Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 4.

Lien vers le sujet seul : pdf.
Merci à M. Meynier, JJ KK et M. Depoorter pour les corrections apportées.

I Première partie (13 points).

Partie A : géographie et histoire.

1. (a) Calculons le périmètre p de ABC.

* Commençons par déterminer CB.
ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} BC^2 &= 2AB^2, \quad \text{car } ABC \text{ est isocèle en } A \\ &= 2\,(18 \text{ km})^2 \\ &= 2\left(18^2 \text{ km}^2\right) \\ &= 2 \times 18^2 \text{ km}^2 \\ &= 648 \text{ km}^2 \end{aligned}$$

Puisque BC est une longueur donc positive nous en déduisons :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{648 \text{ km}^2} \\ &= \sqrt{648} \text{ km} \\ &= 18\sqrt{2} \text{ km} \end{aligned}$$

* Enfin, pour le périmètre

$$\begin{aligned} p &= AB + AC + BC \\ &= (18 \text{ km}) + (18 \text{ km}) + \left(18\sqrt{2} \text{ km}\right) \\ &= 36 + 18\sqrt{2} \text{ km} \\ &\approx 61{,}4558 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\boxed{p \approx 61 \text{ km.}}$$

(b) Calculons l'aire $\mathscr{A}(ABC)$ du triangle ABC.

Puisque ABC est rectangle en A :

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times AC$$

Puisque ABC est isocèle en A :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABC) &= \frac{1}{2} \times AB^2 \\ &= \frac{1}{2} (18 \text{ km})^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 18^2 \text{ km}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ABC) = 162 \text{ km}^2.}$$

(c) Déterminons la densité de population d.

$$\begin{aligned}d &= \frac{6\,400 \text{ hab}}{162 \text{ km}^2} \\ &= \frac{6\,400}{162} \text{ hab} \cdot \text{km}^{-2} \\ &\approx 39{,}5061 \text{ hab} \cdot \text{km}^{-2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'île compte 40 habitants au km}^2.}$$

2. Calculons OM.

* Les points S, R et O d'une part et les points S, H et M, d'autre part, sont alignés dans cet ordre donc nous avons une configuration de Thalès.
* Les angles $\widehat{OMS}$ et $\widehat{RHS}$ sont droits donc $(OM) \parallel (RH)$

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SH}{SM} = \frac{RH}{OM}$$

En procédant à un produit en croix nous en déduisons :

$$SH \times OM = RH \times SM$$

Et donc successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{SH \times OM}{SH} &= \frac{RH \times SM}{SH} \\
OM &= \frac{RH \times (SH + HM)}{SH} \\
&= \frac{(1{,}8 \text{ m}) \times [(1{,}6 \text{ m}) + (2{,}9 \text{ m})]}{1{,}6 \text{ m}} \\
&= \frac{(1{,}8 \text{ m}) \times (4{,}5 \text{ m})}{1{,}6 \text{ m}} \\
&= \frac{1{,}8 \times 4{,}5}{1{,}6} \; \frac{\text{m}^2}{\text{m}} \\
&= 5{,}0625 \text{ m}
\end{aligned}$$

$$\boxed{OM \approx 5{,}1 \text{ m.}}$$

3. (a) Formule entrée en `D2` : `B2` + `C2`.

   (b) Calculons la proportion, p_1, de moais non terminés.

   Il y a $61 + 38 = 99$ moais inachevés.
   Il y a $168 + 107 = 275$ moais au total.
   Donc

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{99}{275} \\
&= 0{,}36
\end{aligned}$$

$$\boxed{36\ \%\text{ des moais sont inachevés.}}$$

(c) Calculons la proportion, p_2, de moais couchés dans la carrière.

