Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 5.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

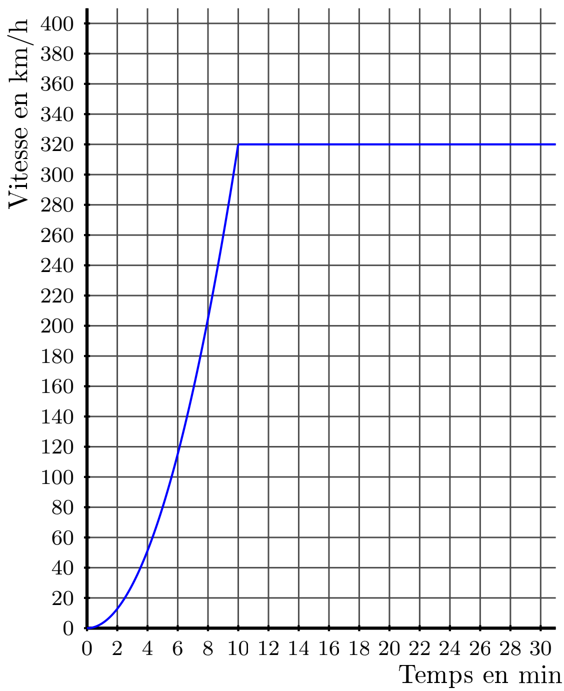
I Première partie (13 points).

Partie A : vitesse d'un train.

Un train à grande vitesse quitte une gare. Dans ce qui suit nous allons nous intéresser au temps qu'il met pour atteindre la vitesse de 300 km/h.

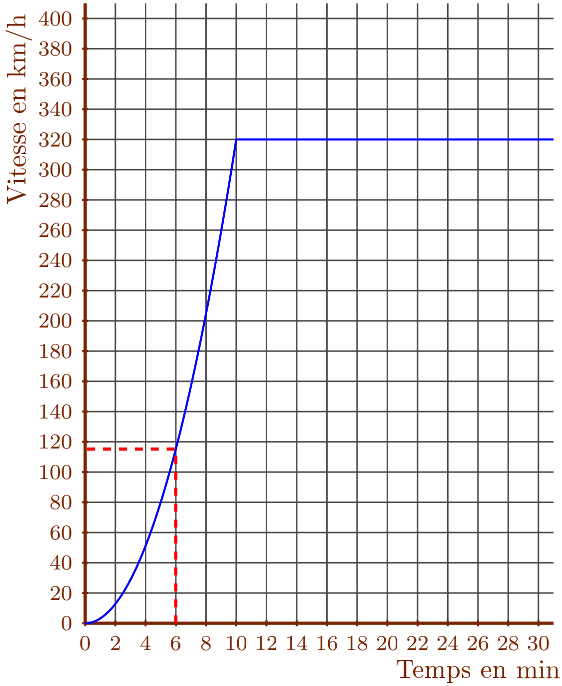
On appelle la fonction qui, au temps t écoulé depuis le départ, exprimé en minute, associe $v(t)$ la vitesse du train, à l'instant t, en kilomètre par heure.

1. Le graphique ci-dessous donne la vitesse $v(t)$ en km/h exprimée en fonction du nombre t de minutes écoulées depuis le départ du train.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique. Aucune justification n'est attendue.

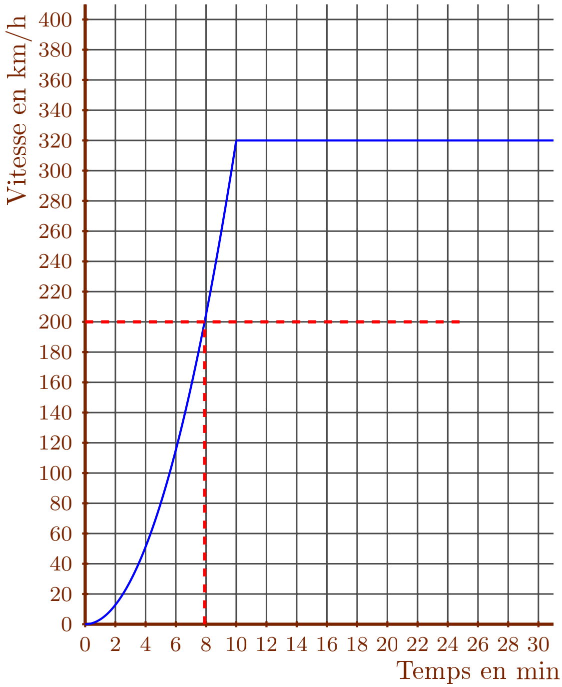
(a) Déterminer une valeur approchée à 10 km/h près de $v(6)$ puis donner une interprétation du résultat.



Par lecture graphique $v(6) \approx 116\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

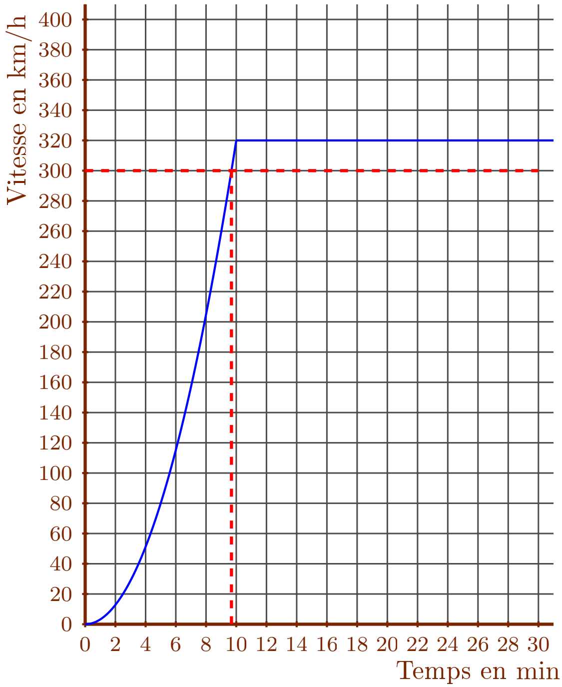
> $v(6) \approx 120\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ autrement dit 6 minutes après son départ le train roule à 120 km/h.

