Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 3.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Partie A : le grillage et le potager.

1. (a) Supposons que $AG = 5$ m et démontrons qu'alors la longueur, $\ell(AG)$, du grillage est 22 m.

Nous remarquons que $\ell(AG) = PF + EF$.

* Déterminons AE.
L'aire $AEFG$ est de 90 m^2 donc :

$$\mathscr{A}(AEFG) = 90 \text{ m}^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} AG \times AE &= 90 \text{ m}^2 \\ (5 \text{ m}) \times AE &= 90 \text{ m}^2 \\ \frac{(5 \text{ m}) \times AE}{5 \text{ m}} &= \frac{90 \text{ m}^2}{5 \text{ m}} \\ AE &= 18 \text{ m} \end{aligned}$$

* Déterminons PF.

$$\begin{aligned} PF &= AE - (1 \text{ m}) \\ &= (18 \text{ m}) - (1 \text{ m}) \\ &= 17 \text{ m} \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $AG = EF = 5$ m nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \ell(AG) &= PF + EF \\ &= (17 \text{ m}) + (5 \text{ m}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } AG = 5 \text{ m alors } \ell(AG) = 22 \text{ m.}}$$

(b) En procédant comme à la question précédente :

$$\begin{aligned}\ell(AG) &= PF + EF\\ &= \frac{90}{7{,}5} - 1 + 7{,}5 \text{ m}\end{aligned}$$

Si $AG = 7{,}5$ m alors $\ell(AG) = 18{,}5$ m.

2. (a) Si $AG = x$ alors, en reprenant le raisonnement de la question 1.(a) nous obtenons bien :

$L(x) = x + \frac{90}{x} - 1.$

(b) i. Pour $x = 2$: $2 + \frac{89}{2} = 47{,}5$ et $L(2) = 2 + \frac{90}{2} - 1 = 46$.

ii. Soit $x \in [5; 20]$.

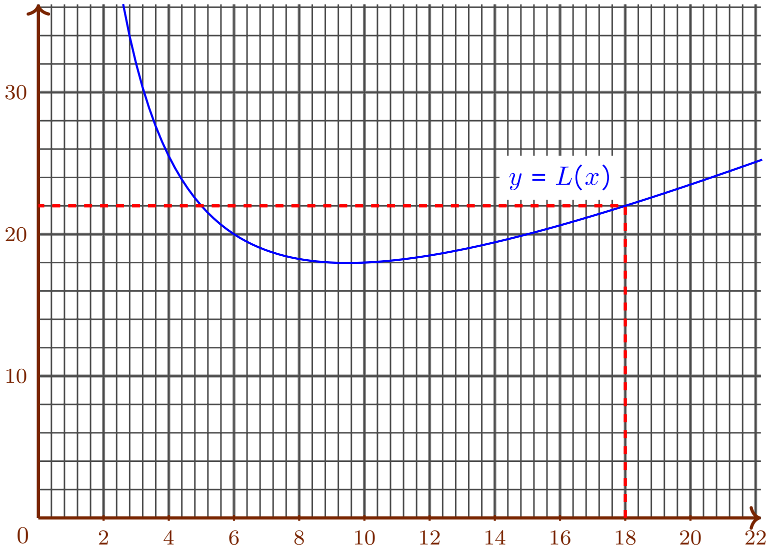
$$\begin{aligned}L(x) &= x + \frac{90}{x} - 1\\ &= x + \frac{90}{x} - \frac{1\times x}{x}\\ &= x + \frac{90 - x}{x}\end{aligned}$$

iii. Soit $x \in [5; 20]$.
En reprenant le précédent calcul :

$$\begin{aligned}L(x) &= x + \frac{90 - x}{x}\\ &= \frac{x\times x}{x} + \frac{90 - x}{x}\\ &= \frac{x^2 - x + 90}{x}\end{aligned}$$

