# Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 4.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à M. Meynier, JJ KK et M. Depoorter pour les corrections apportées.

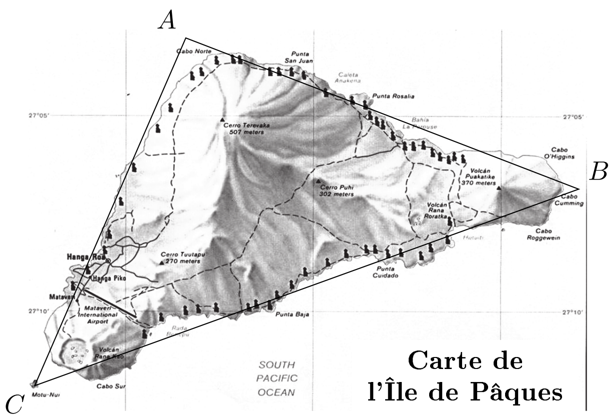
*Durée : 4 heures.*
*Épreuve notée sur* 40.

## I Première partie (13 points).

Monsieur Piti, professeur des écoles à Tahiti, organise un voyage scolaire au Chili avec ses élèves. Le vol Papeete - Santiago du Chili fait une escale sur l'Île de Pâques, où ils passeront quelques jours.

### Partie A : géographie et histoire.

1. L'Île de Pâques, qui compte environ 6 400 habitants, est assimilée à un triangle $ABC$ rectangle et isocèle en $A$, tel que $AB = 18$ km.




Carte de l'Île de Pâques

   (a) Déterminer le périmètre du triangle $ABC$, au kilomètre près ; il s'agit d'une estimation de la longueur du tour de l'île.

   Calculons le périmètre $p$ de $ABC$.

* Commençons par déterminer $CB$.
$ABC$ est rectangle en $A$ donc, d'après le théorème de Pythagore

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} BC^2 &= 2AB^2, \quad \text{car } ABC \text{ est isocèle en } A \\ &= 2\,(18\text{ km})^2 \\ &= 2\left(18^2\text{ km}^2\right) \\ &= 2 \times 18^2\text{ km}^2 \\ &= 648\text{ km}^2 \end{aligned}$$

Puisque $BC$ est une longueur donc positive nous en déduisons :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{648\text{ km}^2} \\ &= \sqrt{648}\text{ km} \\ &= 18\sqrt{2}\text{ km} \end{aligned}$$

* Enfin, pour le périmètre

$$\begin{aligned} p &= AB + AC + BC \\ &= (18\text{ km}) + (18\text{ km}) + \left(18\sqrt{2}\text{ km}\right) \\ &= 36 + 18\sqrt{2}\text{ km} \\ &\approx 61{,}4558\text{ km} \end{aligned}$$

$$\boxed{p \approx 61\text{ km.}}$$

(b) Déterminer l'aire du triangle $ABC$, en kilomètre carré ; il s'agit d'une estimation de la superficie de l'île.

Calculons l'aire $\mathscr{A}(ABC)$ du triangle $ABC$.

Puisque $ABC$ est rectangle en $A$ :

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times AC$$

Puisque $ABC$ est isocèle en $A$ :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABC) &= \frac{1}{2} \times AB^2 \\ &= \frac{1}{2}\,(18\text{ km})^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 18^2\text{ km}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ABC) = 162\text{ km}^2.}$$

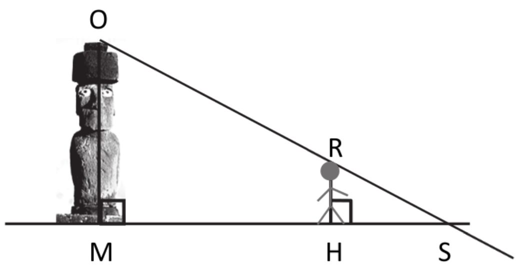
(c) En déduire une estimation de la densité de population de l'Île de Pâques.

Déterminons la densité de population $d$.

$$\begin{aligned}d &= \frac{6\,400\text{ hab}}{162\text{ km}^2} \\ &= \frac{6\,400}{162}\text{ hab}\cdot\text{km}^{-2} \\ &\approx 39{,}5061\text{ hab}\cdot\text{km}^{-2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'île compte 40 habitants au km}^2.}$$

2. L'Île de Pâques est parsemée de « moais », statues monumentales datant de 1250 à 1500, que l'on ne trouve que sur cette île.
Sur la figure ci-dessous, est représenté le moai de l'Ahu Ko Te Riku dont on cherche à estimer la hauteur.



*Cette figure n'est pas à l'échelle.*

À un moment ensoleillé de la journée, monsieur Piti se place en $H$, perpendiculairement au sol, de telle sorte que son ombre $[HS]$ coïncide avec l'ombre $[MS]$ du moai, comme sur la figure ci-dessus.
Ainsi, les points $S$, $R$ et $O$ d'une part et les points $S$, $H$ et $M$, d'autre part, sont alignés. Les angles $\widehat{OMS}$ et $\widehat{RHS}$ sont droits.
Monsieur Piti mesure 1,80 m. Les élèves relèvent les mesures suivantes : $SH = 1{,}6$ m et $HM = 2{,}9$ m.
Calculer la hauteur de ce moai arrondie au décimètre.

Calculons $OM$.