(b) Résoudre graphiquement $v(t) = 200$, pour t compris entre 0 et 25, puis donner une interprétation du résultat.



Le train atteint une vitesse de 200 km/h au bout de 8 minutes.

(c) Encadrer par deux nombres entiers consécutifs le temps t_0, exprimé en minutes, pour lequel la vitesse est de 300 km/h.



$$9 \leqslant t_0 \leqslant 10.$$

2. En s'appuyant sur des valeurs lues sur le graphique ci-dessus, déterminer la distance parcourue par le train entre la quinzième minute et la vingtième minute. On donnera une valeur arrondie au kilomètre.

   Déterminons la distance $d(15; 20)$ parcourue par le train entre la quinzième et la vingtième minute.

   Entre la quinzième et la vingtième minute le train se déplace à une vitesse constante de $320 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Par conséquent la distance parcourue est

$$\begin{aligned}
d(15;20) &= v(15) \times [(20\text{ min}) - (15\text{ min})] \\
&= \left(320\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}\right)(5\text{ min}) \\
&= 320 \times 5\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}\cdot\text{min} \\
&= 1600\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}\cdot\frac{1}{60}\text{ h} \\
&= 1600 \times \frac{1}{60}\text{ km} \\
&= \frac{80}{3}\text{ km} \\
&= 26{,}666\ldots\text{ km}
\end{aligned}$$

$$\boxed{d(15;20) \approx 27\text{ km.}}$$

3. On propose le document suivant obtenu à l'aide d'un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	t en min	9	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10
2	v en km/h	259,2	264,99	270,85	276,77	282,75	288,8	294,91	301,09	307,33	313,63	320

(a) Justifier que ce tableau permet de retrouver le résultat de la question 1.(c).

La fonction v est continue (autrement dit sa courbe représentative est une ligne d'un seul tenant, sans interruption) et croissante. Nous pourrions même préciser : strictement croissante pour t entre 0 et 10.
Or d'après le tableau $v(9) \leqslant 300 \leqslant v(10)$ donc nous retrouvons bien :

$$\boxed{9 \leqslant t_0 \leqslant 10.}$$

(b) Donner un encadrement d'amplitude 0,1 minute du temps pour lequel la vitesse est de 300 km/h.

Donnons un encadrement d'amplitude 0,1 de t_0.

Puisque v est continue et croissante, et comme $v(9{,}6) \leqslant 300 \leqslant v(9{,}7)$

$$\boxed{9{,}6 \leqslant t_0 \leqslant 9{,}7.}$$

4. Pour un temps t après le départ, exprimé en minute, compris entre 0 et 10, la vitesse de ce train en kilomètre par heure est donnée par la formule $v(t) = 3{,}2t^2$.

   (a) Déterminer $v(6)$.

   Calculons $v(6)$.

$$v(6) = 3{,}2 \times 6^2$$

$$\boxed{v(6) = 115{,}2.}$$

   (b) Donner la formule que l'on peut saisir dans la cellule `B2` puis faire glisser vers la droite pour obtenir le tableau de la question 3.

   Formule entrée en `B2` :

$$\boxed{= 3{,}2 * B1 \wedge 2}$$

   (c) Déterminer par le calcul la valeur exacte du temps t_0 tel que $v(t_0) = 300$ km/h.
   En déduire un encadrement de t_0 à la seconde près.

   Déterminons t_0.

$$v(t_0) = 300$$

   équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 3{,}2t_0^2 &= 300 \\ \frac{3{,}2t_0^2}{3{,}2} &= \frac{300}{3{,}2} \\ t_0^2 &= 93{,}75 \\ t_0 = \sqrt{93{,}75} \quad \text{ou} \quad t_0 &= -\sqrt{93{,}75} \end{aligned}$$

   Or t_0 mesure le temps écoulé et est donc une grandeur positive, nécessairement

$$\boxed{t_0 = \sqrt{93{,}75}.}$$

Une rédaction plus rigoureuse algébriquement utilise une identité remarquable :

$$v(t_0) = 300$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
3{,}2t_0^2 &= 300\\
\frac{3{,}2t_0^2}{3{,}2} &= \frac{300}{3{,}2}\\
t_0^2 &= 93{,}75\\
t_0^2 - 93{,}75 &= 93{,}75 - 93{,}75\\
t_0^2 - \sqrt{93{,}75}^2 &= 0\\
\left(t_0 - \sqrt{93{,}75}\right)\left(t_0 + \sqrt{93{,}75}\right) &= 0\\
t_0 = \sqrt{93{,}75} \quad \text{ou} \quad t_0 &= -\sqrt{93{,}75}
\end{aligned}$$