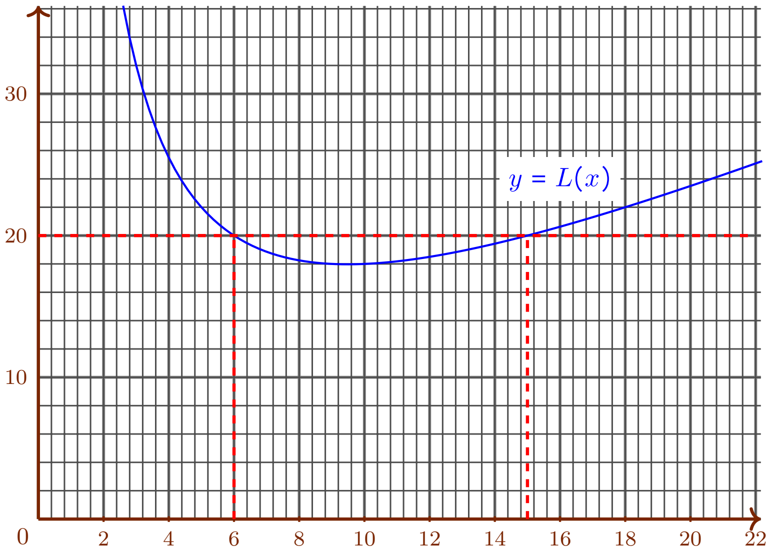
iv. Pour $x = 2$: $\frac{2^2+89}{2} = 47{,}5$ alors que $L(2) = 46$.

Seules ii. et iii. sont d'autres expressions de $L(x)$.



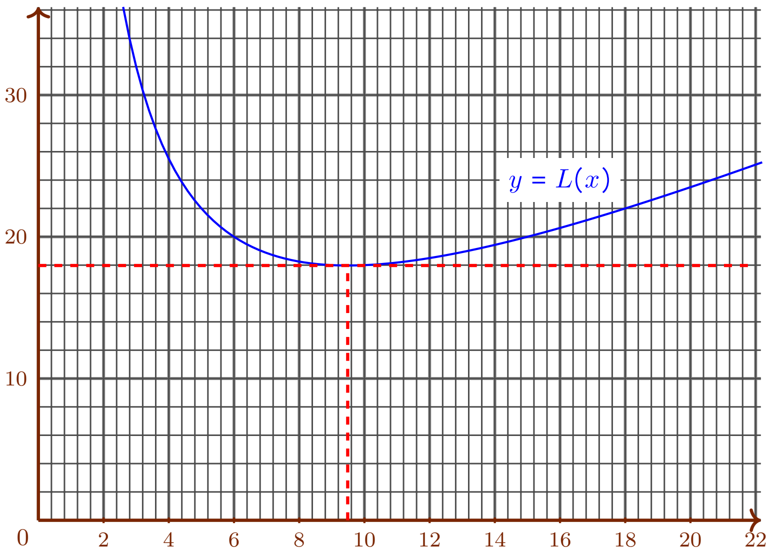
3. (a)

$L(18) = 22$ donc le grillage mesure 22 m.



(b)

Le grillage mesure 22 m si l'on choisit $AG = 6$ m ou $AG = 15$ m.



(c)

Le grillage semble minimal lorsque $AG = 8{,}16$ m.

Partie B : le compost et le potager.

1. Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ du bac.

   Le bac ayant la forme d'un parallélépipède rectangle son volume s'obtient comme le produit des longueur, largeur et hauteur :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= (1{,}2 \text{ m}) \times (1{,}6 \text{ m}) \times (1{,}6 \text{ m}) \\ &= 1{,}2 \times 1{,}6 \times 1{,}6 \text{ m} \cdot \text{m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$\mathscr{V}_1 = 3{,}072 \text{ m}^3$.

2. (a) Calculons le volume, $\mathscr{V}_2$, de compost au bout de un mois.

En un mois le volume diminue de 20 % le coefficient multiplicateur correspondant est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-20}{100} \\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Nous en déduisons le volume au bout d'un mois :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_2 &= CM \times \mathscr{V}_1 \\ &= 0{,}8 \times 3{,}072 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_2 = 2{,}4576 \text{ m}^3.}$$

(b) La formule à saisir en `C2` est

$$\boxed{= 0{,}8 * \texttt{B2}.}$$

(c) Calculons le volume $\mathscr{V}_3$ correspondant à parallélépipède rectangle de surface au sol 40 m^2 et de hauteur 3 cm.

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_3 &= (3 \text{ cm}) \times (40 \text{ m}) \\ &= 3 \times 40 \text{ cm} \cdot \text{m}^2 \\ &= 120 \times \frac{1}{100} \text{ m} \cdot \text{m}^3 \\ &= \frac{120}{100} \text{ m}^3 \\ &= 1{,}2 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Or au bout de cinq mois le volume de compost n'est, d'après le tableur, que de 1,0066 m^3 donc

il n'y a pas assez de compost pour en épandre comme souhaité.