Il y a $44 + 4 = 48$ moais couchés dans la carrière.
Il y a 107 moais au total dans la carrière.
Donc

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{48}{107} \\ &\approx 0{,}44{,}86 \end{aligned}$$

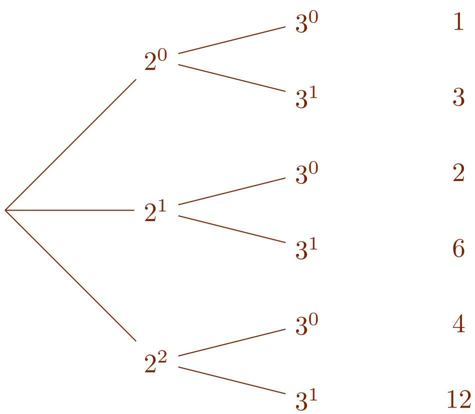
$$\boxed{44{,}86\ \%\text{ des moais de la carrière sont couchés.}}$$

(d) * Analyse : supposons qu'il soit possible de faire la répartition proposée par l'énoncé.

Notons n le nombre de groupe, m le nombre d'élèves dans un groupe et p le nombre de moais que photographiera chaque groupe.
Nous avons donc

$$\begin{cases} nm = 24 \\ np = 84 \end{cases}$$

Ainsi n est un diviseur commune de 224 et 84. Or nous avons les décompositions en facteurs premiers suivantes : $24 = 2^3 \times 3$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ donc n est un diviseur de $2^2 \times 3$.
Recherchons tous les diviseurs de $2^2 \times 3$ sous forme d'un arbre.



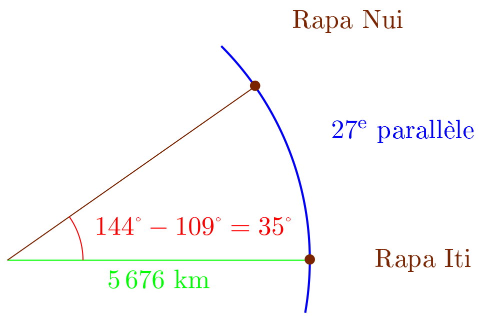
Puisque $m = \frac{24}{n}$ et $p = \frac{84}{2}$:

Nombre de groupes n	Nombre d'élèves m	Nombre de moais p
1	24	84
3	8	28
2	12	42
6	4	14
4	6	21
12	2	7

* synthèse. Il est aisé de vérifier que les répartitions indiquées dans le tableau ci-dessus sont réellement possibles.

4. Déterminons la distance d séparant Rapa Iti de Rapa Nui.

La situation peut être schématisée en dessinant un cercle pour le parallèle.



Ainsi la distance entre les deux îles représente une proportion de $\frac{35}{360}$ de la longueur du 27^{e} parallèle qui est un cercle.
Par conséquent

$$\begin{aligned} d &= \frac{35}{360} \times (2\pi 5676 \text{ km}) \\ &= \frac{35}{360} \times 2\pi 5676 \text{ km} \\ &\approx 3467{,}2711 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\boxed{d \approx 3467 \text{ km.}}$$

Partie B : le drapeau chilien.

1. * Déterminons la longueur de tissu bleu nécessaire.

   $90 = 6 \times 15$ donc sur une largeur de tissu il est possible de découper six carrés.
   Il faudra donc disposer $\frac{24}{6} = 4$ carrés sur la longueur. Ceci représente une longueur de 4×15 cm $= 60$ cm.

   Il faudra découper une longueur de 0,60 m de tissu bleu.

   * Remarquons que la question de découper en petits carrés ou en rectangles la partie rouge du drapeau ne se pose pas puisque les 90 cm sont aussi bien divisible par 15 cm que par 30 cm.
   Puisqu'il y a deux fois plus de carrés blancs que de carrés bleu

   il faudra découper 1,20 m de tissu blanc.

   * Puisqu'il y a trois fois plus de carrés rouges que de carrés bleu

   il faudra découper 1,80 m de tissu rouge.