* Les points $S$, $R$ et $O$ d'une part et les points $S$, $H$ et $M$, d'autre part, sont alignés dans cet ordre donc nous avons une configuration de Thalès.
* Les angles $\widehat{OMS}$ et $\widehat{RHS}$ sont droits donc $(OM) \parallel (RH)$

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SH}{SM} = \frac{RH}{OM}$$

En procédant à un produit en croix nous en déduisons :

$$SH \times OM = RH \times SM$$

Et donc successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{SH \times OM}{SH} &= \frac{RH \times SM}{SH} \\
OM &= \frac{RH \times (SH + HM)}{SH} \\
&= \frac{(1{,}8 \text{ m}) \times [(1{,}6 \text{ m}) + (2{,}9 \text{ m})]}{1{,}6 \text{ m}} \\
&= \frac{(1{,}8 \text{ m}) \times (4{,}5 \text{ m})}{1{,}6 \text{ m}} \\
&= \frac{1{,}8 \times 4{,}5}{1{,}6} \ \frac{\text{m}^2}{\text{m}} \\
&= 5{,}0625 \text{ m}
\end{aligned}$$

$$\boxed{OM \approx 5{,}1 \text{ m.}}$$

3. Sur l'Île de Pâques, on a répertorié les moais situés à l'intérieur et à l'extérieur de la carrière de Rano Raraku où ils étaient fabriqués. Monsieur Piti a recopié les données de l'UNESCO sur la feuille de calcul d'un tableur.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | Extérieur | Intérieur | Total |
| 2 | Moais couchés (entiers) | 42 | 44 | 86 |
| 3 | Moais couchés et cassés | 23 | 4 | |
| 4 | Moais non terminés | 61 | 38 | |
| 5 | Moais debout | 42 | 21 | |
| 6 | Total | 168 | 107 | |

(a) Quelle formule monsieur Piti a-t-il pu saisir dans la cellule `D2`, pour pouvoir obtenir par étirement vers le bas les valeurs des autres cases de la colonne `D` ?

Formule entrée en `D2` : `B2` + `C2`.

(b) Quel pourcentage les moais non terminés représentent-ils par rapport à l'ensemble de ces moais répertoriés ?

Calculons la proportion, $p_1$, de moais non terminés.

Il y a $61 + 38 = 99$ moais inachevés.
Il y a $168 + 107 = 275$ moais au total.
Donc

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{99}{275} \\ &= 0{,}36 \end{aligned}$$

36 % des moais sont inachevés.

(c) Quel pourcentage les moais couchés (entiers ou cassés) représentent-ils par rapport à l'ensemble des moais répertoriés à l'intérieur de la carrière ?

Calculons la proportion, $p_2$, de moais couchés dans la carrière.

Il y a $44 + 4 = 48$ moais couchés dans la carrière.
Il y a 107 moais au total dans la carrière.

Donc

$$p_2 = \frac{48}{107} \approx 0{,}44{,}86$$

**44,86 % des moais de la carrière sont couchés.**

(d) Monsieur Piti décide de faire photographier par ses 24 élèves les 84 moais debout ou entiers couchés situés à l'extérieur de la carrière. Pour ce faire, il répartit les élèves en groupes. Chaque groupe comporte le même nombre d'élèves et doit photographier le même nombre de moais, chaque moai ne devant être photographié que par un groupe. Quelles sont toutes les possibilités de formation des groupes, et, dans chaque cas, combien de moais chaque groupe devra-t-il photographier ?

- Analyse : supposons qu'il soit possible de faire la répartition proposée par l'énoncé.

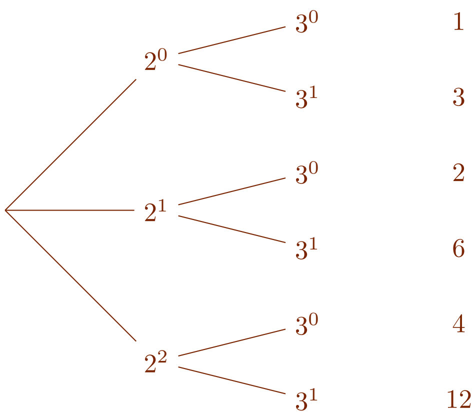
  Notons $n$ le nombre de groupe, $m$ le nombre d'élèves dans un groupe et $p$ le nombre de moais que photographiera chaque groupe.

  Nous avons donc

$$\begin{cases} nm = 24 \\ np = 84 \end{cases}$$

  Ainsi $n$ est un diviseur commune de 224 et 84. Or nous avons les décompositions en facteurs premiers suivantes : $24 = 2^3 \times 3$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ donc $n$ est un diviseur de $2^2 \times 3$.

  Recherchons tous les diviseurs de $2^2 \times 3$ sous forme d'un arbre.

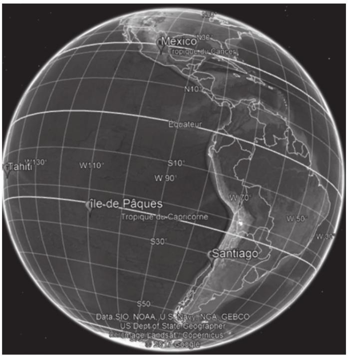


Puisque $m = \frac{24}{n}$ et $p = \frac{84}{2}$ :

| Nombre de groupes $n$ | Nombre d'élèves $m$ | Nombre de moais $p$ |
|---|---|---|
| 1 | 24 | 84 |
| 3 | 8 | 28 |
| 2 | 12 | 42 |
| 6 | 4 | 14 |
| 4 | 6 | 21 |
| 12 | 2 | 7 |

* synthèse. Il est aisé de vérifier que les répartitions indiquées dans le tableau ci-dessus sont réellement possibles.

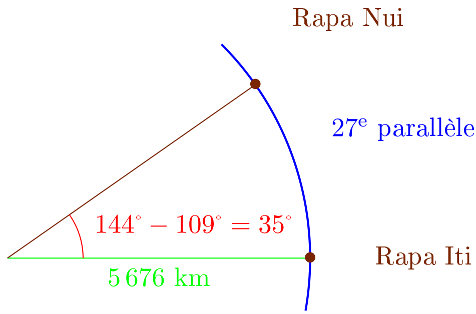
4. On donne les coordonnées géographiques, arrondies au degré :
   — de Tahiti : $(17^\circ\ S; 149^\circ\ O)$ soit en écriture anglo-saxonne $(S\ 17^\circ, W\ 149^\circ)$ ;
   — de l'Île de Pâques : $(27^\circ\ S; 109^\circ\ O)$.




