Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 4.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

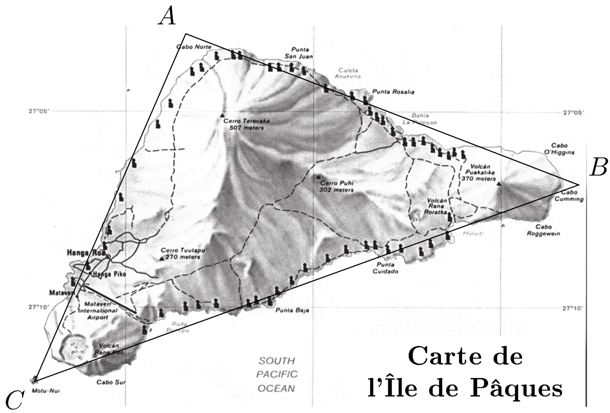
Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Monsieur Piti, professeur des écoles à Tahiti, organise un voyage scolaire au Chili avec ses élèves. Le vol Papeete - Santiago du Chili fait une escale sur l'Île de Pâques, où ils passeront quelques jours.

Partie A : géographie et histoire.

1. L'Île de Pâques, qui compte environ 6 400 habitants, est assimilée à un triangle ABC rectangle et isocèle en A, tel que $AB = 18$ km.



Carte de l'Île de Pâques

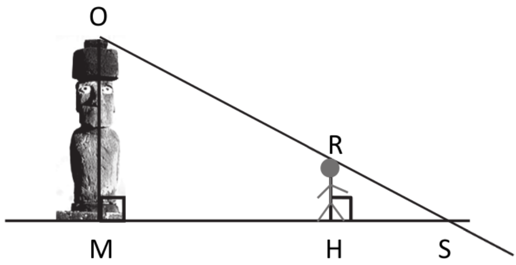
   (a) Déterminer le périmètre du triangle ABC, au kilomètre près ; il s'agit d'une estimation de la longueur du tour de l'île.

   (b) Déterminer l'aire du triangle ABC, en kilomètre carré ; il s'agit d'une estimation de la superficie de l'île.

   (c) En déduire une estimation de la densité de population de l'Île de Pâques.

2. L'Île de Pâques est parsemée de « moais », statues monumentales datant de 1250 à 1500, que l'on ne trouve que sur cette île.

   Sur la figure ci-dessous, est représenté le moai de l'Ahu Ko Te Riku dont on cherche à estimer la hauteur.



Cette figure n'est pas à l'échelle.

   À un moment ensoleillé de la journée, monsieur Piti se place en H, perpendiculairement au sol, de telle sorte que son ombre $[HS]$ coïncide avec l'ombre $[MS]$ du moai, comme sur la figure ci-dessus.

   Ainsi, les points S, R et O d'une part et les points S, H et M, d'autre part, sont alignés. Les angles $\widehat{OMS}$ et $\widehat{RHS}$ sont droits.

   Monsieur Piti mesure 1,80 m. Les élèves relèvent les mesures suivantes : $SH = 1{,}6$ m et $HM = 2{,}9$ m.

   Calculer la hauteur de ce moai arrondie au décimètre.

3. Sur l'Île de Pâques, on a répertorié les moais situés à l'intérieur et à l'extérieur de la carrière de Rano Raraku où ils étaient fabriqués. Monsieur Piti a recopié les données de l'UNESCO sur la feuille de calcul d'un tableur.

	A	B	C	D
1		Extérieur	Intérieur	Total
2	Moais couchés (entiers)	42	44	86
3	Moais couchés et cassés	23	4	
4	Moais non terminés	61	38	
5	Moais debout	42	21	
6	Total	168	107	

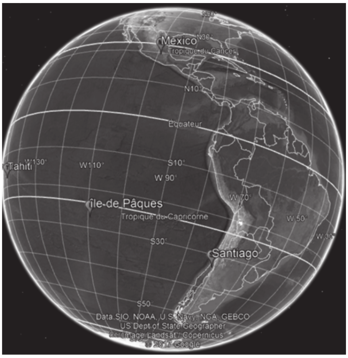
   (a) Quelle formule monsieur Piti a-t-il pu saisir dans la cellule `D2`, pour pouvoir obtenir par étirement vers le bas les valeurs des autres cases de la colonne `D` ?

   (b) Quel pourcentage les moais non terminés représentent-ils par rapport à l'ensemble de ces moais répertoriés ?

