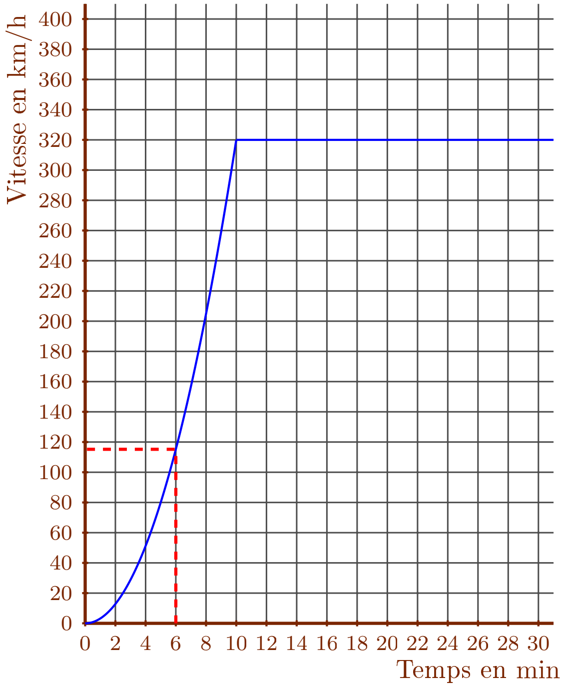
Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 5.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

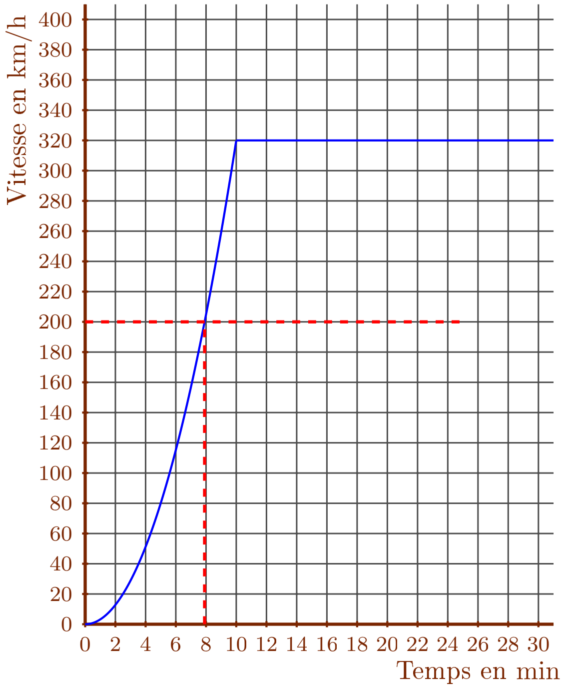
Partie A : vitesse d'un train.



1. (a)

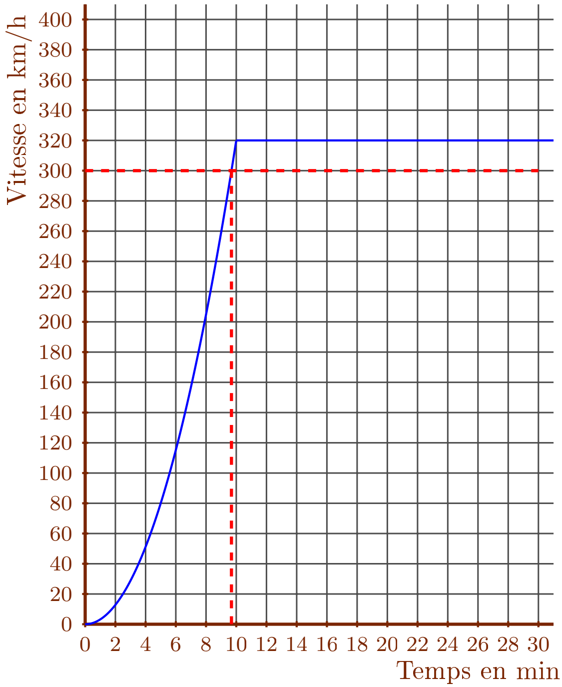
Par lecture graphique $v(6) \approx 116\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

$v(6) \approx 120\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ autrement dit 6 minutes après son départ le train roule à 120 km/h.



(b)

Le train atteint une vitesse de 200 km/h au bout de 8 minutes.