L'Île de Pâques est aussi dénommée, en langue polynésienne, Rapa Nui.
Les premiers habitants de l'Île de Pâques étaient originaires de l'Île de Rapa Iti située dans l'archipel des Australes (Polynésie Française).
Les coordonnées géographiques de l'Île de Rapa Iti sont $(27^\circ\ S; 144^\circ\ O)$.
On souhaite estimer la distance du voyage effectué sur l'Océan Pacifique par ces premiers navigateurs polynésiens.
Estimer la distance entre l'Île de Rapa Iti et l'Île de Rapa Nui en suivant le 27^e^ parallèle sud, sachant que le rayon du 27^e^ parallèle sud est environ 5 676 km.

Déterminons la distance $d$ séparant Rapa Iti de Rapa Nui.

La situation peut être schématisée en dessinant un cercle pour le parallèle.



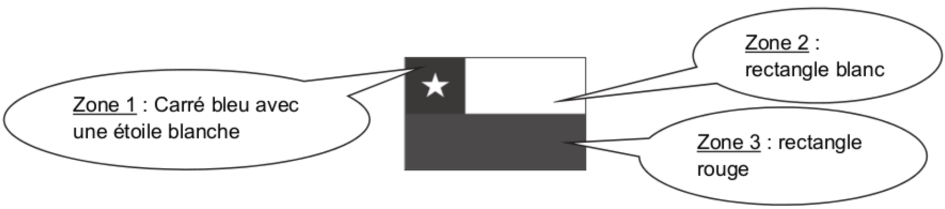

Ainsi la distance entre les deux îles représente une proportion de $\frac{35}{360}$ de la longueur du 27e parallèle qui est un cercle.
Par conséquent

$$\begin{aligned} d &= \frac{35}{360} \times (2\pi 5676 \text{ km}) \\ &= \frac{35}{360} \times 2\pi 5676 \text{ km} \\ &\approx 3467{,}2711 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\boxed{d \approx 3467 \text{ km.}}$$

**Partie B : le drapeau chilien.**

Voici le drapeau du Chili :




Avant de partir, monsieur Piti décide de faire fabriquer, à chacun des 24 élèves, un drapeau en tissu. Il le schématise, comme ci-dessous, par six carrés identiques de 15 cm de côté. L'étoile blanche sera achetée pour être collée par-dessus le carré bleu. Chaque drapeau aura pour dimension 45 cm × 30 cm.

| | | |
|---|---|---|
| bleu | blanc | blanc |
| rouge | rouge | rouge |

1. Calculer la longueur minimum de tissu de chaque couleur à acheter, sachant que le tissu est vendu en rouleau de 90 cm de large. On négligera les petites coutures.

   * Déterminons la longueur de tissu bleu nécessaire.

     $90 = 6 \times 15$ donc sur une largeur de tissu il est possible de découper six carrés.
     Il faudra donc disposer $\frac{24}{6} = 4$ carrés sur la longueur. Ceci représente une longueur de $4 \times 15 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$.

     | |
     |---|
     | Il faudra découper une longueur de 0,60 m de tissu bleu. |

   * Remarquons que la question de découper en petits carrés ou en rectangles la partie rouge du drapeau ne se pose pas puisque les 90 cm sont aussi bien divisible par 15 cm que par 30 cm.
     Puisqu'il y a deux fois plus de carrés blancs que de carrés bleu

     | |
     |---|
     | il faudra découper 1,20 m de tissu blanc. |

   * Puisqu'il y a trois fois plus de carrés rouges que de carrés bleu

     | |
     |---|
     | il faudra découper 1,80 m de tissu rouge. |

2. Les tissus unicolores sont vendus 700 F (Franc Pacifique) le mètre et les étoiles, 250 F l'unité.
   Calculer le coût engendré par la confection des drapeaux des élèves en négligeant le prix du fil.

   Déterminons le coût, $c_D$, de la fabrication des drapeaux.

   Il faut prendre en compte le coût du tissu :

$$
\begin{aligned}
c_T &= [(0{,}60 \text{ m}) + (1{,}20 \text{ m}) + (1{,}80 \text{ m})] \times (700 \text{ F/m}) \\
&= (3{,}60 \text{ m}) \times (700 \text{ F/m}) \\
&= 2\,520 \text{ F}
\end{aligned}
$$

   Mais aussi le coût des étoiles :

$$\begin{aligned} c_E &= 24 \times 250 \text{ F} \\ &= 6\,000 \text{ F} \end{aligned}$$

Finalement le coût total est

$$\begin{aligned} c_D &= c_T + c_E \\ &= (2\,520 \text{ F}) + (6\,000 \text{ F}) \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{c_T = 8\,520 \text{ F}.}$$

**Parie C : dans l'avion.**

Dans l'avion, l'écran du passager indique les informations du vol en direct, en différentes langues et unités. Monsieur Piti compare les données en anglais et en espagnol au même moment :

| *Anglais* | *Espagnol* | *Traduction de M. Piti* |
|---|---|---|
| Ground speed : 530 mph | Velocidad : 853 km/h | Vitesse |
| Altitude : 35 000 ft | Altura : 10 668 m | Altitude |
| Outside air temperature : $-58^\circ$ F | Temperatura exterior : $-50^\circ$ C | Température extérieure |
| Distance to destination : 2497 mi | Distancia asta el destino : 4018 km | Distance restante |
| Local time at destination : 3 : 43 pm | La hora a la destinacion : 15 : 43 | Heure locale à destination |

Monsieur Piti a traduit les mots en français (dernière colonne), mais les unités sont différentes.