Partie C : achat des graines à planter.

1. Déterminons le nombre de plants achetés avec 30 € de 40 plants.

Tarif A. 40 plants remplissent $\frac{40}{5} = 8$ barquettes. Le coût sera donc de $8 \times (1{,}20 \text{ €}) = 8 \times 1{,}20 \text{ €} = 9{,}6 \text{ €}$.

Tarif B. 40 plants sont insuffisants pour bénéficier de la réduction. Leur coût sera donc de $40 \times (0{,}25 \text{ €}) = 40 \times 0{,}25 \text{ €} = 10 \text{ €}$.

Tarif C. Chaque plant coûtant 40 € et tenant compte du coût de la carte de fidélité, le coût sera de : $(3 \text{ €}) + 40 \times (0{,}20 \text{ €}) = (3 + 40 \times 0{,}20) \text{ €} = 11 \text{ €}$.

Pour 40 plants le tarif A est plus avantageux.

2. Déterminons le nombre de plants achetés avec 30 €.

Tarif A. Avec 30 € il est possible d'acheter $\frac{30 \text{ €}}{1{,}20 \text{ €}} = 25$ barquettes ce qui correspond à $25 \times 5 = 125$ plants.

Tarif B. Supposons qu'avec 30 € le nombre de plants est strictement inférieur à 50 alors le nombre de plants est précisément : $\frac{30 \text{ €}}{0{,}25 \text{ €}} = 120$. Ceci contredit notre hypothèse que le nombre de plants vendus est strictement inférieur à 50.

Supposons donc dorénavant que le nombre de plants obtenus avec 30 € est supérieur à 50.
Une diminution de 5 % correspond à un coefficient multiplicateur de

$$\begin{aligned} CM_2 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-5}{100} \\ &= 0{,}95 \end{aligned}$$

Donc chaque plant est payé $0{,}95 \times (0{,}25 \text{ €}) = 0{,}2375 \text{ €}$.
Par conséquent avec 30 € le nombre de plants achetés est : $\frac{30 \text{ €}}{0{,}2375 \text{ €}} \approx 126{,}3157$. Autrement dit 126 plants.

Tarif C. Notons x le nombre de plants acheté.
Nous avons

$$0{,}2x + 3 = 30$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
0{,}2x + 3 - 3 &= 30 - 3 \\
0{,}2x &= 27 \\
\frac{0{,}2x}{0{,}2} &= \frac{27}{0{,}2} \\
x &= 135
\end{aligned}$$

Avec 30 euro il est possible d'acheter 135 plants.

Pour 30 € le tarif C permet d'acheter le plus de plants.

3. Comparons les coûts pour les tarifs B et C pour x plants vendus avec $0 \leqslant x$.

   Raisonnons par disjonction des cas suivant que x est plus petit ou plus grand que 50.

   * Supposons tout d'abord que $0 \leqslant x < 50$.
     Pour le tarif B le coût exprimé en euro est : $\mathcal{C}_B(x) = 0{,}25x$.
     Pour le tarif C le coût exprimé en euro est : $\mathcal{C}_C(x) = 0{,}2x + 3$.
     Dire que le coût avec le tarif B est inférieur au coût avec C équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_B(x) &\leqslant \mathcal{C}_C(x) \\
0{,}25x &\leqslant 0{,}2x + 3 \\
0{,}25x - 0{,}2x &\leqslant 0{,}2x + 3 - 0{,}2x \\
0{,}05x &\leqslant 3 \\
\frac{0{,}05x}{0{,}05} &\leqslant \frac{3}{0{,}05} \quad \text{car } 0{,}05 > 0 \\
x &\leqslant 60
\end{aligned}$$

     Ce qui est toujours vrai puisque nous sommes dans le cas $x \leqslant 50$.

   * Supposons maintenant que $50 \leqslant x$.
     Pour le tarif B le coût exprimé en euro est donc : $\mathcal{C}_B(x) = 0{,}2375x$.