(c) Quel pourcentage les moais couchés (entiers ou cassés) représentent-ils par rapport à l'ensemble des moais répertoriés à l'intérieur de la carrière ?

(d) Monsieur Piti décide de faire photographier par ses 24 élèves les 84 moais debout ou entiers couchés situés à l'extérieur de la carrière. Pour ce faire, il répartit les élèves en groupes. Chaque groupe comporte le même nombre d'élèves et doit photographier le même nombre de moais, chaque moai ne devant être photographié que par un groupe. Quelles sont toutes les possibilités de formation des groupes, et, dans chaque cas, combien de moais chaque groupe devra-t-il photographier ?

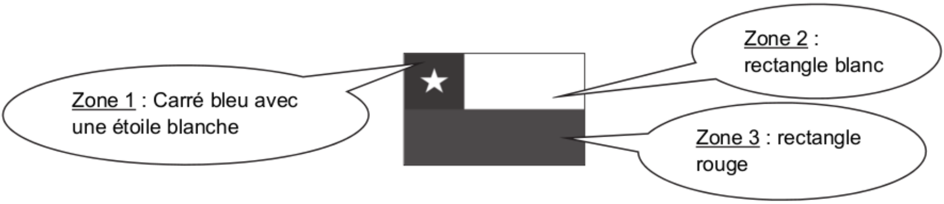
4. On donne les coordonnées géographiques, arrondies au degré :
— de Tahiti : $(17^\circ\ S; 149^\circ\ O)$ soit en écriture anglo-saxonne $(S\ 17^\circ, W\ 149^\circ)$;
— de l'Île de Pâques : $(27^\circ\ S; 109^\circ\ O)$.



L'Île de Pâques est aussi dénommée, en langue polynésienne, Rapa Nui.
Les premiers habitants de l'Île de Pâques étaient originaires de l'Île de Rapa Iti située dans l'archipel des Australes (Polynésie Française).
Les coordonnées géographiques de l'Île de Rapa Iti sont $(27^\circ\ S; 144^\circ\ O)$.
On souhaite estimer la distance du voyage effectué sur l'Océan Pacifique par ces premiers navigateurs polynésiens.
Estimer la distance entre l'Île de Rapa Iti et l'Île de Rapa Nui en suivant le 27^{e} parallèle sud, sachant que le rayon du 27^{e} parallèle sud est environ 5 676 km.

Partie B : le drapeau chilien.

Voici le drapeau du Chili :



Avant de partir, monsieur Piti décide de faire fabriquer, à chacun des 24 élèves, un drapeau en tissu. Il le schématise, comme ci-dessous, par six carrés identiques de 15 cm de côté. L'étoile blanche sera achetée pour être collée par-dessus le carré bleu. Chaque drapeau aura pour dimension 45 cm $\times$ 30 cm.

bleu	blanc	blanc
rouge	rouge	rouge

1. Calculer la longueur minimum de tissu de chaque couleur à acheter, sachant que le tissu est vendu en rouleau de 90 cm de large. On négligera les petites coutures.

2. Les tissus unicolores sont vendus 700 F (Franc Pacifique) le mètre et les étoiles, 250 F l'unité.

   Calculer le coût engendré par la confection des drapeaux des élèves en négligeant le prix du fil.

Parie C : dans l'avion.

Dans l'avion, l'écran du passager indique les informations du vol en direct, en différentes langues et unités. Monsieur Piti compare les données en anglais et en espagnol au même moment :

Anglais	*Espagnol*	*Traduction de M. Piti*
Ground speed : 530 mph	Velocidad : 853 km/h	Vitesse
Altitude : 35 000 ft	Altura : 10 668 m	Altitude
Outside air temperature : -58° F	Temperatura exterior : -50° C	Température extérieure
Distance to destination : 2497 mi	Distancia asta el destino : 4018 km	Distance restante
Local time at destination : 3 : 43 pm	La hora a la destinacion : 15 : 43	Heure locale à destination

Monsieur Piti a traduit les mots en français (dernière colonne), mais les unités sont différentes.

1. Quelle est la longueur d'un pied (1 ft) en millimètre ?
2. Si l'avion gardait cette vitesse constante, à quelle heure arriverait-il ?
3. Soit la fonction qui à la mesure, en degré Fahrenheit ($^{\circ}F$), d'une température associe la mesure $f(t)$, en degré Celsius ($^{\circ}C$), de cette température. On admet que f est une fonction affine dont une expression est de la forme $f(t) = \frac{5}{9}t+b$, où b est une constante.

