Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 3.

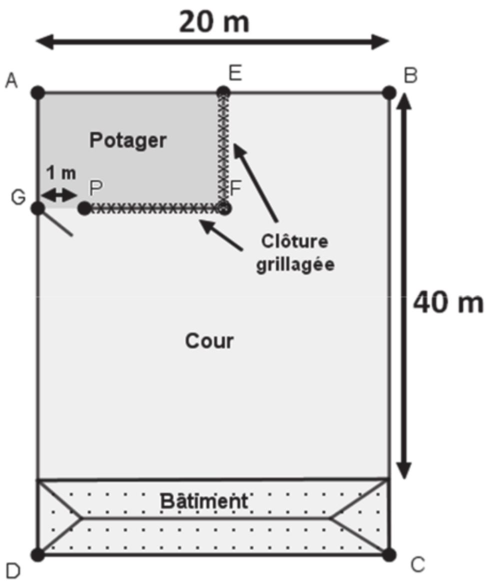
Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.
Merci à M. Vanche et Mme Guyard pour les corrections apportées.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Des enseignants souhaitent créer un potager pédagogique dans la cour de leur école, en voici un plan ci-après (qui n'est pas à l'échelle).



Le potager $AEFG$ doit respecter les contraintes suivantes :
— être de forme rectangulaire,
— avoir une aire de 90 m^2,
— être le long des murs d'enceinte $[DA]$ et $[AB]$,
— être bordé par un grillage le long des deux autres côtés,
— disposer d'une porte de 1 m de large.

On souhaite de plus que le coté $[AG]$ mesure entre 5 m et 20 m.

L'ouverture pour la porte correspond au segment $[GP]$.

Le potager est donc le rectangle $AEFG$ où E est un point du segment $[AB]$ et G est un point du segment $[AD]$ avec $5 \text{ m} \leqslant AG \leqslant 20 \text{ m}$.

Pour des raisons de coût, les enseignants cherchent à déterminer les dimensions du potager afin que la longueur totale du grillage soit la plus petite possible.

Partie A : le grillage et le potager.

1. (a) Vérifier que si AG est égale à 5 m, alors la longueur de grillage est de 22 m.

Supposons que $AG = 5$ m et démontrons qu'alors la longueur, $\ell(AG)$, du grillage est 22 m.

Nous remarquons que $\ell(AG) = PF + EF$.

* Déterminons AE.
L'aire $AEFG$ est de 90 m^2 donc :

$$\mathscr{A}(AEFG) = 90 \text{ m}^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} AG \times AE &= 90 \text{ m}^2 \\ (5 \text{ m}) \times AE &= 90 \text{ m}^2 \\ \frac{(5 \text{ m}) \times AE}{5 \text{ m}} &= \frac{90 \text{ m}^2}{5 \text{ m}} \\ AE &= 18 \text{ m} \end{aligned}$$

* Déterminons PF.

$$\begin{aligned} PF &= AE - (1 \text{ m}) \\ &= (18 \text{ m}) - (1 \text{ m}) \\ &= 17 \text{ m} \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $AG = EF = 5$ m nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\ell(AG) &= PF + EF\\ &= (17 \text{ m}) + (5 \text{ m})\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } AG = 5 \text{ m alors } \ell(AG) = 22 \text{ m.}}$$

(b) On suppose maintenant que AG est égale à 7,5 m. Calculer la longueur du grillage nécessaire.

En procédant comme à la question précédente :

$$\begin{aligned}\ell(AG) &= PF + EF\\ &= \frac{90}{7{,}5} - 1 + 7{,}5 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } AG = 7{,}5 \text{ m alors } \ell(AG) = 18{,}5 \text{ m.}}$$

2. Dans la suite, on note x la longueur de $[AG]$, exprimée en mètre, et on appelle L la fonction qui à tout nombre positif compris entre 5 et 20, associe $L(x)$ la longueur du grillage, exprimée en mètre, nécessaire pour clôturer le potager.

(a) Prouver que $L(x) = x + \dfrac{90}{x} - 1$.