(c)

$$9 \leqslant t_0 \leqslant 10.$$

2. Déterminons la distance $d(15; 20)$ parcourue par le train entre la quinzième et la vingtième minute.

   Entre la quinzième et la vingtième minute le train se déplace à une vitesse constante de 320 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Par conséquent la distance parcourue est

$$\begin{aligned} d(15;20) &= v(15) \times [(20\text{ min}) - (15\text{ min})] \\ &= \left(320\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}\right)(5\text{ min}) \\ &= 320 \times 5\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}\cdot\text{min} \\ &= 1600\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}\cdot\frac{1}{60}\text{ h} \\ &= 1600 \times \frac{1}{60}\text{ km} \\ &= \frac{80}{3}\text{ km} \\ &= 26{,}666\ldots\text{ km} \end{aligned}$$

$$d(15;20) \approx 27\text{ km}.$$

3. (a) La fonction v est continue (autrement dit sa courbe représentative est une ligne d'un seul tenant, sans interruption) et croissante. Nous pourrions même préciser : strictement croissante pour t entre 0 et 10.
   Or d'après le tableau $v(9) \leqslant 300 \leqslant v(10)$ donc nous retrouvons bien :

   $$9 \leqslant t_0 \leqslant 10.$$

   (b) Donnons un encadrement d'amplitude 0,1 de t_0.

   Puisque v est continue et croissante, et comme $v(9{,}6) \leqslant 300 \leqslant v(9{,}7)$

   $$9{,}6 \leqslant t_0 \leqslant 9{,}7.$$

4. (a) Calculons $v(6)$.

   $$v(6) = 3{,}2 \times 6^2$$

   $$v(6) = 115{,}2.$$

(b) Formule entrée en B2 :

$$= 3{,}2 * B1 \wedge 2$$

(c) Déterminons t_0.

$$v(t_0) = 300$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 3{,}2t_0^2 &= 300 \\ \frac{3{,}2t_0^2}{3{,}2} &= \frac{300}{3{,}2} \\ t_0^2 &= 93{,}75 \\ t_0 = \sqrt{93{,}75} \quad \text{ou} \quad t_0 &= -\sqrt{93{,}75} \end{aligned}$$

Or t_0 mesure le temps écoulé et est donc une grandeur positive, nécessairement

$$t_0 = \sqrt{93{,}75}.$$

Une rédaction plus rigoureuse algébriquement utilise une identité remarquable :

$$v(t_0) = 300$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 3{,}2t_0^2 &= 300 \\ \frac{3{,}2t_0^2}{3{,}2} &= \frac{300}{3{,}2} \\ t_0^2 &= 93{,}75 \\ t_0^2 - 93{,}75 &= 93{,}75 - 93{,}75 \\ t_0^2 - \sqrt{93{,}75}^2 &= 0 \\ \left(t_0 - \sqrt{93{,}75}\right)\left(t_0 + \sqrt{93{,}75}\right) &= 0 \\ t_0 = \sqrt{93{,}75} \quad \text{ou} \quad t_0 &= -\sqrt{93{,}75} \end{aligned}$$

Exprimons t_0 en minutes et secondes.

$$\begin{aligned}\sqrt{93{,}75}\text{ min} &\approx 9{,}682\text{min}\\ &\approx (9\text{ min}) + (0{,}682\text{ min})\\ &\approx (9\text{ min}) + (0{,}682\times 60\text{ s})\\ &\approx (9\text{ min}) + (40{,}92\text{ s})\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{(9\text{ min}) + (40\text{ s}) \leqslant t_0 \leqslant (9\text{ min}) + (41\text{ s}).}$$

5. (a) Si le nombre 6 est entré le programme renvoie 320.

(b) Si le nombre 15 est entré le programme renvoie 720.

(c) La fonction v est définie par morceaux d'abord pour $t \in [0;10]$ puis pour $t \in [10;+\infty[$. Sur $[0;10]$ v est (la restriction d') une fonction polynomiale de degré deux puis sur $[10;+\infty[$ elle est constante égale à 320.