   (a) Montrer que la valeur de la constante b est égale à $-\frac{160}{9}$.

   (b) Pour quelles températures les mesures en degré Celsius et en degré Fahrenheit sont-elles égales ?

   (c) Les mesures en degré Celsius et en degré Fahrenheit sont-elles proportionnelles ?

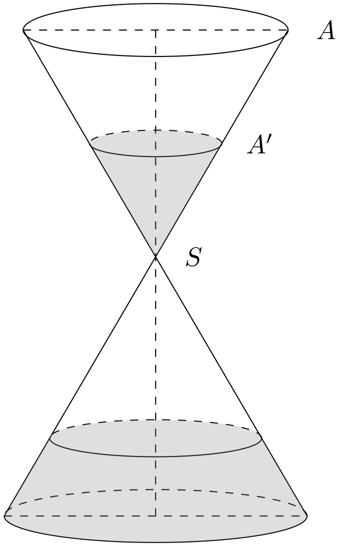
   (d) Trouver une formule pour convertir les degrés Celsius t_C en degrés Fahrenheit t_F.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

Un sablier est constitué de deux cônes identiques superposés comme sur le schéma ci-dessous.



Le sable est modélisé par les parties grisées. Il s'écoule au niveau du point S.

Dans les parties supérieure et inférieure du sablier, les surfaces supérieures des parties grises sont considérées horizontales et parallèles aux bases des cônes.

Le cône du haut a pour diamètre 5 cm et pour hauteur 12 cm.

1. (a) Calculer l'aire de la base du cône du haut, arrondie au millimètre carré près.

   (b) Calculer le volume du cône du haut, arrondi au millimètre cube près.

Rappel de la formule du volume du cône : Volume du cône : $V = \frac{1}{3} \times \textit{aire de la base} \times \textit{hauteur}$.

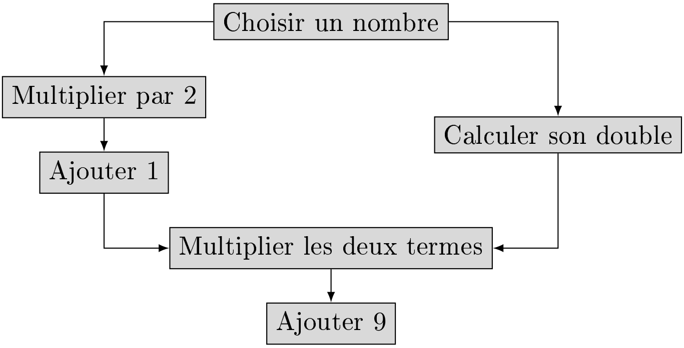
2. On s'intéresse à la position obtenue à un instant donné et représentée sur le schéma ci-dessus : le niveau de sable est tel que A' est le milieu du segment $[AS]$.

   (a) Le cône de sable restant dans le cône du haut est une réduction du cône du haut.
   Calculer son volume, arrondi au millimètre cube près.

   (b) On admet que le volume de sable descendu est proportionnel au temps écoulé. Tout le sable s'écoule en 4 minutes. Au départ le cône du haut était entièrement rempli de sable.
   Au bout de combien de temps le sable est-il dans la position représentée sur le schéma ci-dessus, avec A' milieu du segment $[AS]$?

Exercice 2.

1. Voici un programme de calcul :

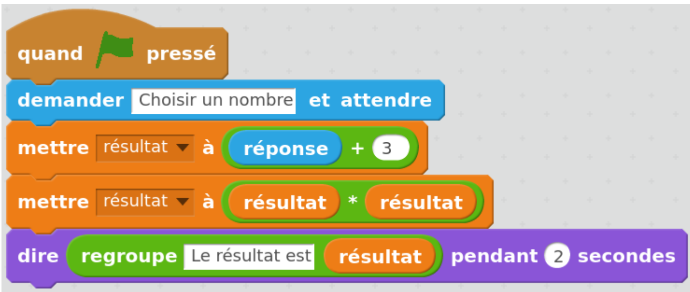


   (a) Effectuer le programme de calcul en choisissant 2 comme nombre de départ et montrer qu'on obtient 29.

   (b) Quel résultat obtient-on en choisissant $\dfrac{2}{3}$ comme nombre de départ ?

   (c) Exprimer le résultat obtenu avec ce programme de calcul en prenant x nombre de départ.