Pour le tarif C le coût exprimé en euro est encore : $\mathcal{C}_C(x) = 0{,}2x + 3$.
Dire que le coût avec le tarif B est inférieur au coût avec C équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_B(x) &\leqslant \mathcal{C}_C(x) \\
0{,}2375x &\leqslant 0{,}2x + 3 \\
0{,}2375x - 0{,}2x &\leqslant 0{,}2x + 3 - 0{,}2x \\
0{,}0375x &\leqslant 3 \\
\frac{0{,}0375x}{0{,}0375} &\leqslant \frac{3}{0{,}0375} \quad \text{car } 0{,}0375 > 0 \\
x &\leqslant 80
\end{aligned}$$

Ainsi le coût avec le tarif B reste inférieur tant que l'on achète moins de 80 plants de salade.

À partir de 80 plants de salade le tarif C est plus avantageux.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Considérons le tableau d'état des variables.

	réponse	x	y	x * y
demander [Donne moi un nombre] et attendre	5			
mettre [x] à (6) + (réponse)	5	$5 + 6 = 11$		
mettre [y] à (3) * (réponse)	5	11	$3 \times 5 = 15$	
dire (x) * (y) pendant (20) secondes	5	11	15	$11 \times 15 = 165$

Si l'utilisateur entre 5 le lutin dira 165.

2. Considérons le tableau d'état des variables.

	réponse	x	y	x * y
demander Donne moi un nombre et attendre	$2+\frac{7}{10}=\frac{27}{10}$			
mettre x à 6 + réponse	$\frac{27}{10}$	$6+\frac{27}{10}=\frac{87}{10}$		
mettre y à 3 * réponse	$\frac{27}{10}$	$\frac{87}{10}$	$3\times\frac{27}{10}=\frac{81}{10}$	
dire x * y pendant 20 secondes	$\frac{27}{10}$	$\frac{87}{10}$	$\frac{81}{10}$	$\frac{87}{10}\times\frac{81}{10}=\frac{7047}{100}$

Si l'utilisateur entre $2+\frac{7}{10}$ le lutin dira $\frac{7047}{100}$.

3. Déterminons la valeur z entrée dans « réponse ».

Si nous reprenons le tableau d'état des variables :

	réponse	x	y	x * y
demander Donne moi un nombre et attendre	z			
mettre x à 6 + réponse	z	$6+z$		
mettre y à 3 * réponse	z	$6+z$	$3z$	
dire x * y pendant 20 secondes	z	$6+z$	$3z$	$(6+z)\times 3z$

Ainsi le nombre retourné est 0 si et seulement si :

$$(6+z)3z=0$$

Ceci équivaut successivement à :

$$6+z=0 \quad \text{ou} \quad 3z=0$$
$$z=-6 \quad \text{ou} \quad z=0$$

Pour que le nombre retourné soit 0 il faut et il suffit que les nombres entrés soient 0 ou -6.

Exercice 2.

1. Schématisons le lancer d'Arthur avec un tableau double entrée que nous remplirons des sommes des chiffres affichés par les deux dés.

Pour Arthur :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Pour Juliette :

	1	3	3	4	6	8
1	2	4	4	5	7	9
2	3	5	5	6	8	10
2	3	5	5	6	8	10
3	4	6	6	7	9	11
3	4	6	6	7	9	11
4	5	7	7	8	10	12

Ω_A est l'ensemble des couples de chiffres obtenus (en distinguant toutes les faces par un coloriage par exemple) pour Arthur.
De même pour Ω_J.
Les dés étant équilibrés il est raisonnable de faire l'hypothèse que chaque couple de faces représenté par une case du tableau à la même probabilité qu'un autre couple. Il y a équiprobabilité entre les couples. Et dans les deux cas, Arthur ou Juliette, l'univers comporte 36 issues.

Notons A_5 (resp. J_5) l'événement « Arthur (resp. Juliette) obtient un 5 ».

Calculons $\mathbb{P}(A_5)$ (resp. $\mathbb{P}(J_5)$).

I y a équiprobabilité entre les couples. A_5 (resp. J_5) est réalisé par 4 (resp. 6) issues. L'univers comporte 36 issues. Nous en déduisons :

$$\mathbb{P}(A_5) = \frac{4}{36} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(J_5) = \frac{6}{36}.$$

Donc : $\mathbb{P}(A_5) < \mathbb{P}(J_5)$.

La probabilité est plus grande que Juliette obtienne 5.

2. Comparons les probabilités des différentes sommes possibles.

Notons X_A la variable aléatoire qui à un lancer de dés de Arthur associe la somme des chiffres obtenus.