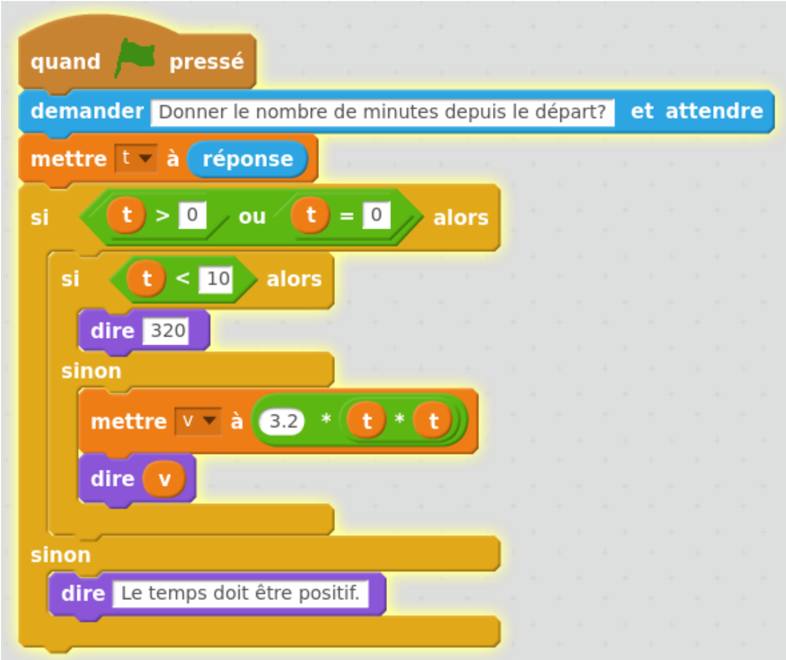
Exprimons t_0 en minutes et secondes.

$$\begin{aligned}
\sqrt{93{,}75}\ \text{min} &\approx 9{,}682\text{min}\\
&\approx (9\ \text{min}) + (0{,}682\ \text{min})\\
&\approx (9\ \text{min}) + (0{,}682 \times 60\ \text{s})\\
&\approx (9\ \text{min}) + (40{,}92\ \text{s})
\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{(9\ \text{min}) + (40\ \text{s}) \leqslant t_0 \leqslant (9\ \text{min}) + (41\ \text{s}).}$$

5. Un élève a écrit le programme suivant :



(a) Si l'utilisateur du programme entre le nombre 6, quelle est la réponse donnée en retour ?

Si le nombre 6 est entré le programme renvoie 320.

(b) Si l'utilisateur du programme entre le nombre 15, quelle est la réponse donnée en retour ?

Si le nombre 15 est entré le programme renvoie 720.

(c) L'élève souhaitait écrire un programme calculant la vitesse du train en fonction du temps depuis le départ. Quelle est son erreur ?

La fonction v est définie par morceaux d'abord pour $t \in [0; 10]$ puis pour $t \in [10; +\infty[$. Sur $[0; 10]$ v est (la restriction d') une fonction polynomiale de degré deux puis sur $[10; +\infty[$ elle est constante égale à 320.

L'élève a interverti les formules qui s'appliquent sur $[0; 10]$ et sur $[10; +\infty[$.

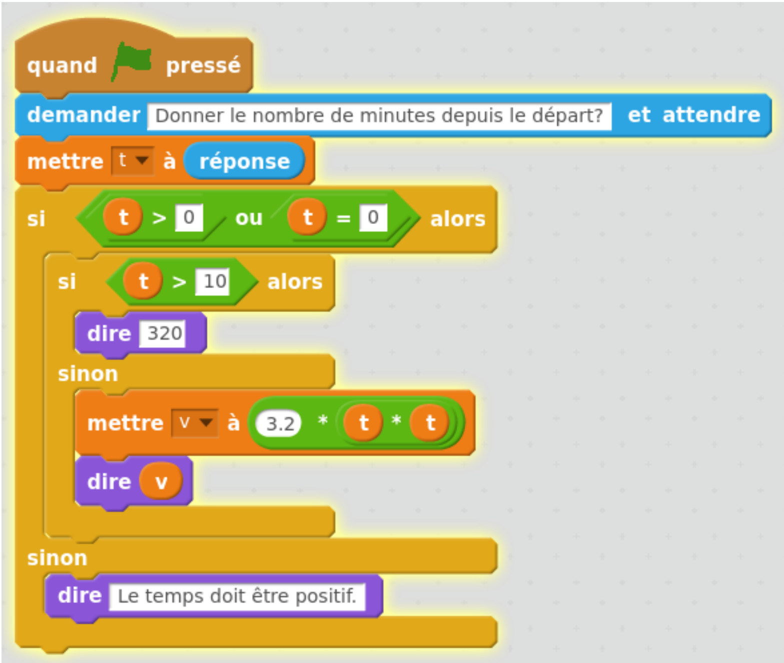
(d) Proposer une correction du programme pour qu'il donne la réponse attendue quel que soit le nombre entré.

Il suffit de modifier la condition dans l'instruction conditionnelle « si ». Autrement dit il faut remplacer

par


.

Nous obtenons alors le programme :

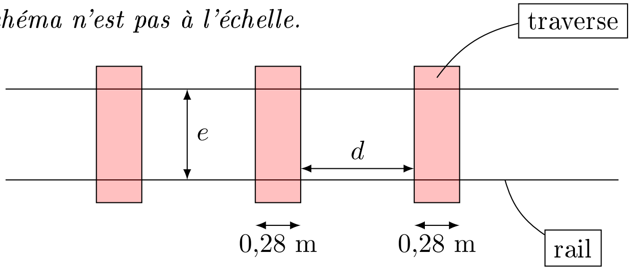


Partie B : traverses de chemin de fer.

1. Le pouce international est une unité de longueur valant 2,54 centimètres.
   Le pied est une unité de longueur égale à 12 pouces.
   Dans la plupart des pays, deux rails de chemins de fer sont écartés de 4 pieds et 8,5 pouces. Cette distance est représentée par la lettre e sur le schéma ci-dessous.

Convertir cette distance en cm, en arrondissant au millimètre.

Ce schéma n'est pas à l'échelle.



Dans cet exercice j'utiliserai les notations canadiennes francophones des pouces et pieds c'est-à-dire respectivement po et pi.

Exprimons e en centimètres.