2. Déterminons le coût, c_D, de la fabrication des drapeaux.

   Il faut prendre en compte le coût du tissu :

$$\begin{aligned} c_T &= [(0{,}60 \text{ m}) + (1{,}20 \text{ m}) + (1{,}80 \text{ m})] \times (700 \text{ F/m}) \\ &= (3{,}60 \text{ m}) \times (700 \text{ F/m}) \\ &= 2\,520 \text{ F} \end{aligned}$$

   Mais aussi le coût des étoiles :

$$\begin{aligned} c_E &= 24 \times 250 \text{ F} \\ &= 6\,000 \text{ F} \end{aligned}$$

   Finalement le coût total est

$$\begin{aligned} c_D &= c_T + c_E \\ &= (2\,520 \text{ F}) + (6\,000 \text{ F}) \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{c_T = 8\,520 \text{ F.}}$$

Parie C : dans l'avion.

1. Exprimons un pied en millimètre.

   D'après l'énoncé :

$$35\,000 \text{ ft} = 10\,668 \text{ m}$$

   Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{35\,000 \text{ ft}}{35\,000} &= \frac{10\,668 \text{ m}}{35\,000} \\
\frac{35\,000}{35\,000} \text{ ft} &= \frac{10\,668}{35\,000} \text{ m} \\
1 \text{ ft} &= 0{,}3048 \text{ m} \\
1 \text{ ft} &= 0{,}3048 \times 1000 \text{ mm}
\end{aligned}$$

$$\boxed{1 \text{ ft} = 304{,}8 \text{ mm.}}$$

2. Déterminons l'heure d'arrivée.

   Nous connaissons la vitesse de l'avion et la distance qu'il doit parcourir, par conséquent la durée du trajet restant est

$$\begin{aligned}
d_r &= \frac{4\,018 \text{ km}}{853 \text{ km/h}} \\
&= \frac{4\,018}{853} \, \frac{\text{km}}{\text{km} \cdot \text{h}^{-1}} \\
&= \frac{4\,018}{853} \text{ h} \\
&= \left(4 + \frac{606}{853}\right) \text{ h} \\
&= (4 \text{ h}) + \left(\frac{606}{853} \times 60 \text{ min}\right) \\
&\approx (4 \text{ h}) + (43 \text{ min})
\end{aligned}$$

Par conséquent l'heure à l'arrivée sera, en arrondissant à la minute :

$$\begin{aligned}
(15 \text{ h}) + (43 \text{ min}) + (4 \text{ h}) + (43 \text{ min}) &= [(15 + 4) \text{ h}] + [(43 + 43) \text{ min}] \\
&= (19 \text{ h}) + (86 \text{ min}) \\
&= (19 \text{ h}) + [(1 \times 60 + 26) \text{ min}] \\
&= (19 \text{ h}) + (1 \text{ h}) + (26 \text{ min})
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Lorsqu'ils arriveront l'heure locale sera : 20 h et 26 min.}}$$

3. Contrairement à la question I.C.1, nous ne pouvons pas passer d'une unité à l'autre. En effet il n'y a pas proportionnalité entre les degrés Celsius et Fahrenheit. Le terme « degré » et le symbole °sont là pour nous en avertir. Il ne s'agit pas d'unités mais d'échelles de mesure. Autrement dit le zéro est choisi de façon arbitraire.

   La seule unité (au sens du système international) de mesure de température est le kelvin noté K sans le °. Dans ce cas le zéro correspond au zéro absolu c'est-à-dire le niveau d'énergie (et donc d'agitation) minimal au niveau atomique.

   (a) Nous pourrions nous contenter de vérifier que la valeur proposée pour b convient mais nous allons la déterminer comme si elle ne nous était pas donnée par l'énoncé.

Déterminons b.

Du fait de la définition de f donnée dans l'énoncé nous devons avoir :

$$f(-58) = -50$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{5}{9} \times (-58) + b = -50$$
$$-\frac{290}{9} + b = -50$$
$$-\frac{290}{9} + b + \frac{290}{9} = -50 + \frac{290}{9}$$

Enfin

$$\boxed{b = -\frac{160}{9}.}$$

(b) Interprétons la question posée par une équation.