1. Quelle est la longueur d'un pied (1 ft) en millimètre ?

   Exprimons un pied en millimètre.

   D'après l'énoncé :

$$35\,000 \text{ ft} = 10\,668 \text{ m}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{35\,000 \text{ ft}}{35\,000} &= \frac{10\,668 \text{ m}}{35\,000} \\
\frac{35\,000}{35\,000} \text{ ft} &= \frac{10\,668}{35\,000} \text{ m} \\
1 \text{ ft} &= 0{,}3048 \text{ m} \\
1 \text{ ft} &= 0{,}3048 \times 1000 \text{ mm}
\end{aligned}$$

$$\boxed{1 \text{ ft} = 304{,}8 \text{ mm.}}$$

2. Si l'avion gardait cette vitesse constante, à quelle heure arriverait-il ?

Déterminons l'heure d'arrivée.

Nous connaissons la vitesse de l'avion et la distance qu'il doit parcourir, par conséquent la durée du trajet restant est

$$\begin{aligned}
d_r &= \frac{4\,018 \text{ km}}{853 \text{ km/h}} \\
&= \frac{4\,018}{853} \; \frac{\text{km}}{\text{km} \cdot \text{h}^{-1}} \\
&= \frac{4\,018}{853} \text{ h} \\
&= \left(4 + \frac{606}{853}\right) \text{ h} \\
&= (4 \text{ h}) + \left(\frac{606}{853} \times 60 \text{ min}\right) \\
&\approx (4 \text{ h}) + (43 \text{ min})
\end{aligned}$$

Par conséquent l'heure à l'arrivée sera, en arrondissant à la minute :

$$\begin{aligned}
(15 \text{ h}) + (43 \text{ min}) + (4 \text{ h}) + (43 \text{ min}) &= [(15 + 4) \text{ h}] + [(43 + 43) \text{ min}] \\
&= (19 \text{ h}) + (86 \text{ min}) \\
&= (19 \text{ h}) + [(1 \times 60 + 26) \text{ min}] \\
&= (19 \text{ h}) + (1 \text{ h}) + (26 \text{ min})
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Lorsqu'ils arriveront l'heure locale sera : 20 h et 26 min.}}$$

3. Soit la fonction qui à la mesure, en degré Fahrenheit ($^\circ F$), d'une température associe la mesure $f(t)$, en degré Celsius ($^\circ C$), de cette température. On admet que $f$ est une fonction affine dont une expression est de la forme $f(t) = \frac{5}{9}t+b$, où $b$ est une constante.

   Contrairement à la question I.C.1, nous ne pouvons pas passer d'une unité à l'autre. En effet il n'y a pas proportionnalité entre les degrés Celsius et Fahrenheit. Le terme « degré » et le symbole $^\circ$sont là pour nous en avertir. Il ne s'agit pas d'unités mais d'échelles de mesure. Autrement dit le zéro est choisi de façon arbitraire.
   La seule unité (au sens du système international) de mesure de température est le kelvin noté K sans le $^\circ$. Dans ce cas le zéro correspond au zéro absolu c'est-à-dire le niveau d'énergie (et donc d'agitation) minimal au niveau atomique.

   (a) Montrer que la valeur de la constante $b$ est égale à $-\frac{160}{9}$.

   Nous pourrions nous contenter de vérifier que la valeur proposée pour $b$ convient mais nous allons la déterminer comme si elle ne nous était pas donnée par l'énoncé.

   Déterminons $b$.

   Du fait de la définition de $f$ donnée dans l'énoncé nous devons avoir :

$$f(-58) = -50$$

   ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{5}{9} \times (-58) + b = -50$$
$$-\frac{290}{9} + b = -50$$
$$-\frac{290}{9} + b + \frac{290}{9} = -50 + \frac{290}{9}$$

   Enfin

$$\boxed{b = -\frac{160}{9}.}$$

(b) Pour quelles températures les mesures en degré Celsius et en degré Fahrenheit sont-elles égales ?

Interprétons la question posée par une équation.

Résolvons l'équation $f(t) = t$ d'inconnue $t$ un nombre réel.

$$f(t) = t \Leftrightarrow \frac{5}{9}t - \frac{160}{9} = t$$

Nous reconnaissons une équation inéaire du premier degré que nous résoudrons donc en isolant l'inconnue :

$$\begin{aligned}
f(t) = t &\Leftrightarrow \frac{5}{9}t - \frac{160}{9} - t = t - t \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{5}{9} - 1\right)t - \frac{160}{9} = 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{4}{9}t - \frac{160}{9} + \frac{160}{9} = 0 + \frac{160}{9} \\
&\Leftrightarrow -\frac{4}{9}t = \frac{160}{9} \\
&\Leftrightarrow \frac{-\frac{4}{9}t}{-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{160}{9}}{-\frac{4}{9}} \\
&\Leftrightarrow t = -\frac{160}{9} \times \frac{9}{4} \\
&\Leftrightarrow t = -40
\end{aligned}$$

Les deux échelles de mesure de température coïncident pour une température de $-40^{\circ}$ (Celsius ou Fahrenheit).

(c) Les mesures en degré Celsius et en degré Fahrenheit sont-elles proportionnelles ?

Nous pourrions choisir deux températures distinctes et vérifier qu'il n'y a pas proportionnalité entre les mesures en degrés Celsius et Fahrenheit de ces deux températures. Nous allons privilégier un argument classique en collège.

$f$ est une fonction affine mais n'est pas une fonction linéaire ($b \neq 0$), elle ne modélise donc pas une situation de proportionnalité.