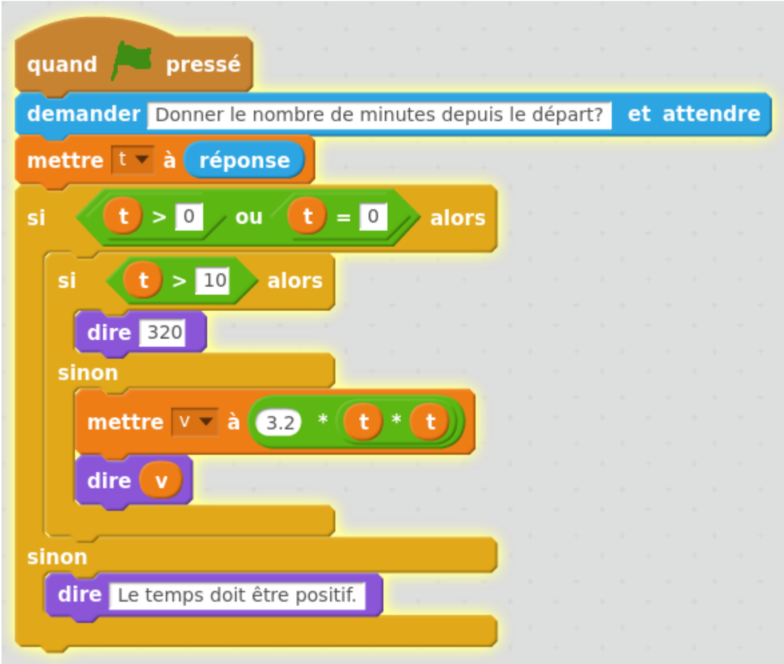
L'élève a interverti les formules qui s'appliquent sur $[0;10]$ et sur $[10;+\infty[$.

(d) Il suffit de modifier la condition dans l'instruction conditionnelle « si ». Autrement dit il faut remplacer

par

.

Nous obtenons alors le programme :



Partie B : traverses de chemin de fer.

1. Dans cet exercice j'utiliserai les notations canadiennes francophones des pouces et pieds c'est-à-dire respectivement po et pi.

   Exprimons e en centimètres.

   D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} e &= (4 \text{ pi}) + (8{,}5 \text{ po}) \\ &= (4 \times 12 \text{ po}) + (8{,}5 \text{ po}) \\ &= 56{,}5 \text{ po} \\ &= 56{,}5 \times 2{,}54 \text{ cm} \\ &= 143{,}51 \text{ cm} \end{aligned}$$

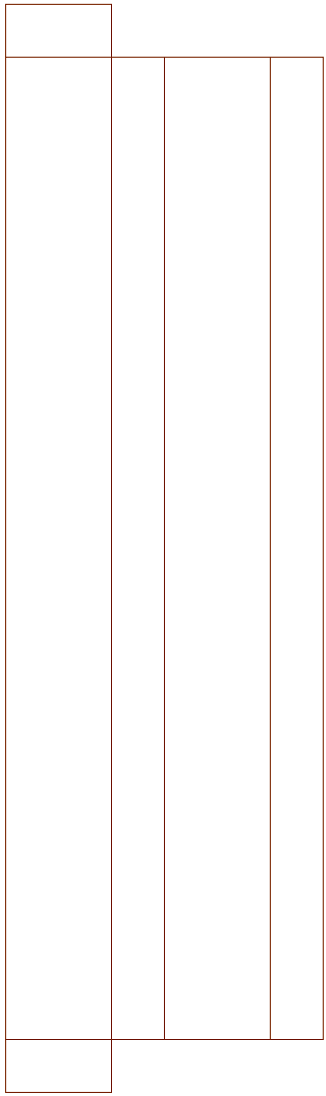
$$\boxed{e \approx 143{,}5 \text{ cm.}}$$

2. (a) Dessinons un patron d'une traverse à l'échelle 1/20.

Remarquons : 2,60 m = 2,60×100 cm = 260 cm.

Taille réelle	1	14 cm	28 cm	260 cm
À l'échelle	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	0,7 cm	1,4 cm	13 cm

Par exemple : $\frac{1}{20} \times (14 \text{ cm}) = 0{,}7$ cm.
Nous en déduisons le patron à l'échelle 1/20 :



(b) Déterminons la masse m_1 d'une traverse.