Résolvons l'équation $f(t) = t$ d'inconnue t un nombre réel.

$$f(t) = t \Leftrightarrow \frac{5}{9}t - \frac{160}{9} = t$$

Nous reconnaissons une équation inéaire du premier degré que nous résoudrons donc en isolant l'inconnue :

$$\begin{aligned}
f(t) = t &\Leftrightarrow \frac{5}{9}t - \frac{160}{9} - t = t - t \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{5}{9} - 1\right)t - \frac{160}{9} = 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{4}{9}t - \frac{160}{9} + \frac{160}{9} = 0 + \frac{160}{9} \\
&\Leftrightarrow -\frac{4}{9}t = \frac{160}{9} \\
&\Leftrightarrow \frac{-\frac{4}{9}t}{-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{160}{9}}{-\frac{4}{9}} \\
&\Leftrightarrow t = -\frac{160}{9} \times \frac{9}{4} \\
&\Leftrightarrow t = -40
\end{aligned}$$

Les deux échelles de mesure de température coïncident pour une température de -40° (Celsius ou Fahrenheit).

(c) Nous pourrions choisir deux températures distinctes et vérifier qu'il n'y a pas proportionnalité entre les mesures en degrés Celsius et Fahrenheit de ces deux températures. Nous allons privilégier un argument classique en collège.

f est une fonction affine mais n'est pas une fonction linéaire ($b \neq 0$), elle ne modélise donc pas une situation de proportionnalité.

Les mesures en degrés Celsius et Fahrenheit ne sont pas proportionnelles.

(d) Exprimons t_F en fonction de t_C.

Nous avons

$$f(t_F) = t_C$$

Autrement dit :

$$\frac{5}{9}t_F - \frac{160}{9} = t_C$$

Dans la précédente égalité nous allons isoler t_F comme si nous résolvions l'équation d'inconnue t_F.

$$\begin{aligned}
\frac{5}{9}t_F - \frac{160}{9} = t_C &\leftrightarrow \frac{5}{9}t_F - \frac{160}{9} + \frac{160}{9} = t_C + \frac{160}{9} \\
&\Leftrightarrow \frac{5}{9}t_F = t_C + \frac{160}{9} \\
&\Leftrightarrow \frac{9}{5} \times \frac{5}{9}t_F = \frac{9}{5} \times \left(t_C + \frac{160}{9}\right) \\
&\Leftrightarrow t_F = \frac{9}{5}t_C + \frac{9}{5} \times \frac{160}{9}
\end{aligned}$$

Ainsi

$t_F = \frac{9}{5}t_C + 32.$

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. (a) Calculons l'aire, $\mathscr{A}_1$, de la base du cône.

La base du cône est un disque de diamètre 5 cm donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1 &= \pi\left(\frac{5\text{ cm}}{2}\right)^2\\ &= \pi \times 2{,}5^2\text{ cm}^2\\ &= \frac{25}{4}\pi\text{ cm}^2\\ &\approx 19{,}634954\text{ cm}^2\end{aligned}$$

Arrondir au millimètre carré signifie ici arrondir à la seconde décimale car 1 cm^2 = 100 mm^2.

$$\boxed{\mathscr{A}_1 \approx 19{,}63\text{ cm}^2.}$$

(b) Déterminons le volume, $\mathscr{V}_1$, du cône du haut.

En utilisant la formule rappelée dans l'énoncé et en utilisant les calculs de la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1 &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{25}{4}\pi\text{ cm}^2\right) \times (12\text{ cm})\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{25}{4}\pi \times 12\text{ cm}^3\\ &\approx 78{,}53981\text{ cm}^3\end{aligned}$$

Arrondir au millimètre cube signifie ici arrondir à la troisième décimale.

$$\boxed{\mathscr{V}_1 \approx 78{,}540\text{ cm}^3.}$$

2. (a) Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ du volume du cône de sable.