Les mesures en degrés Celsius et Fahrenheit ne sont pas proportionnelles.

(d) Trouver une formule pour convertir les degrés Celsius $t_C$ en degrés Fahrenheit $t_F$.

Exprimons $t_F$ en fonction de $t_C$.

Nous avons

$$f(t_F) = t_C$$

Autrement dit :

$$\frac{5}{9}t_F - \frac{160}{9} = t_C$$

Dans la précédente égalité nous allons isoler $t_F$ comme si nous résolvions l'équation d'inconnue $t_F$.

$$\begin{aligned}
\frac{5}{9}t_F - \frac{160}{9} = t_C &\leftrightarrow \frac{5}{9}t_F - \frac{160}{9} + \frac{160}{9} = t_C + \frac{160}{9} \\
&\Leftrightarrow \frac{5}{9}t_F = t_C + \frac{160}{9} \\
&\Leftrightarrow \frac{9}{5} \times \frac{5}{9}t_F = \frac{9}{5} \times \left(t_C + \frac{160}{9}\right) \\
&\Leftrightarrow t_F = \frac{9}{5}t_C + \frac{9}{5} \times \frac{160}{9}
\end{aligned}$$

Ainsi

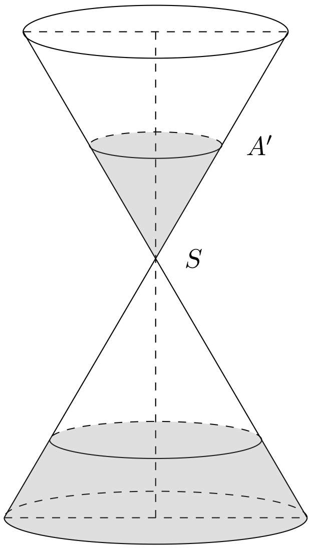
$$t_F = \tfrac{9}{5}t_C + 32.$$

# II Deuxième partie (13 points).

*Cette partie est composée de trois exercices indépendants.*

**Exercice 1.**

Un sablier est constitué de deux cônes identiques superposés comme sur le schéma ci-dessous.




Le sable est modélisé par les parties grisées. Il s'écoule au niveau du point $S$.

Dans les parties supérieure et inférieure du sablier, les surfaces supérieures des parties grises sont considérées horizontales et parallèles aux bases des cônes.

Le cône du haut a pour diamètre 5 cm et pour hauteur 12 cm.

1. (a) Calculer l'aire de la base du cône du haut, arrondie au millimètre carré près.

   Calculons l'aire, $\mathscr{A}_1$, de la base du cône.

   La base du cône est un disque de diamètre 5 cm donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_1 &= \pi \left(\frac{5\text{ cm}}{2}\right)^2 \\
&= \pi \times 2{,}5^2\text{ cm}^2 \\
&= \frac{25}{4}\pi\text{ cm}^2 \\
&\approx 19{,}634954\text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Arrondir au millimètre carré signifie ici arrondir à la seconde décimale car $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$.

$$\mathscr{A}_1 \approx 19{,}63 \text{ cm}^2.$$

(b) Calculer le volume du cône du haut, arrondi au millimètre cube près.

Rappel de la formule du volume du cône :
Volume du cône : $V = \dfrac{1}{3} \times \textit{aire de la base} \times \textit{hauteur}$.

Déterminons le volume, $\mathscr{V}_1$, du cône du haut.

En utilisant la formule rappelée dans l'énoncé et en utilisant les calculs de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_1 &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{25}{4}\pi \text{ cm}^2\right) \times (12 \text{ cm}) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{25}{4}\pi \times 12 \text{ cm}^3 \\
&\approx 78{,}53981 \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

Arrondir au millimètre cube signifie ici arrondir à la troisième décimale.

$$\mathscr{V}_1 \approx 78{,}540 \text{ cm}^3.$$

2. On s'intéresse à la position obtenue à un instant donné et représentée sur le schéma ci-dessus : le niveau de sable est tel que $A'$ est le milieu du segment $[AS]$.

(a) Le cône de sable restant dans le cône du haut est une réduction du cône du haut.
Calculer son volume, arrondi au millimètre cube près.

Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ du volume du cône de sable.

Puisque le cône de sable est une réduction à $\frac{1}{2}$ du cône du haut

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \mathscr{V}_1 \\
&\approx \frac{1}{2^3} \times 78{,}540 \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V} \approx 9{,}844\ \text{cm}^3.}$$

(b) On admet que le volume de sable descendu est proportionnel au temps écoulé. Tout le sable s'écoule en 4 minutes. Au départ le cône du haut était entièrement rempli de sable.
Au bout de combien de temps le sable est-il dans la position représentée sur le schéma ci-dessus, avec $A'$ milieu du segment $[AS]$ ?

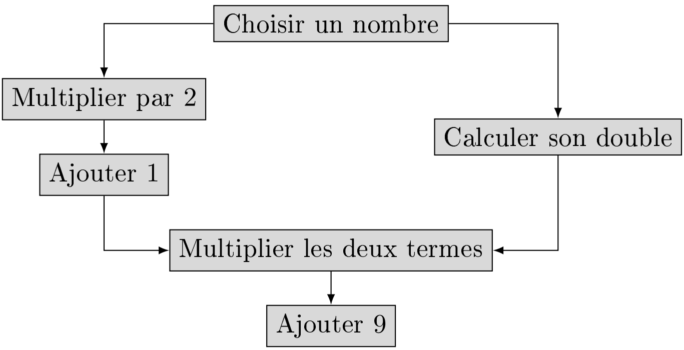
Déterminons le temps mis pour arriver à la position représentée.