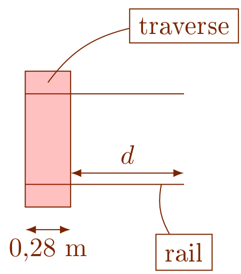
En utilisant la densité du chêne qui constitue la traverse qui a la forme d'un parallélépipède rectangle :

$$\begin{aligned}
m_1 &= \left(690 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}\right) \times (14 \text{ cm}) \times (28 \text{ cm}) \times (2{,}60 \text{ m}) \\
&= 690 \times 14 \times 28 \times 2{,}60 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{m}^{-3} \\
&= 703\,248 \text{ kg} \cdot \left(\frac{1}{100} \text{ m}\right)^2 \cdot \text{m}^{-2} \\
&= 703\,248 \times \frac{1}{100^2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^{-2} \\
&= 70{,}3248 \text{ kg}
\end{aligned}$$

$$\boxed{m_1 \approx 70 \text{ kg.}}$$

3. (a) Déterminons d par une mise en équation.

Voici l'agencement (ou le motif pour reprendre la terminologie des frises et des pavages) qui doit être reproduit 1 520 fois par kilomètre :



Nous avons donc

$$1\,520 \times [(0{,}28 \text{ m}) + d] = 1 \text{ km}$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
1\,520 \times [(0{,}28 \text{ m}) + d] &= 1 \times 1\,000 \text{ m} \\
\frac{1\,520 \times [(0{,}28 \text{ m}) + d]}{1\,520} &= \frac{1\,000 \text{ m}}{1\,520} \\
(0{,}28 \text{ m}) + d &= \frac{25}{38} \text{ m} \\
(0{,}28 \text{ m}) + d - (0{,}28 \text{ m}) &= \left(\frac{25}{38} \text{ m}\right) - (0{,}28 \text{ m}) \\
d &= \left(\frac{25}{38} - 0{,}28\right) \text{ m}
\end{aligned}$$

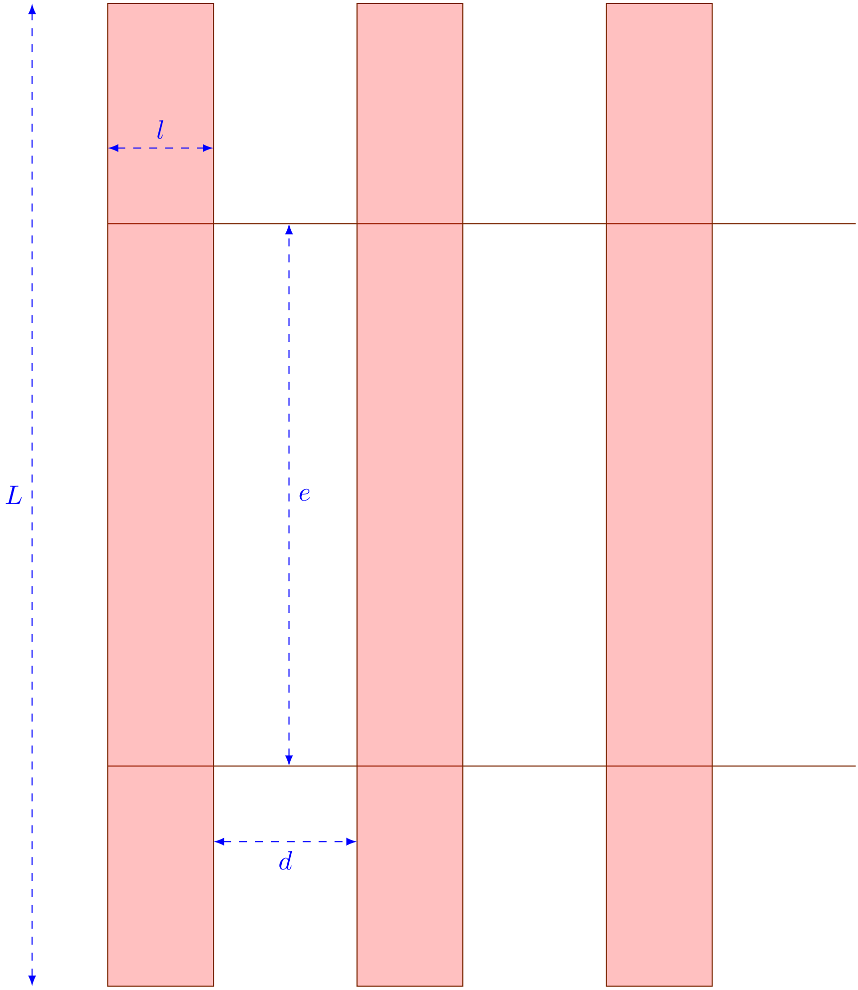
$$\boxed{d \approx 0{,}38 \text{ m}.}$$

(b) Dessinons les trois traverses à l'échelle 1/20.