D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} e &= (4 \text{ pi}) + (8{,}5 \text{ po}) \\ &= (4 \times 12 \text{ po}) + (8{,}5 \text{ po}) \\ &= 56{,}5 \text{ po} \\ &= 56{,}5 \times 2{,}54 \text{ cm} \\ &= 143{,}51 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{e \approx 143{,}5 \text{ cm.}}$$

2. On considère à présent une traverse en bois de chêne sec utilisée pour une voie de chemin de fer. Elle est modélisée par un pavé droit de 2,60 m de longueur, 28 cm de largeur et 14 cm d'épaisseur. La densité du chêne sec est de 690 kg/m^3.

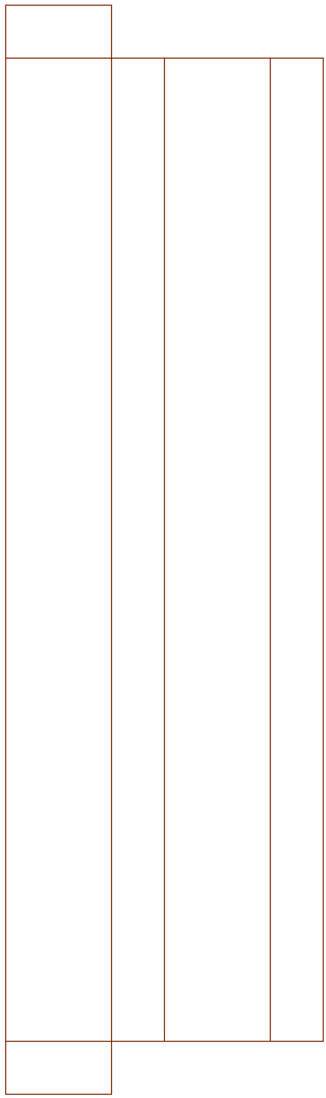
   (a) Construire un patron d'une traverse de chemin de fer à l'échelle 1/20. On mettra en évidence les calculs effectués pour réaliser ce patron.

   Dessinons un patron d'une traverse à l'échelle 1/20.

   Remarquons : 2,60 m = 2,60×100 cm = 260 cm.

Taille réelle	1	14 cm	28 cm	260 cm
À l'échelle	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	0,7 cm	1,4 cm	13 cm

Par exemple : $\frac{1}{20} \times (14 \text{ cm}) = 0{,}7$ cm.
Nous en déduisons le patron à l'échelle 1/20 :



(b) Déterminer la masse d'une traverse en kilogramme. Donner la valeur exacte trouvée, puis la valeur arrondie à l'unité.

Déterminons la masse m_1 d'une traverse.

En utilisant la densité du chêne qui constitue la traverse qui a la forme d'un parallélépipède rectangle :

$$\begin{aligned} m_1 &= \left(690 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}\right) \times (14 \text{ cm}) \times (28 \text{ cm}) \times (2{,}60 \text{ m}) \\ &= 690 \times 14 \times 28 \times 2{,}60 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{m}^{-3} \\ &= 703\,248 \text{ kg} \cdot \left(\frac{1}{100} \text{ m}\right)^2 \cdot \text{m}^{-2} \\ &= 703\,248 \times \frac{1}{100^2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^{-2} \\ &= 70{,}3248 \text{ kg} \end{aligned}$$

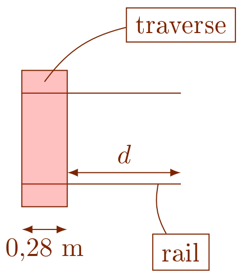
$$\boxed{m_1 \approx 70 \text{ kg.}}$$

3. Sur le schéma ci-dessus, ne respectant pas l'échelle, on a noté d la distance entre deux traverses. Sur une voie ferrée, on souhaite positionner 1520 traverses par kilomètre.

   (a) Calculer la distance d, en expliquant la démarche choisie. On arrondira au centimètre.

   Déterminons d par une mise en équation.

   Voici l'agencement (ou le motif pour reprendre la terminologie des frises et des pavages) qui doit être reproduit 1 520 fois par kilomètre :



   Nous avons donc

$$1\,520 \times [(0{,}28 \text{ m}) + d] = 1 \text{ km}$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
1\,520 \times [(0{,}28 \text{ m}) + d] &= 1 \times 1\,000 \text{ m} \\
\frac{1\,520 \times [(0{,}28 \text{ m}) + d]}{1\,520} &= \frac{1\,000 \text{ m}}{1\,520} \\
(0{,}28 \text{ m}) + d &= \frac{25}{38} \text{ m} \\
(0{,}28 \text{ m}) + d - (0{,}28 \text{ m}) &= \left(\frac{25}{38} \text{ m}\right) - (0{,}28 \text{ m}) \\
d &= \left(\frac{25}{38} - 0{,}28\right) \text{ m}
\end{aligned}$$