D'après la question précédente $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ du volume de départ reste dans le sablier autrement dit $\frac{7}{8}$ du sable s'est déjà écoulé.
Puisque le volume de sable et le temps écoulés sont proportionnels cela signifie qu'il s'est déjà écoulé $\frac{7}{8} \times 4\ \text{min} = 3{,}5\ \text{min}$.
Autrement dit :

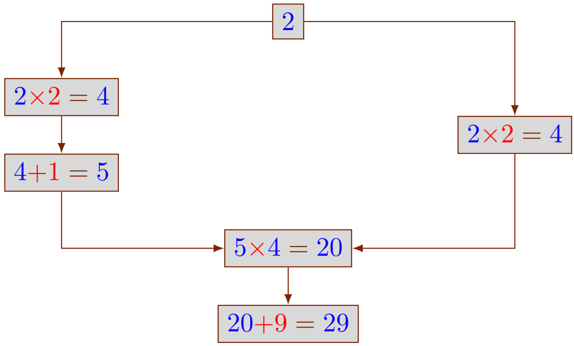
la position représentée est atteinte au bout de trois minutes et trente secondes.

**Exercice 2.**

1. Voici un programme de calcul :

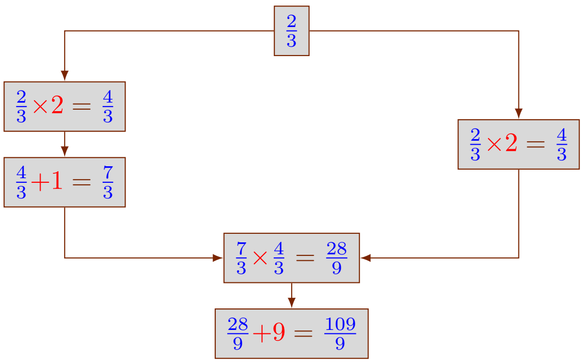



(a) Effectuer le programme de calcul en choisissant 2 comme nombre de départ et montrer qu'on obtient 29.



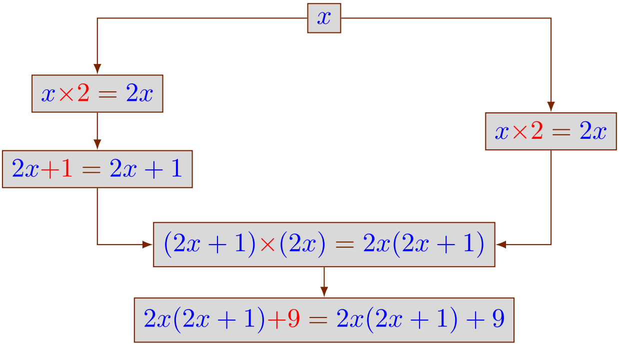

Si l'on entre 2 le programme renvoie 29.

(b) Quel résultat obtient-on en choisissant $\dfrac{2}{3}$ comme nombre de départ ?



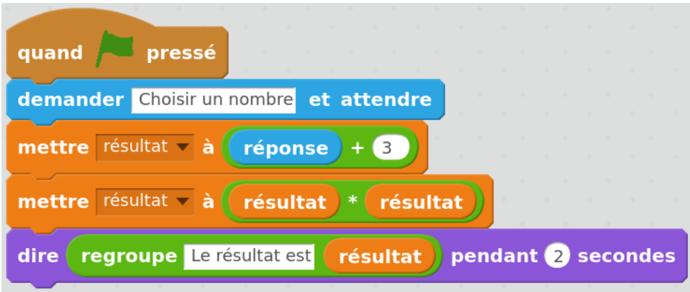

Si l'on entre $\frac{2}{3}$ alors le programme renvoie $\frac{109}{9}$.

(c) Exprimer le résultat obtenu avec ce programme de calcul en prenant $x$ nombre de départ.




Si l'on entre $x$ alors le programme renvoie $2x(2x+1)+9$.

2. On teste un autre programme de calcul avec le logiciel Scratch :




(a) Effectuer le programme de calcul en choisissant 2 comme nombre de départ et montrer qu'on obtient 25.

Construisons le tableau des variables de ce programme avec 2 en entrée.

| Instruction | réponse | résultat |
|---|---|---|
| 1 | 2 | |
| 2 | 2 | $2+3=5$ |
| 3 | 2 | $5 \times 5 = 25$ |

En faisant tourner ce programme avec 2 en entrée nous obtenons 25 en sortie.

(b) Quel résultat obtient-on en choisissant 1,5 comme nombre de départ ?

Construisons le tableau des variables de ce programme avec 1,5 en entrée.

| Instruction | réponse | résultat |
|---|---|---|
| 1 | 1,5 | |
| 2 | 2 | $1{,}5 + 3 = 4{,}5$ |
| 3 | 2 | $4{,}5 \times 4{,}5 = 20{,}25$ |

En faisant tourner ce programme avec 1,5 en entrée nous obtenons 20,25 en sortie.

(c) Exprimer le résultat obtenu avec ce programme de calcul en prenant $x$ comme nombre de départ.

Construisons le tableau des variables de ce programme avec $x$ en entrée.

| Instruction | réponse | résultat |
|---|---|---|
| 1 | $x$ | |
| 2 | 2 | $x + 3 = x + 3$ |
| 3 | 2 | $(x+3) \times (x+3) = (x+3)^2$ |

En faisant tourner ce programme avec 2 en entrée nous obtenons 25 en sortie.

3. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $x$ les deux programmes donnent le même résultat. Justifier la réponse.

Ces deux programmes renvoie la même réponse en entrant $x$ si et seulement si : $2x(2x+1)+9 = (x+3)^2$.