Remarquons : $0{,}38 \text{ m} = 0{,}38 \times 100 \text{ cm} = 38$ cm.
En notant l et L respectivement les largeurs et longueurs des traverses :

Dénomination	d	l	L	e
Taille réelle	38 cm	28 cm	260 cm	143,5 cm
À l'échelle	1,9 cm	1,4 cm	13 cm	7,175 cm

Ce schéma est à l'échelle 1/20.



II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. En tapant la division sur la calculatrice nous voyons que $\frac{27}{45} = 0{,}6$. Il s'agit donc bien d'un nombre décimal.
   Nous avons plusieurs possibilité pour démontrer que l'affirmation est juste. Nous pouvons montrer que

— $\frac{27}{45}$ admet une écriture décimale ne comportant que de zéros à partir d'un certain rang
— dans la forme irréductible de $\frac{27}{45}$ son dénominateur n'a que 2 ou 5 comme facteurs premiers (et éventuellement 1 si le nombre donné avait été un entier).
— $\frac{27}{45}$ égale une fraction dont le dénominateur est un multiple de 10.

Je vais le faire de la première façon.

Démontrons que $\frac{27}{45}$ est un nombre décimal.

Procédons à la division posée en potence de 27 par 45

$$\begin{array}{r|l} -\ 2\ 7 & 4\ 5 \\ \underline{0} & 0{,}6 \\ -\ 2\ 7\ 0 & \\ \underline{2\ 7\ 0} & \\ 0 & \end{array}$$

Donc $\frac{27}{45}$ admet une écriture décimale n'admettant que des zéros à partir d'un certain rang autrement dit $\frac{27}{45}$ est un nombre décimal.

L'affirmation 1 est vraie.

2. Un résultat général qui semble difficile à démontrer. En testant quelques valeurs nous voyons que cela ne fonctionne pas.
   Pour démontrer qu'une règle générale (propriété universelle) est fausse il suffit de trouver un cas pour lequel çà ne fonctionne pas.

   Exhibons un contre-exemple.

   $a = 1$ et $b = 0{,}1$ sont des nombres décimaux et $\frac{a}{b} = \frac{1}{0{,}1} = 10$. Donc dans ce cas $a < \frac{a}{b}$.

   L'affirmation 2 est fausse.

3. Quelques essais semblent confirmer la proposition. Essayons de démontrer ce résultat général.

   Démontrons que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

   Le résultat doit être démontrer pour n'importe quelle série de trois entiers consécutifs. Nous choisissons donc un entier quelconque mais sans lui donnée une valeur particulière pour que notre raisonnement garde sa valeur générale.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Alors n, $n+1$ et $n+2$ sont trois entiers consécutifs.
Nous avons

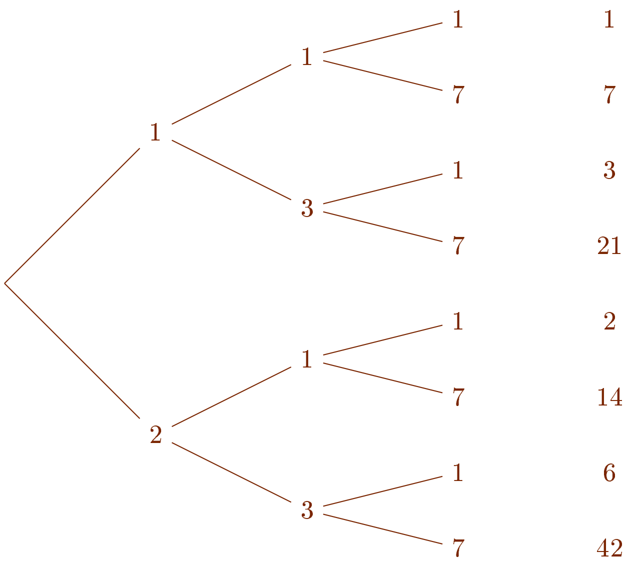
$$\begin{aligned} n+(n+1)+(n+2) &= n+n+1+n+2 \\ &= 3n+3 \\ &= 3n+3\times 1 \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

Donc la somme des trois entiers consécutifs est bien un multiple de trois. De plus ce résultat est bien général puisqu'il est vrai quelque soit la valeur choisie pour n.