$$\boxed{d \approx 0{,}38 \text{ m.}}$$

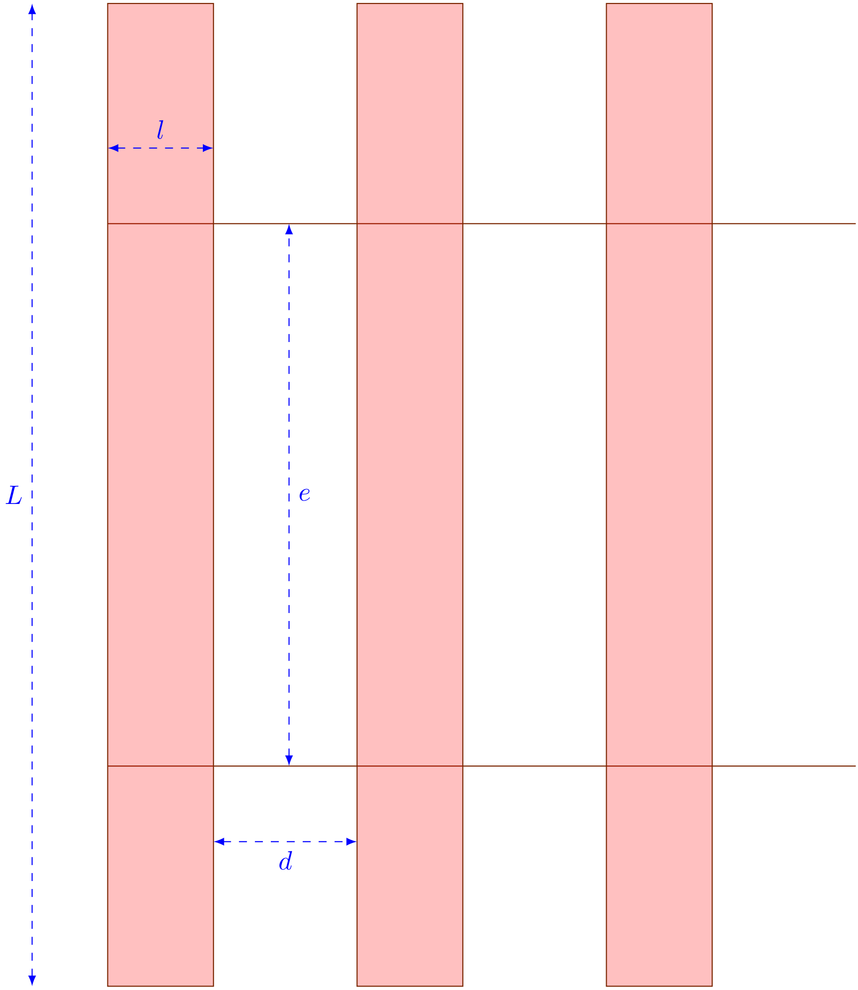
(b) Reproduire, à l'échelle 1/20 par rapport aux dimensions réelles, la figure avec les trois traverses ci-dessus. On mettra en évidence les calculs effectués pour réaliser cette figure.

Dessinons les trois traverses à l'échelle 1/20.

Remarquons : 0,38 m = 0,38×100 cm = 38 cm.
En notant l et L respectivement les largeurs et longueurs des traverses :

Dénomination	d	l	L	e
Taille réelle	38 cm	28 cm	260 cm	143,5 cm
À l'échelle	1,9 cm	1,4 cm	13 cm	7,175 cm

Ce schéma est à l'échelle 1/20.



II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Affirmation 1 : « Le nombre $\frac{27}{45}$ est un nombre décimal. »

   En tapant la division sur la calculatrice nous voyons que $\frac{27}{45} = 0{,}6$. Il s'agit donc bien d'un nombre décimal.

   Nous avons plusieurs possibilité pour démontrer que l'affirmation est juste. Nous pouvons montrer que

   — $\frac{27}{45}$ admet une écriture décimale ne comportant que de zéros à partir d'un certain rang

   — dans la forme irréductible de $\frac{27}{45}$ son dénominateur n'a que 2 ou 5 comme facteurs premiers (et éventuellement 1 si le nombre donné avait été un entier).

   — $\frac{27}{45}$ égale une fraction dont le dénominateur est un multiple de 10.

   Je vais le faire de la première façon.

   Démontrons que $\frac{27}{45}$ est un nombre décimal.

   Procédons à la division posée en potence de 27 par 45

$$\begin{array}{r|l} 27 & 45 \\ \cline{2-2} -\;\;\;0 & 0{,}6 \\ \cline{1-1} 270 & \\ -\;270 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

   Donc $\frac{27}{45}$ admet une écriture décimale n'admettant que des zéros à partir d'un certain rang autrement dit $\frac{27}{45}$ est un nombre décimal.

   L'affirmation 1 est vraie.

2. Affirmation 2 : « Si a et b sont deux nombres décimaux positifs non nuls, alors le résultat de la division de a par b est plus petit que a. »

   Un résultat général qui semble difficile à démontrer. En testant quelques valeurs nous voyons que cela ne fonctionne pas.

   Pour démontrer qu'une règle générale (propriété universelle) est fausse il suffit de trouver un cas pour lequel çà ne fonctionne pas.

   Exhibons un contre-exemple.

   $a = 1$ et $b = 0{,}1$ sont des nombres décimaux et $\frac{a}{b} = \frac{1}{0{,}1} = 10$. Donc dans ce cas $a < \frac{a}{b}$.

L'affirmation 2 est fausse.

3. Affirmation 3 : « La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. »

   Quelques essais semblent confirmer la proposition. Essayons de démontrer ce résultat général.

   Démontrons que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

   Le résultat doit être démontrer pour n'importe quelle série de trois entiers consécutifs. Nous choisissons donc un entier quelconque mais sans lui donnée une valeur particulière pour que notre raisonnement garde sa valeur générale.

   Soit $n \in \mathbb{Z}$.
   Alors n, $n+1$ et $n+2$ sont trois entiers consécutifs.
   Nous avons

$$\begin{aligned} n+(n+1)+(n+2) &= n+n+1+n+2 \\ &= 3n+3 \\ &= 3n+3\times 1 \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

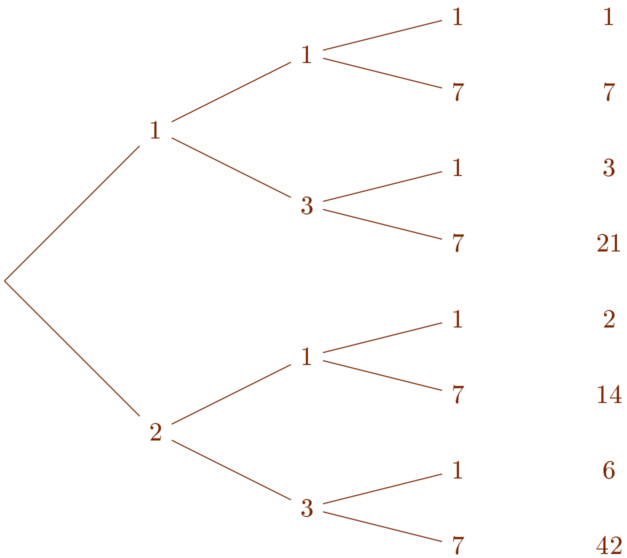
   Donc la somme des trois entiers consécutifs est bien un multiple de trois. De plus ce résultat est bien général puisqu'il est vrai quelque soit la valeur choisie pour n.