Résolvons cette équation.

$$2x(2x+1)+9 = (x+3)^2$$

équivaut successivement à

$$2x \times 2x + 2x \times 1 + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$$
$$4x^2 + 2x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

Il ne s'agit *a priori* pas d'une équation linéaire nous allons donc essayer de nous ramener à une équation produit-nul :

$$\begin{aligned}
4x^2+2x+9-(x^2+6x+9) &= x^2+6x+9-(x^2+6x+9)\\
4x^2+2x+9-(x^2+6x+9) &= 0\\
4x^2+2x+9-x^2-6x-9 &= 0\\
3x^2-4x &= 0\\
3x\times x-6x &= 0\\
(3x-4)x &= 0\\
3x-4=0 \quad &\text{ou} \quad x=0\\
3x=4 \quad &\text{ou} \quad x=0\\
x=\frac{4}{3} \quad &\text{ou} \quad x=0
\end{aligned}$$

Les deux programmes renvoient la même valeur lorsqu'on choisi en entrée $\frac{4}{3}$ ou 0.

**Exercice 3.**

Un professeur a donné un contrôle commun à trois de ses classes. Avant de rendre les copies à ses élèves, il a fait quelques calculs statistiques à partir de leurs notes.

1. Pour la classe A qui comptent 24 élèves, il a relevé les informations suivantes :

| Note minimale | Médiane | Moyenne | Étendue |
|---|---|---|---|
| 5 | 11 | 12 | 14 |

Dire si chacune des affirmations ci-dessous est vraie ou fausse, en justifiant les réponses.

(a) « La note maximale est 20. »

La note minimale est 5 et l'étendue est 14 donc la note maximale est $5+14=19$.

L'affirmation est fausse.

(b) « Si on enlève une copie avec la note maximale et une copie avec la note minimale, la moyenne des notes restantes augmente. »

$\frac{5+19}{2} = 12$ donc enlever ces deux notes ne modifiera pas la moyenne. Détaillons cela.

Calculons la moyenne $\overline{x}$ obtenue en enlevant la meilleur et la moins bonne note.

Puisque la moyenne des 24 élèves est 12, que la moins bonne note est 5 t la meilleur 19, nous avons

$$\frac{22\overline{x} + 5 + 19}{24} = 12$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 24 \times \frac{22\overline{x} + 24}{24} &= 24 \times 12 \\ 22\overline{x} + 24 &= 288 \\ 22\overline{x} + 24 - 24 &= 288 - 24 \\ 22\overline{x} &= 264 \\ \frac{22\overline{x}}{22} &= \frac{264}{22} \\ \overline{x} &= 12 \end{aligned}$$

L'affirmation est fausse.

(c) « Au moins la moitié des élèves ont une note de 12 ou plus. »

La médiane est de 11 donc la moitié des élèves ont eu une note supérieure ou égale à 11.

L'affirmation est fausse.

2. La classe B compte 16 filles et 11 garçons. À ce contrôle, la moyenne des filles est de 11,7 et celle des garçons de 10,3.
Quelle est la moyenne des notes des élèves de la classe B à ce contrôle ? Arrondir le résultat au dixième.

Comme précédemment il faut faire une moyenne des moyennes.

Calculons la moyenne $\overline{x}_B$ de la classe $B$.

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{16 \times 11{,}7 + 11 \times 10{,}3}{16 + 11} \\ &\approx 11{,}129 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x}_B \approx 11{,}1.}$$

3. La classe C compte 32 élèves. Le professeur a calculé la moyenne des notes des élèves des deux classes A et C. Cette moyenne est de 11,2.
   Quelle est la moyenne des notes des élèves de la classe $C$ à ce contrôle ?

   Là encore c'est une moyenne de moyennes.

   Calculons la moyenne $\overline{x}_C$ de la classe $C$.

   Nous savons que

$$\frac{24 \times 12 + 32 \times \overline{x}_C}{24 + 32} = 11{,}2$$

   Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{288 + 32\overline{x}_C}{56} &= 11{,}2 \\ 56 \times \frac{288 + 32\overline{x}_C}{56} &= 56 \times 11{,}2 \\ 288 + 32\overline{x}_C &= 627{,}2288 + 32\overline{x}_C - 288 \qquad = 627{,}2 - 288 \\ 32\overline{x}_C &= 339{,}2 \\ \frac{32\overline{x}_C}{32} &= \frac{339{,}2}{32} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x}_C = 10{,}6.}$$

# III Troisième partie (14 points).

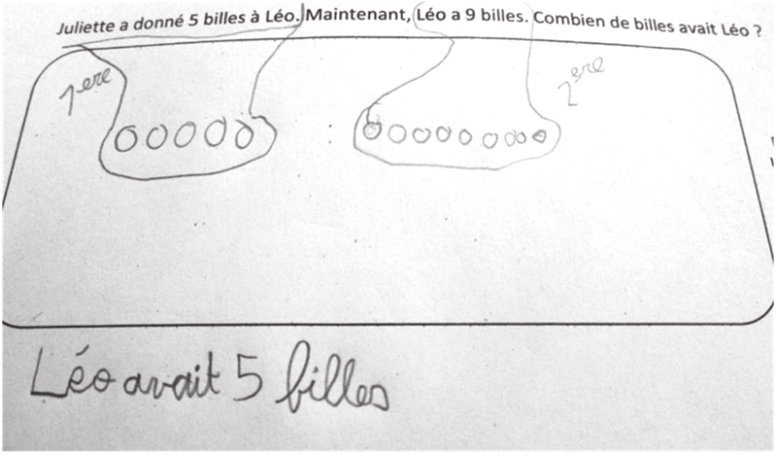
*Cette partie est composée de trois situations indépendantes.*

**Situation 1.**

Le problème suivant est proposé à des élèves de CP :

« Juliette a donné 5 billes à Léo. Maintenant Léo a 9 billes. Combien de billes avait Léo ? »

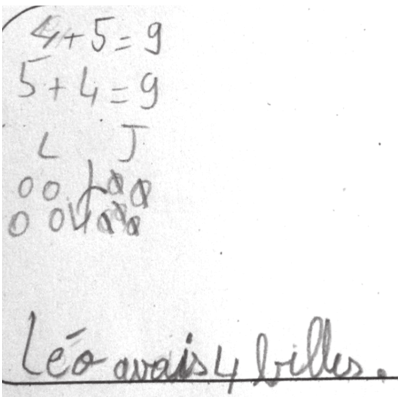
1. Voici la production de l'élève 1.