L'affirmation 3 est vraie.

4. Déterminons tous les diviseurs (positifs) de 42.

Remarquons tout d'abord que la décomposition de 42 en facteurs premiers est : $42 = 2 \times 3 \times 7$.
Présentons le diviseurs sous forme d'arbre :



Nous voyons que 42 possède exactement 8 diviseurs positifs.

L'affirmation 4 est fausse.

Exercice 2.

1. Démontrons que (ST) et $(S'T')$ ne sont pas parallèles.

   * Configuration de Thalès.
   Les points R, S, S' d'une part et R, T et T' d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèse.
   D'une part :

$$\begin{aligned}\frac{RS}{RS'} &= \frac{RS}{RS+SS'}\\ &= \frac{10}{10+4}\\ &= \frac{5}{7}\end{aligned}$$

   d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{RT}{RT'} &= \frac{RT}{RT+TT'}\\ &= \frac{10{,}5}{10{,}5+4}\\ &= \frac{3\times 7}{29}\end{aligned}$$

   donc, d'après l'irréductible des fractions : $\frac{RS}{RS'} \neq \frac{RT}{RT'}$.

   Des deux points précédentes nous déduisons, d'après la contraposée du théorème de Thalès que

   (ST) et $(S'T')$ sont sécantes.

2. En reprenant le contexte de la correction de la question précédente, il y aura parallélisme si et seulement si, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{RS}{RS'} = \frac{RT}{RT'}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{10}{10+4} = \frac{10{,}5}{10{,}5+TT'}$$
$$\frac{5}{7} = \frac{10{,}5}{10{,}5+TT'}$$

en procédant à un produit en croix :

$$\begin{aligned}
5(10{,}5+TT') &= 7\times 10{,}5\\
\frac{5(10{,}5+TT')}{5} &= \frac{73{,}5}{5}\\
10{,}5+TT' &= 14{,}7\\
10{,}5+TT'-10{,}5 &= 14{,}7-10{,}5\\
TT' &= 4{,}2
\end{aligned}$$

(ST) et $(S'T')$ seront parallèles si et seulement si $TT' = 4{,}2$ cm.

Exercice 3.

1. (a) Démontrons le critère de divisibilité par 4 proposé.

Supposons que $b\times 10 + c$ est divisible par 4.
Autrement dit : il existe un entier naturel q tel que $b\times 10+c = 4q$.
Alors

$$\begin{aligned}
N &= a\times 100 + b\times 10 + c\\
&= 100a + 10b + c\\
&= 100a + 4q\\
&= 4\times 25a = 4\times q\\
&= 4\times(25a+q)
\end{aligned}$$

Ainsi N est bien divisible par 4.

Si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est divisible par 4 alors N est divisible par 4

(b) Le ton de la question est beaucoup moins péremptoire qu'à la question précédente ce qui nous incite à rechercher un contre-exemple.

Démontrons que cette règle ne fonctionne pas pour la divisibilité par 8.

Posons $N = 308$.

Nous avons bien

- $100 \leqslant N \leqslant 999$
- $N > 10$,
- le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités, à savoir 08, est divisible par 8,

et pourtant la décomposition en facteurs premiers de 308 étant $2^2 \times 7 \times 11$, nous pouvons affirmer que 308 ,est pas divisible par $8 = 2^3$.

Cette règle ne fonctionne pas pour le divisibilité par 8.

2. Démontrons que si $a + b + c$ est divisible par 9 alors N l'est aussi.

Supposons donc que $a+b+c$ est démontrons qu'alors, nécessairement, N est aussi divisible par 9. Ainsi nous savons qu'il existe un entier naturel q tel que $a + b + c = 9$.

