonbons.

   (a) Analyser la réponse de l'élève B.

   (b) Quel type d'aide pourrait être apporté par l'enseignant à cet élève ?

Situation 3.

1. L'exercice suivant a été proposé dans le cadre d'une évaluation dans plusieurs classes de CM2 d'une même école.



Le périmètre de la figure $ABCD$ est :
☐ 29 cm
☐ 66 cm
☐ 54 cm
☐ 42 cm

   (a) Identifier la compétence visée.

   (b) Justifier le choix de chacune des réponses proposées aux élèves.

   (c) Pour chacune des trois réponses erronées possibles, proposer une aide à apporter aux élèves concernés pour leur permettre de comprendre leur erreur.

2. Pour une évaluation sur les décimaux, un enseignant souhaite proposer le calcul :

$$127{,}31 \times 10$$

sous forme de QCM avec quatre réponses possibles.

Proposer une série de quatre réponses au choix, composée de la bonne réponse et de trois distracteurs. Justifier le choix de chacun des trois distracteurs en s'appuyant sur les erreurs fréquentes des élèves.