Puisque le cône de sable est une réduction à $\frac{1}{2}$ du cône du haut

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \mathscr{V}_1\\ &\approx \frac{1}{2^3} \times 78{,}540\text{ cm}^3\end{aligned}$$

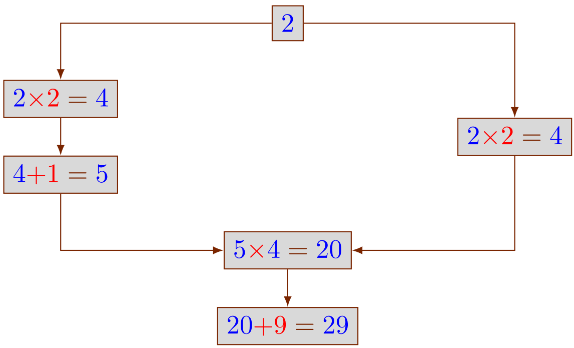
$$\mathscr{V} \approx 9{,}844 \text{ cm}^3.$$

(b) Déterminons le temps mis pour arriver à la position représentée.

D'après la question précédente $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ du volume de départ reste dans le sablier autrement dit $\frac{7}{8}$ du sable s'est déjà écoulé.
Puisque le volume de sable et le temps écoulés sont proportionnels cela signifie qu'il s'est déjà écoulé $\frac{7}{8} \times 4 \text{ min} = 3{,}5 \text{ min}$.
Autrement dit :

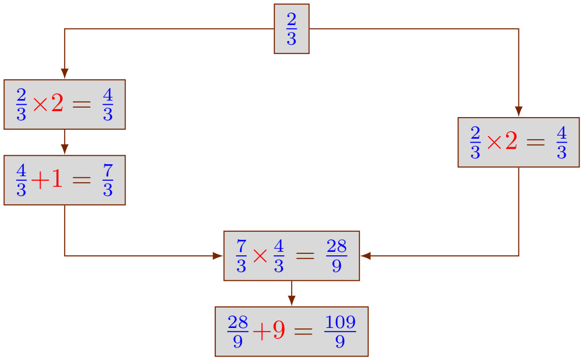
la position représentée est atteinte au bout de trois minutes et trente secondes.

Exercice 2.



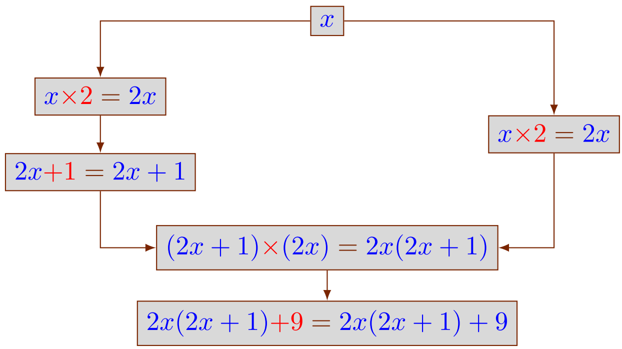
1. (a)

Si l'on entre 2 le programme renvoie 29.



(b)

Si l'on entre $\frac{2}{3}$ alors le programme renvoie $\frac{109}{9}$.



(c)

Si l'on entre x alors le programme renvoie $2x(2x+1)+9$.

2. (a) Construisons le tableau des variables de ce programme avec 2 en entrée.

Instruction	réponse	résultat
1	2	
2	2	$2+3=5$
3	2	$5\times 5=25$

En faisant tourner ce programme avec 2 en entrée nous obtenons 25 en sortie.

(b) Construisons le tableau des variables de ce programme avec 1,5 en entrée.

Instruction	réponse	résultat
1	1,5	
2	2	$1{,}5 + 3 = 4{,}5$
3	2	$4{,}5 \times 4{,}5 = 20{,}25$

En faisant tourner ce programme avec 1,5 en entrée nous obtenons 20,25 en sortie.