D'après le tableau de la question précédente : $X_A \in \{2,3,\ldots,12\}$. Et en raisonnant comme à la question précédente (équiprobabilité) nous obtenons aisément les probabilité suivantes :

Somme x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Arthur a raison : 7 est la somme qui a la plus grande probabilité d'être obtenue.

3. (a) Du fait des phénomène de fluctuation d'échantillonnage, si la probabilité d'obtenir 6 semble assez proche de celle d'obtenir 7,

   le tableau ne permet pas d'affirmer que les probabilités d'obtenir 6 égale celle d'obtenir 7.

   Au vu des connaissances exigées pour le concours je pense que la réponse à cette question doit relever davantage de l'intuitif que du quantitatif.

   (b) Comparons la probabilité d'obtenir 6 et celle d'obtenir 7.

   Notons X_J la variable aléatoire qui à un lancer de dés de Juliette associe la somme des chiffres obtenus.
   En utilisant le tableau de la question 1. nous pouvons affirmer que l'événement $\{X_J = 6\}$ est réalisé par 6 issues tandis que $\{X_J = 7\}$ est réalisé par 5 issues. Compte tenu de l'équiprobabilité et du fait que l'univers contient 36 issues :

   $$\mathbb{P}(X_J = 6) = \frac{6}{36} \qquad et \qquad \mathbb{P}(X_J = 7) = \frac{5}{36}.$$

Exercice 3.

1. Déterminons le résultat obtenu, $r(7)$, en choisissant 7.

   Les deux successeurs de 7 sont $7 + 1 = 8$ et $7 + 2 = 9$. Donc leurs carrés sont $8^2 = 64$ et $9^2 = 81$.
   Les deux prédécesseurs de 7 sont $7 - 1 = 6$ et $7 - 2 = 5$. Donc leurs carrés sont $6^2 = 36$ et $5^2 = 25$.
   Donc

$$r(7) = (81 + 64) - (36 + 25)$$

$$\boxed{r(7) = 134.}$$

2. Déterminons le résultat obtenu, $r(5)$, en choisissant 5.

   Les deux successeurs de 5 sont $5 + 1 = 6$ et $5 + 2 = 7$. Donc leurs carrés sont $6^2 = 36$ et $7^2 = 49$.
   Les deux prédécesseurs de 5 sont $5 - 1 = 4$ et $5 - 2 = 3$. Donc leurs carrés sont $4^2 = 16$ et $3^2 = 9$.
   Donc

$$r(5) = (49 + 36) - (16 + 9)$$

$$\boxed{r(5) = 60.}$$

3. Il semble qu'il y ait proportionnalité entre la première et la seconde ligne.

   Le nombre choisi peut être retrouvé en divisant par 12 le résultat.

4. Démontrons que, quelque soit l'entier n choisi, le résultat est $12n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Les deux successeurs de n sont $n+1$ et $n+2$. Donc leurs carrés sont $(n+1)^2$ et $(n+2)^2$.
   Les deux prédécesseurs de n sont $n-1$ et $n-2$. Donc leurs carrés sont $(n-2)^2$ et $(n-1)^2$.
   Donc

$$\begin{aligned}
r(n) &= \left[(n+2)^2 + (n+1)^2\right] - \left[(n-1)^2 + (n-2)^2\right] \\
&= \left[n^2 + 2 \times n \times 2 + 2^2 + n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2\right] - \left[n^2 - 2 \times n \times 2 + 2^2 + n^2 - 2 \times \right. \\
&= \left(n^2 + 4n + 4 + n^2 + 2n + 1\right) - \left(n^2 - 4n + 4 + n^2 - 2n + 1\right) \\
&= \left(2n^2 + 6n + 5\right) - \left(2n^2 - 6n + 5\right) \\
&= 2n^2 + 6n + 5 - 2n^2 + 6n - 5 \\
&= 12n
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que

quelque soit l'entier naturel n choisi le résultat est $12n$.

Exercice 4.

1. Une rotation de centre A et d'angle 60°.

2. Une symétrie centrale dont le centre est le milieu de $[BC]$.

3. La translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$, ou encore la translation qui transforme C en D.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3.
4. (a)
   (b)

Situation 2.

1. (a)
   (b)
2.
3.

Situation 3.

1. (a)
   (b)
2. (a)
   (b)