2. On teste un autre programme de calcul avec le logiciel Scratch :



   (a) Effectuer le programme de calcul en choisissant 2 comme nombre de départ et montrer qu'on obtient 25.

   (b) Quel résultat obtient-on en choisissant 1,5 comme nombre de départ ?

   (c) Exprimer le résultat obtenu avec ce programme de calcul en prenant x comme nombre de départ.

3. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x les deux programmes donnent le même résultat. Justifier la réponse.

Exercice 3.

Un professeur a donné un contrôle commun à trois de ses classes. Avant de rendre les copies à ses élèves, il a fait quelques calculs statistiques à partir de leurs notes.

1. Pour la classe A qui comptent 24 élèves, il a relevé les informations suivantes :

Note minimale	Médiane	Moyenne	Étendue
5	11	12	14

Dire si chacune des affirmations ci-dessous est vraie ou fausse, en justifiant les réponses.

(a) « La note maximale est 20. »

(b) « Si on enlève une copie avec la note maximale et une copie avec la note minimale, la moyenne des notes restantes augmente. »

(c) « Au moins la moitié des élèves ont une note de 12 ou plus. »

2. La classe B compte 16 filles et 11 garçons. À ce contrôle, la moyenne des filles est de 11,7 et celle des garçons de 10,3.
Quelle est la moyenne des notes des élèves de la classe B à ce contrôle ? Arrondir le résultat au dixième.

3. La classe C compte 32 élèves. Le professeur a calculé la moyenne des notes des élèves des deux classes A et C. Cette moyenne est de 11,2.
Quelle est la moyenne des notes des élèves de la classe C à ce contrôle ?

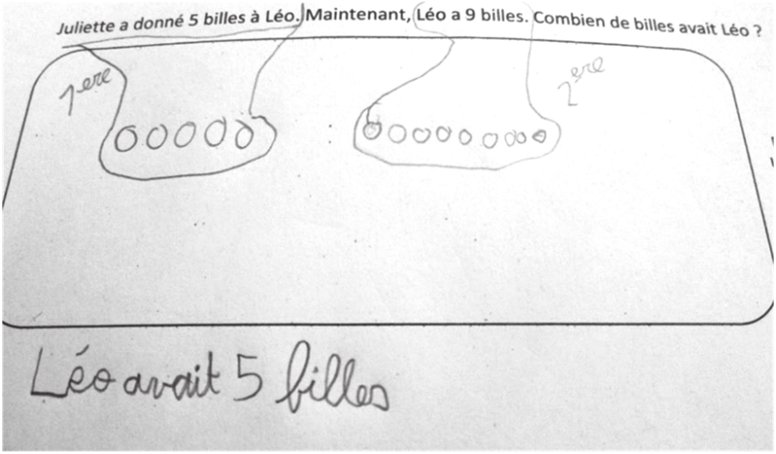
III Troisième partie (14 points).

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

Situation 1.

Le problème suivant est proposé à des élèves de CP :
« Juliette a donné 5 billes à Léo. Maintenant Léo a 9 billes. Combien de billes avait Léo ? »

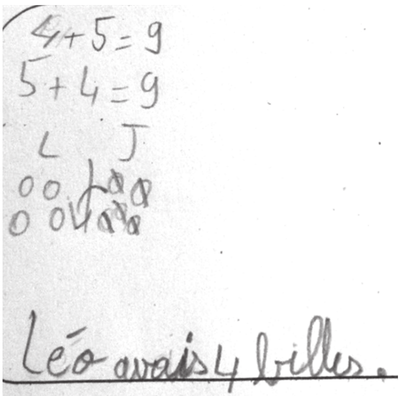
1. Voici la production de l'élève 1.



   (a) Comment interpréter les traces écrites de l'élève 1 en termes de compréhension de la situation ?

   (b) Donner deux exemples d'aides qui pourraient-être apportées à cet élève.

2. Voici la production de l'élève 2.



   Cette production comporte à la fois des calculs et un schéma.
   Comment interpréter ces traces écrites en termes de maîtrise, par l'élève 2, des compétences mathématiques : modéliser et représenter ?

3. En fin de CP, on propose le problème suivant : « Juliette a donné 35 billes à Léo. Maintenant Léo a 52 billes. Combien de billes avait Léo ? ».

Proposer une représentation de cette situation qui pourrait être enseignée à des élèves de CP pour les aider à résoudre le problème.

Situation 2.