(c) Construisons le tableau des variables de ce programme avec x en entrée.

Instruction	réponse	résultat
1	x	
2	2	$x + 3 = x + 3$
3	2	$(x+3) \times (x+3) = (x+3)^2$

En faisant tourner ce programme avec 2 en entrée nous obtenons 25 en sortie.

3. Ces deux programmes renvoie la même réponse en entrant x si et seulement si : $2x(2x+1)+9 = (x+3)^2$.

Résolvons cette équation.

$$2x(2x+1)+9 = (x+3)^2$$

équivaut successivement à

$$2x \times 2x + 2x \times 1 + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$$
$$4x^2 + 2x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

Il ne s'agit *a priori* pas d'une équation linéaire nous allons donc essayer de nous ramener à une équation produit-nul :

$$\begin{aligned}
4x^2+2x+9-(x^2+6x+9) &= x^2+6x+9-(x^2+6x+9)\\
4x^2+2x+9-(x^2+6x+9) &= 0\\
4x^2+2x+9-x^2-6x-9 &= 0\\
3x^2-4x &= 0\\
3x\times x-6x &= 0\\
(3x-4)x &= 0\\
3x-4=0 \quad &\text{ou} \quad x=0\\
3x=4 \quad &\text{ou} \quad x=0\\
x=\frac{4}{3} \quad &\text{ou} \quad x=0
\end{aligned}$$

Les deux programmes renvoient la même valeur lorsqu'on choisi en entrée $\frac{4}{3}$ ou 0.

Exercice 3.

1. (a) La note minimale est 5 et l'étendue est 14 donc la note maximale est $5+14=19$.

   L'affirmation est fausse.

   (b) $\frac{5+19}{2}=12$ donc enlever ces deux notes ne modifiera pas la moyenne. Détaillons cela.

   Calculons la moyenne $\overline{x}$ obtenue en enlevant la meilleur et la moins bonne note.

   Puisque la moyenne des 24 élèves est 12, que la moins bonne note est 5 t la meilleur 19, nous avons

$$\frac{22\overline{x}+5+19}{24}=12$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
24\times\frac{22\overline{x}+24}{24} &= 24\times 12\\
22\overline{x}+24 &= 288\\
22\overline{x}+24-24 &= 288-24\\
22\overline{x} &= 264\\
\frac{22\overline{x}}{22} &= \frac{264}{22}\\
\overline{x} &= 12
\end{aligned}$$

L'affirmation est fausse.

(c) La médiane est de 11 donc la moitié des élèves ont eu une note supérieure ou égale à 11.

L'affirmation est fausse.

2. Comme précédemment il faut faire une moyenne des moyennes.

   Calculons la moyenne $\overline{x}_B$ de la classe B.

$$\begin{aligned}
x_B &= \frac{16\times 11{,}7+11\times 10{,}3}{16+11}\\
&\approx 11{,}129
\end{aligned}$$

$\overline{x}_B \approx 11{,}1.$

3. Là encore c'est une moyenne de moyennes.

   Calculons la moyenne $\overline{x}_C$ de la classe C.

   Nous savons que

$$\frac{24\times 12+32\times\overline{x}_C}{24+32} = 11{,}2$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{288+32\overline{x}_C}{56} &= 11{,}2 \\
56\times\frac{288+32\overline{x}_C}{56} &= 56\times 11{,}2 \\
288+32\overline{x}_C &= 627{,}2288+32\overline{x}_C-288 \qquad = 627{,}2-288 \\
32\overline{x}_C &= 339{,}2 \\
\frac{32\overline{x}_C}{32} &= \frac{339{,}2}{32}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x}_C = 10{,}6.}$$

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1. (a)
   (b)
2.
3.

Situation 2.

1.
2.
3.

Situation 3.

1.
2.
3.
4.
5. (a)
   (b)
6.