   L'affirmation 3 est vraie.

4. Affirmation 4 : « 42 possède exactement 7 diviseurs positifs. »

   Déterminons tous les diviseurs (positifs) de 42.

   Remarquons tout d'abord que la décomposition de 42 en facteurs premiers est : $42 = 2 \times 3 \times 7$.
   Présentons le diviseurs sous forme d'arbre :



Nous voyons que 42 possède exactement 8 diviseurs positifs.

> L'affirmation 4 est fausse.

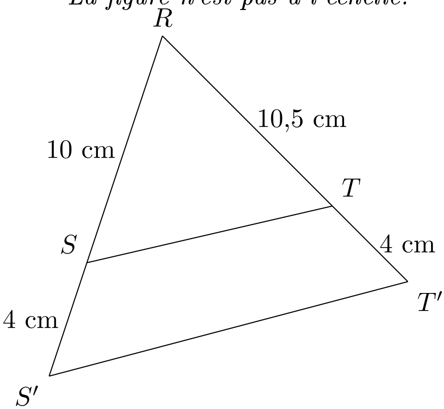
Exercice 2.

On donne un triangle RTS où $[RS]$ mesure 10 cm et $[RT]$ mesure 10,5 cm.

Le point S' est le point de la droite (RS) tel que $[SS']$ mesure 4 cm et les points R, S et S' sont alignés dans cet ordre.

Le point T' est le point de la droite (RT) tel que $[TT']$ mesure 4cm et les points R, T et T' sont alignés dans cet ordre.

La figure n'est pas à l'échelle.



1. Les droites (ST) et $(S'T')$ sont-elles parallèles ? Justifier.

   Démontrons que (ST) et $(S'T')$ ne sont pas parallèles.

   * Configuration de Thalès.
     Les points R, S, S' d'une part et R, T et T' d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèse.
     D'une part :

$$\begin{aligned}\frac{RS}{RS'} &= \frac{RS}{RS+SS'}\\ &= \frac{10}{10+4}\\ &= \frac{5}{7}\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{RT}{RT'} &= \frac{RT}{RT+TT'}\\ &= \frac{10{,}5}{10{,}5+4}\\ &= \frac{3\times 7}{29}\end{aligned}$$

donc, d'après l'irréductible des fractions : $\frac{RS}{RS'} \neq \frac{RT}{RT'}$.

Des deux points précédentes nous déduisons, d'après la contraposée du théorème de Thalès que

(ST) et $(S'T')$ sont sécantes.

2. Les autres mesures données restant les mêmes, déterminer la longueur que doit avoir le segment $[TT']$ pour que (ST) et $(S'T')$ soient parallèles.

En reprenant le contexte de la correction de la question précédente, il y aura parallélisme si et seulement si, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{RS}{RS'} = \frac{RT}{RT'}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{10}{10+4} &= \frac{10{,}5}{10{,}5+TT'} \\ \frac{5}{7} &= \frac{10{,}5}{10{,}5+TT'} \end{aligned}$$

en procédant à un produit en croix :

$$\begin{aligned} 5(10{,}5+TT') &= 7 \times 10{,}5 \\ \frac{5(10{,}5+TT')}{5} &= \frac{73{,}5}{5} \\ 10{,}5+TT' &= 14{,}7 \\ 10{,}5+TT'-10{,}5 &= 14{,}7-10{,}5 \\ TT' &= 4{,}2 \end{aligned}$$

(ST) et $(S'T')$ seront parallèles si et seulement si $TT' = 4{,}2$ cm.

Exercice 3.

1. (a) Soit N un nombre entier compris entre 100 et 999.
   N s'écrit sous la forme $N = a \times 100 + b \times 10 + c$ où a, b et c sont des entiers compris entre 0 et 9.

Démontrer que si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est divisible par 4 alors N est divisible par 4. Par exemple, pour 732, comme 32 est divisible par 4 alors 732 est divisible par 4.

Démontrons le critère de divisibilité par 4 proposé.

Supposons que $b \times 10 + c$ est divisible par 4.
Autrement dit : il existe un entier naturel q tel que $b \times 10 + c = 4q$.
Alors

$$\begin{aligned} N &= a \times 100 + b \times 10 + c \\ &= 100a + 10b + c \\ &= 100a + 4q \\ &= 4 \times 25a = 4 \times q \\ &= 4 \times (25a + q) \end{aligned}$$

Ainsi N est bien divisible par 4.

Si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est divisible par 4 alors N est divisible par 4

(b) Cette règle fonctionne-t-elle pour la divisibilité par 8, c'est à dire, « Si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités d'un nombre N supérieur à 10 est divisible par 8 alors N est divisible par 8 » ?

Le ton de la question est beaucoup moins péremptoire qu'à la question précédente ce qui nous incite à rechercher un contre-exemple.

Démontrons que cette règle ne fonctionne pas pour la divisibilité par 8.