Suivons à l'aveugle les consignes de l'énoncé :

$$\begin{aligned} N - (a + b + c) &= 100a + 10b + c - a - b - c \\ &= 100a - 1a + 10b - 1b + c - c \\ &= 99a + 9b \\ &= 9 \times 11a + 9 \times b \\ &= 9(11a + b) \end{aligned}$$

par conséquent :

$$N = (a + b + c) + 9(11a + b)$$

Or par hypothèse $a + b + c = 9q$ donc

$$\begin{aligned} N &= 9q + 9(11a + b) \\ &= 9\left[q + (11a + b)\right] \end{aligned}$$

Tous les nombres intervenant dans cette écriture étant des entiers cela signifie que N est divisible par 9.

Si la somme des chiffres de N est divisible par 9 alors N est divisible par 9.

Exercice 4.

1. Schématisons la situation avec un tableau double entrée que nous remplirons du maximum des chiffres affichés par les deux dés.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Modélisons maintenant l'expérience aléatoire.

Notons Ω l'ensemble des couples d'entiers compris entre 1 et 6 représentant toutes les issues possibles lors du lancé des deux dés.

Les dés étant équilibrés il est naturel de munir Ω de l'équiprobabilité : tous les couples de nombres ont la même probabilité d'être obtenus.

La présentation la plus élégante des différents événements intervenant dans l'exercice consisterai à introduire la variable aléatoire X indiquant le maximum des deux faces. je fais un choix différent.

Notons A l'événement obtenir un maximum égale à 2.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Il y a équiprobabilité (entre les couples), A est réalisé (d'après le tableau) par 3 issues et l'univers Ω comporte (toujours d'après le tableau) 36 issues donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{36}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{12}.}$$

2. Notons B l'événement obtenir un maximum de 6.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Il y a équiprobabilité, B est réalisé (d'après le tableau) par 11 issues et l'univers Ω comporte 36 issues donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{11}{36}.}$$

3. Notons C l'événement obtenir un maximum qui soit inférieur ou égale à 3. Autrement dit 1, 2 ou 3.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Les issues qui nous intéressent forment un carré de trois cases de côté dans le tableau. Il y a donc $3 \times 3 = 9$ issues.

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

Il y a équiprobabilité, C est réalisé (d'après le tableau) par 9 issues et l'univers Ω comporte 36 issues donc :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{9}{36}.$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}.$$

4. Notons D_n l'événement obtenir un maximum qui soit inférieur ou égale à n. En raisonnant comme à la question précédente nous remarquons que les issues qui nous intéressent dessinent un carré de n cases de côté dans le tableau. Il y a donc $n \times n = n^2$ issues.

   Calculons $\mathbb{P}(D_n)$.

   Il y a équiprobabilité, D_n est réalisé (d'après le tableau) par n^2 issues et l'univers Ω comporte 36 issues donc :

$$\mathbb{P}(D_n) = \frac{n^2}{36}.$$

5. Nous remarquons sur le tableau que, par exemple, la probabilité d'obtenir 3 est $\mathbb{P}(D_3) - \mathbb{P}(D_2)$.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

   C'est l'idée qui est ici généralisée.

   Notons E_n l'événement obtenir n pour n entier compris entre 1 et 6.

   Exprimons $\mathbb{P}(E_n)$ en fonction de n.

   Raisonnons par disjonction des cas.

   * Si $n = 1$ alors $\frac{2n-1}{36} = \frac{1}{36}$. Nous obtenons bien $\mathbb{P}(E_1)$.
   * Si $2 \leqslant n \leqslant 6$ alors en raisonnant sur les carrés dans le tableaux nous avons

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(D_n) - \mathbb{P}(D_{n-1})$$

Et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_n) &= \frac{n^2}{36} - \frac{(n-1)^2}{36} \\
&= \frac{n^2 - (n-1)^2}{36} \\
&= \frac{n^2 - (n^2 - 2 \times n \times 1 + 1^2)}{36} \\
&= \frac{n^2 - (n^2 - 2n + 1)}{36} \\
&= \frac{n^2 - n^2 + 2n - 1}{36} \\
&= \frac{2n-1}{36}
\end{aligned}$$

Dans tous les cas nous avons bien :

$$\boxed{\mathbb{P}(E_n) = \frac{2n-1}{36} \text{ pour tout } n \in [\![1;6]\!].}$$

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3. (a)
   (b)

Situation 2.

1.
2.

Situation 3.

1.
2.
3.

Situation 4.

1.

2.