On a proposé à des élèves de cycle 3 les trois problèmes suivants :

Problème 1
Tom ramasse les œufs de ses poules. Ce matin, les poules ont pondu 39 œufs.
Il les range dans des boites de 12 œufs.
Combien de boites entières pourra-t-il remplir ?

Problème 2
Lucie vient de dépenser 39 € pour acheter 12 brioches.
Quel est le prix d'une brioche ?

Problème 3
Au parc d'attraction, 39 personnes sont montées dans un petit train. Chaque wagonnet comporte 12 places et sont tous remplis au maximum sauf le dernier.

1. Combien y a-t-il de wagonnets dans ce train ?
2. Combien reste-t-il de places libres dans le dernier wagonnet ?

Voici la production d'Ethan :

Problème 1

Je cherche combien de boîties ont pourra remplir.
39 : 12 = 3,
Il pourra faire 3 boites de 12 oeufs.

Problème 2

Je cherche le prise d'une brioche.
39 : 12 = 3

$$\begin{array}{r|l} 39 & 12 \\ -\ 36 & 3 \\ \hline 03 & \end{array}$$

une brioche coûte 3 € 03 centimes

Problème 3

1. Je cherche combien il y a de wagonnet dans ce train
39 : 12 = 3
Il y a 3 wagonnet au total dans ce train
2. Je cherche combien il reste de places dans le dernier wagonnet
39 : 12 = 3 reste 3
Il reste 3 places libres dans le dernier wagonnet.

1. Pour chaque problème, analyser la procédure mise en œuvre par Ethan puis repérer les erreurs et les réussites.

2. Donner un exemple de ce que l'enseignant pourrait proposer à Ethan pour qu'il prenne conscience que la réponse qu'il donne pour le problème 2 est erronée ?

3. De même, donner un exemple de ce que l'enseignant pourrait proposer à Ethan pour lui faire prendre conscience de ses erreurs pour la résolution du problème 3 ?

Situation 3.

Voici un exercice proposé à des élèves de CM2.

> Utilise les carreaux de la feuille pour représenter les nombres fractionnaires suivants sur une demi-droite graduée :
>
> $$\frac{2}{5} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{15}{10} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{4}{10} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{10}$$

1. Citer deux objectifs d'apprentissage que l'on peut associer à cet exercice.

2. Citer deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour placer le nombre $\frac{1}{2}$?

3. Citer deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour placer le nombre $\frac{7}{5}$.

Dans la même séance, les élèves ont à réaliser l'exercice suivant :

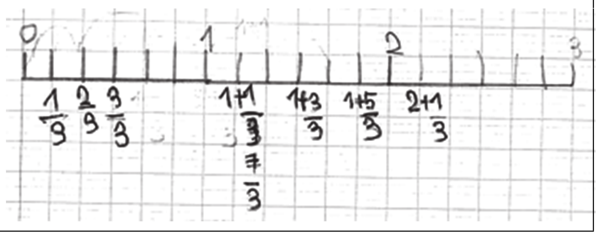
> Utilise les carreaux de la feuille pour représenter les nombres suivants :
>
> $$1+\frac{1}{3} \qquad \frac{3}{3} \qquad 2+\frac{1}{3} \qquad 1+\frac{3}{3} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{2}{3} \qquad 1+\frac{5}{3} \qquad \frac{7}{3}$$

Pour avoir un axe plus lisible, le professeur ajoute la consigne suivante : « Vous prendrez 6 carreaux pour l'unité ».

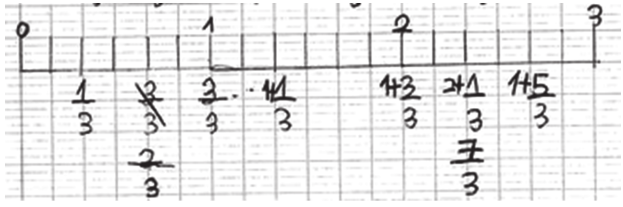
Voici les productions de 3 élèves de la classe :

Élève 1

Élève 2



Élève 3



4. Comparer les productions des élèves 1 et 3. Quelles sont les compétences acquises par chacun d'eux ?

5. (a) Analyser la production de l'élève 2.

   (b) Proposer un exemple d'une aide que l'enseignant peut apporter à cet élève pour lui faire faire prendre conscience de ses erreurs ?

6. Le professeur a ajouté la consigne « Vous prendrez 6 carreaux pour l'unité ». Était-ce une bonne initiative ? Justifier votre réponse.