Posons $N = 308$.
Nous avons bien

- $100 \leqslant N \leqslant 999$
- $N > 10$,
- le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités, à savoir 08, est divisible par 8,

et pourtant la décomposition en facteurs premiers de 308 étant $2^2 \times 7 \times 11$, nous pouvons affirmer que 308 ,est pas divisible par $8 = 2^3$.

Cette règle ne fonctionne pas pour le divisibilité par 8.

2. On considère toujours un nombre entier N compris entre 100 et 999 s'écrivant sous la forme $N = A \times 100 + b \times 10 + c$ où a, b et c sont des entiers compris entre 0 et 9.
   Calculer $N - (a+b+c)$. Démontrer que si $a+b+c$ est divisible par 9, alors N l'est aussi.

   Démontrons que si $a+b+c$ est divisible par 9 alors N l'est aussi.

   Supposons donc que $a+b+c$ est démontrons qu'alors, nécessairement, N est aussi divisible par 9. Ainsi nous savons qu'il existe un entier naturel q tel que $a+b+c=9$.

   Suivons à l'aveugle les consignes de l'énoncé :

$$\begin{aligned} N-(a+b+c) &= 100a+10b+c-a-b-c \\ &= 100a-1a+10b-1b+c-c \\ &= 99a+9b \\ &= 9\times 11a+9\times b \\ &= 9(11a+b) \end{aligned}$$

   par conséquent :

$$N=(a+b+c)+9(11a+b)$$

   Or par hypothèse $a+b+c=9q$ donc

$$\begin{aligned} N &= 9q+9(11a+b) \\ &= 9\left[q+(11a+b)\right] \end{aligned}$$

   Tous les nombres intervenant dans cette écriture étant des entiers cela signifie que N est divisible par 9.

   > Si la somme des chiffres de N est divisible par 9 alors N est divisible par 9.

Exercice 4.

On s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6 (un dé vert et un dé rouge). Le résultat de l'expérience est le plus grand des deux nombres sur les faces supérieures des dés.

Par exemple, si le dé vert indique « 3 » sur sa face supérieure et le dé rouge indique « 5 », le résultat de l'expérience est 5.

1. Montrer que la probabilité que le résultat de l'expérience soit 2 est égale à $\frac{1}{12}$.

Schématisons la situation avec un tableau double entrée que nous remplirons du maximum des chiffres affichés par les deux dés.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Modélisons maintenant l'expérience aléatoire.

Notons Ω l'ensemble des couples d'entiers compris entre 1 et 6 représentant toutes les issues possibles lors du lancé des deux dés.

Les dés étant équilibrés il est naturel de munir Ω de l'équiprobabilité : tous les couples de nombres ont la même probabilité d'être obtenus.

La présentation la plus élégante des différents événements intervenant dans l'exercice consisterai à introduire la variable aléatoire X indiquant le maximum des deux faces. je fais un choix différent.

Notons A l'événement obtenir un maximum égale à 2.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Il y a équiprobabilité (entre les couples), A est réalisé (d'après le tableau) par 3 issues et l'univers Ω comporte (toujours d'après le tableau) 36 issues donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{36}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{12}.}$$

2. Quelle est la probabilité que le résultat de l'expérience soit 6 ?

   Notons B l'événement obtenir un maximum de 6.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

   Il y a équiprobabilité, B est réalisé (d'après le tableau) par 11 issues et l'univers Ω comporte 36 issues donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{11}{36}.}$$

3. Montrer que la probabilité que le résultat de l'expérience soit un nombre inférieur ou égal à 3 est égale à $\frac{1}{4}$.

   Notons C l'événement obtenir un maximum qui soit inférieur ou égale à 3. Autrement dit 1, 2 ou 3.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

   Les issues qui nous intéressent forment un carré de trois cases de côté dans le tableau. Il y a donc $3 \times 3 = 9$ issues.

   Calculons $\mathbb{P}(C)$.

   Il y a équiprobabilité, C est réalisé (d'après le tableau) par 9 issues et l'univers Ω comporte 36 issues donc :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{9}{36}.$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}.$$

4. Montrer que la probabilité que le résultat de l'expérience soit un nombre inférieur ou égal au nombre n, où n est un nombre entier compris entre 1 et 6, est égale à $\frac{n^2}{36}$.

   Notons D_n l'événement obtenir un maximum qui soit inférieur ou égale à n. En raisonnant comme à la question précédente nous remarquons que les issues qui nous intéressent dessinent un carré de n cases de côté dans le tableau. Il y a donc $n \times n = n^2$ issues.

   Calculons $\mathbb{P}(D_n)$.

   Il y a équiprobabilité, D_n est réalisé (d'après le tableau) par n^2 issues et l'univers Ω comporte 36 issues donc :

$$\mathbb{P}(D_n) = \frac{n^2}{36}.$$

5. En déduire que la probabilité que le résultat de l'expérience soit le nombre n, où n est un nombre entier compris entre 1 et 6, est $\frac{2n-1}{36}$.

   Nous remarquons sur le tableau que, par exemple, la probabilité d'obtenir 3 est $\mathbb{P}(D_3) - \mathbb{P}(D_2)$.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

   C'est l'idée qui est ici généralisée.

   Notons E_n l'événement obtenir n pour n entier compris entre 1 et 6.

   Exprimons $\mathbb{P}(E_n)$ en fonction de n.

   Raisonnons par disjonction des cas.

   * Si $n = 1$ alors $\frac{2n-1}{36} = \frac{1}{36}$. Nous obtenons bien $\mathbb{P}(E_1)$.