   (a) Comment interpréter les traces écrites de l'élève 1 en termes de compréhension de la situation ?

   (b) Donner deux exemples d'aides qui pourraient-être apportées à cet élève.

2. Voici la production de l'élève 2.



Cette production comporte à la fois des calculs et un schéma.

Comment interpréter ces traces écrites en termes de maîtrise, par l'élève 2, des compétences mathématiques : modéliser et représenter ?

3. En fin de CP, on propose le problème suivant : « Juliette a donné 35 billes à Léo. Maintenant Léo a 52 billes. Combien de billes avait Léo ? ».

   Proposer une représentation de cette situation qui pourrait être enseignée à des élèves de CP pour les aider à résoudre le problème.

### Situation 2.

On a proposé à des élèves de cycle 3 les trois problèmes suivants :

**Problème 1**
Tom ramasse les œufs de ses poules. Ce matin, les poules ont pondu 39 œufs.
Il les range dans des boites de 12 œufs.
Combien de boites entières pourra-t-il remplir ?

**Problème 2**
Lucie vient de dépenser 39 € pour acheter 12 brioches.
Quel est le prix d'une brioche ?

**Problème 3**
Au parc d'attraction, 39 personnes sont montées dans un petit train. Chaque wagonnet comporte 12 places et sont tous remplis au maximum sauf le dernier.

1. Combien y a-t-il de wagonnets dans ce train ?
2. Combien reste-t-il de places libres dans le dernier wagonnet ?

Voici la production d'Ethan :

**Problème 1**

Je cherche combien de boîties ont pourra remplir :
39 : 12 = 3,~~2~~

Il pourra faire 3 boites de 12 oeufs.

**Problème 2**

Je cherche le prise d'une brioche.
39 : 12 = 3

$$\begin{array}{r|l} 39 & 12 \\ -\ 36 & 3 \\ \hline 03 & \end{array}$$

une brioche coûte 3 € 03 centimes

**Problème 3**

1. Je cherche combien il y a de wagonnet dans ce train
39 : 12 = 3
Il y a 3 wagonnet au total dans ce train
2. Je cherche combien il reste de places dans le dernier wagonnet
39 : 12 = 3 reste 3
Il reste 3 places libres dans le dernier wagonnet.

1. Pour chaque problème, analyser la procédure mise en œuvre par Ethan puis repérer les erreurs et les réussites.
2. Donner un exemple de ce que l'enseignant pourrait proposer à Ethan pour qu'il prenne conscience que la réponse qu'il donne pour le problème 2 est erronée ?
3. De même, donner un exemple de ce que l'enseignant pourrait proposer à Ethan pour lui faire prendre conscience de ses erreurs pour la résolution du problème 3 ?

### Situation 3.

Voici un exercice proposé à des élèves de CM2.

> Utilise les carreaux de la feuille pour représenter les nombres fractionnaires suivants sur une demi-droite graduée :
>
> $$\frac{2}{5} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{15}{10} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{4}{10} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{10}$$

1. Citer deux objectifs d'apprentissage que l'on peut associer à cet exercice.

2. Citer deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour placer le nombre $\frac{1}{2}$ ?

3. Citer deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour placer le nombre $\frac{7}{5}$.

Dans la même séance, les élèves ont à réaliser l'exercice suivant :

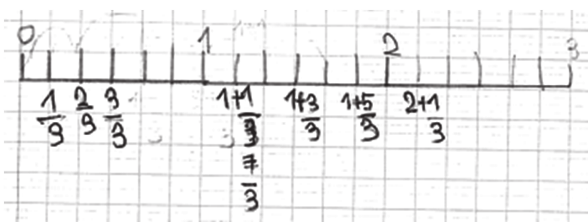
> Utilise les carreaux de la feuille pour représenter les nombres suivants :
>
> $$1+\frac{1}{3} \qquad \frac{3}{3} \qquad 2+\frac{1}{3} \qquad 1+\frac{3}{3} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{2}{3} \qquad 1+\frac{5}{3} \qquad \frac{7}{3}$$

Pour avoir un axe plus lisible, le professeur ajoute la consigne suivante : « Vous prendrez 6 carreaux pour l'unité ».

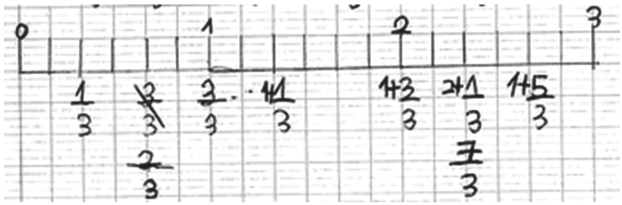
Voici les productions de 3 élèves de la classe :

Élève 1

Élève 2



Élève 3




4. Comparer les productions des élèves 1 et 3. Quelles sont les compétences acquises par chacun d'eux ?

5. (a) Analyser la production de l'élève 2.

   (b) Proposer un exemple d'une aide que l'enseignant peut apporter à cet élève pour lui faire prendre conscience de ses erreurs ?

6. Le professeur a ajouté la consigne « Vous prendrez 6 carreaux pour l'unité ». Était-ce une bonne initiative ? Justifier votre réponse.