* Si $2 \leqslant n \leqslant 6$ alors en raisonnant sur les carrés dans le tableaux nous avons

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(D_n) - \mathbb{P}(D_{n-1})$$

Et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n) &= \frac{n^2}{36} - \frac{(n-1)^2}{36} \\ &= \frac{n^2-(n-1)^2}{36} \\ &= \frac{n^2-(n^2-2\times n\times 1+1^2)}{36} \\ &= \frac{n^2-(n^2-2n+1)}{36} \\ &= \frac{n^2-n^2+2n-1}{36} \\ &= \frac{2n-1}{36}\end{aligned}$$

Dans tous les cas nous avons bien :

$$\boxed{\mathbb{P}(E_n) = \frac{2n-1}{36} \text{ pour tout } n \in [\![1;6]\!].}$$

III Troisième partie (14 points).

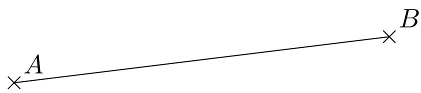
Cette partie est composée de quatre situations indépendantes.

Situation 1.

Un enseignant envisage de proposer l'énoncé suivant à des élèves de CM1.

Voici un segment de 5 cm.

Complète la figure en traçant un rectangle $ABCD$ de longueur 5 cm et de largeur 3 cm.



1. Donner deux propriétés du rectangle que les élèves vont devoir mobiliser pour effectuer la construction demandée.

2. Citer deux erreurs que les élèves de CM1 peuvent faire lors de la construction du rectangle.

3. Lors de la phase d'institutionnalisation, l'enseignant souhaite faire copier une phrase, dans le cahier des élèves, définissant le rectangle. Il interroge les élèves pour qu'ils fassent des propositions.

   Voici la proposition de trois élèves :

   Élève 1 : « *Un rectangle est un polygone à quatre côtés avec les côtés opposés qui ont la même longueur.* »

   Élève 2 : « *Un rectangle est un polygone qui a 4 côtés et 4 angles droits et avec des côtés plus longs que les autres sinon ça serait un carré.* »

   Élève 3 : « *Un rectangle est un polygone qui a 4 angles droits.* »

(a) Expliquer pourquoi chacune des trois réponses proposées ne convient pas mathématiquement pour définir un rectangle.

(b) Proposer une définition qui pourrait être notée dans les cahiers des élèves.

Situation 2.

Un enseignant propose à ses élèves de CM2 l'exercice suivant, inspiré du manuel « A portée de maths CM2 (édition Hachette éducation, 2008) » :

2 **Écris chaque fraction sous forme de la somme de sa partie entière et de sa partie fractionnaire.**

$\frac{7}{3}$ $\frac{12}{5}$ $\frac{27}{6}$ $\frac{30}{4}$ $\frac{13}{2}$ $\frac{49}{6}$ $\frac{89}{10}$ $\frac{34}{8}$ $\frac{21}{2}$ $\frac{17}{6}$ $\frac{15}{4}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{29}{8}$

Voici la production d'un élève :

n°2 p. 54 Écris chaque fractions sous forme de la somme de sa partie entière et de sa partie fractionnaire

$\frac{7}{3}$ = 6 entier et $\frac{1}{3}$

$\frac{12}{5}$ = 10 entier et $\frac{2}{5}$

$\frac{27}{6}$ = 24 entier et $\frac{3}{6}$

$\frac{30}{4}$ = 28 entier et $\frac{2}{4}$

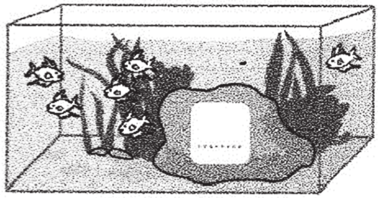
1. Analyser les réponses proposées par l'élève.

2. Donner un exemple de ce que l'enseignant pourrait proposer pour permettre à l'élève de constater que ses réponses sont incorrectes.

Situation 3.

Un enseignant propose la situation ci-dessous en Grande Section (GS) de maternelle, inspirée du fichier « Pour comprendre les mathématiques - CP », cycle2, Hachette éducation, 2016.

Il y a 10 poissons dans l'aquarium.
Combien de poissons sont cachés derrière le rocher ?



1. Proposer deux procédures que les élèves de Grande Section peuvent mobiliser pour répondre à la question posée ?

2. Un élève de Grande Section ne fournit pas la réponse attendue. Proposer une autre tâche, sur le même champ mathématique, mais permettant à l'élève de valider ou d'invalider le résultat trouvé.

3. Pour quels types de calculs les compléments à 10 seront-ils utiles au cycle 2 ? Donner deux exemples concrets d'utilisation des compléments à 10.

Situation 4.

Voici une situation proposée dans une classe de CE2, peu de temps après l'introduction de la table de multiplication par 7 :

La suite ! Trouver les nombres qui doivent arriver ensuite.

SÉRIE 1	0	7	14	21					
SÉRIE 2	84	77	70						
SÉRIE 3	0	14	7	21	14	28			

Élève A :

La suite ! Trouver les nombres qui doivent arriver ensuite.

SÉRIE 1	0	7	14	21	28	35	42	48	55
SÉRIE 2	84	77	70	63	56	49	42	35	28
SÉRIE 3	0	14	7	21	14	28	56	112	224

Élève B :

La suite ! Trouver les nombres qui doivent arriver ensuite.

SÉRIE 1	0	7	14	21	28	35	42	49	56
SÉRIE 2	84	77	70	64	57	50	44	37	30
SÉRIE 3	0	14	7	21	14	28	21	35	28

Élève C :

La suite ! Trouver les nombres qui doivent arriver ensuite.

SÉRIE 1	0	7	14	21	28	35	42	49	56
SÉRIE 2	84	77	70	63	56	49	42	34	27
SÉRIE 3	0	14	7	21	14	28			

1. Analyser chacune des productions en termes de réussites et d'erreurs.

2. Donner un exemple de correction de la série 2 que l'enseignant pourrait proposer pour aider les élèves à soustraire 7 en s'appuyant sur la connaissance des compléments à 10.