Si $AG = x$ alors, en reprenant le raisonnement de la question 1.(a) nous obtenons bien :

$$\boxed{L(x) = x + \tfrac{90}{x} - 1.}$$

(b) Pour chacune des expressions suivantes indiquer si elle est une autre expression de $L(x)$. Justifier vos réponses.

i. $x + \dfrac{89}{x}$.

ii. $x + \dfrac{90 - x}{x}$.

iii. $\dfrac{x^2 - x + 90}{x}$.

iv. $\dfrac{x^2+89}{x}$.

i. Pour $x = 2$: $2 + \frac{89}{2} = 47{,}5$ et $L(2) = 2 + \frac{90}{2} - 1 = 46$.

ii. Soit $x \in [5;20]$.

$$\begin{aligned} L(x) &= x + \frac{90}{x} - 1 \\ &= x + \frac{90}{x} - \frac{1\times x}{x} \\ &= x + \frac{90-x}{x} \end{aligned}$$

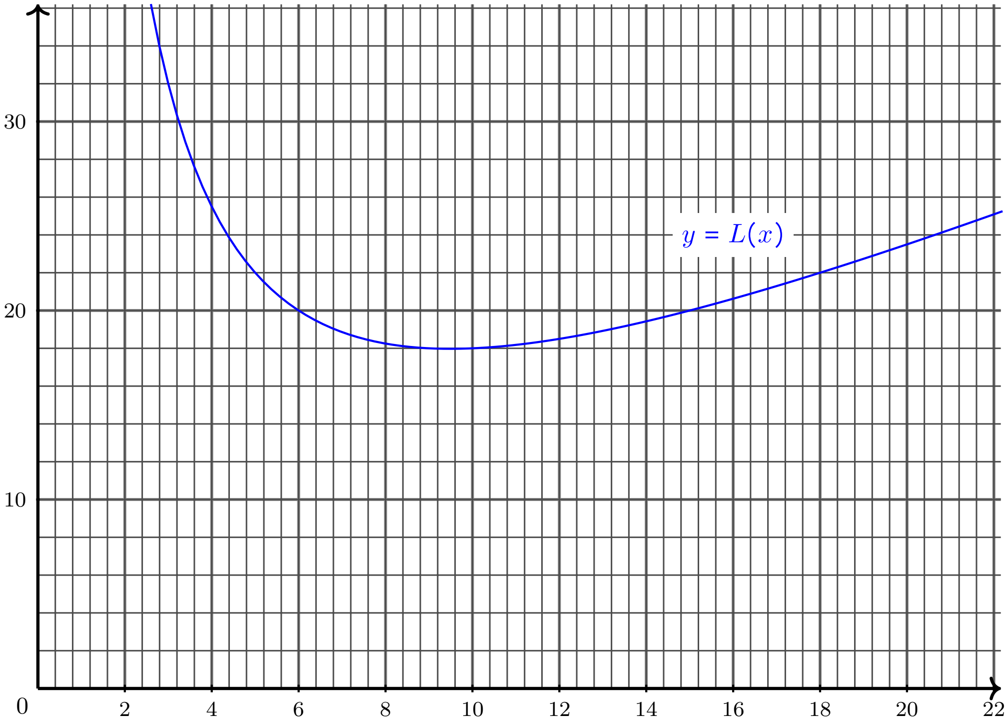
iii. Soit $x \in [5;20]$.
En reprenant le précédent calcul :

$$\begin{aligned} L(x) &= x + \frac{90-x}{x} \\ &= \frac{x\times x}{x} + \frac{90-x}{x} \\ &= \frac{x^2 - x + 90}{x} \end{aligned}$$

iv. Pour $x = 2$: $\frac{2^2+89}{2} = 47{,}5$ alors que $L(2) = 46$.

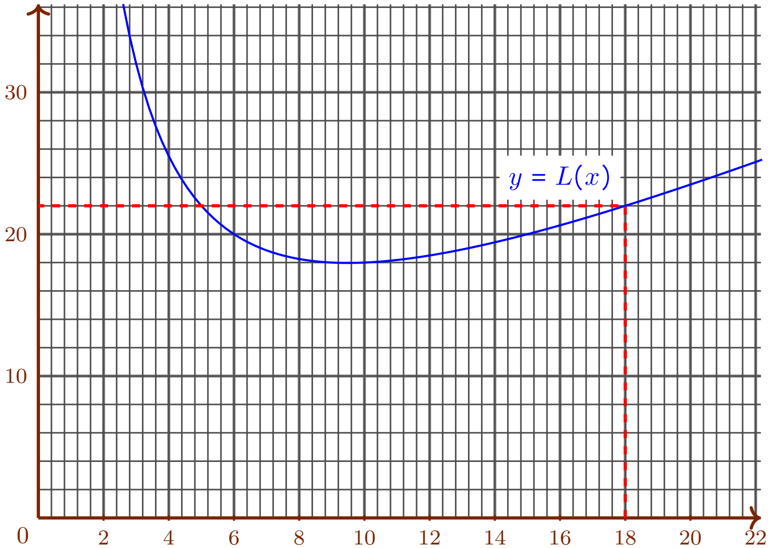
Seules ii. et iii. sont d'autres expressions de $L(x)$.

3. On donne ci-dessous une représentation graphique de la fonction L dans un repère orthogonal.



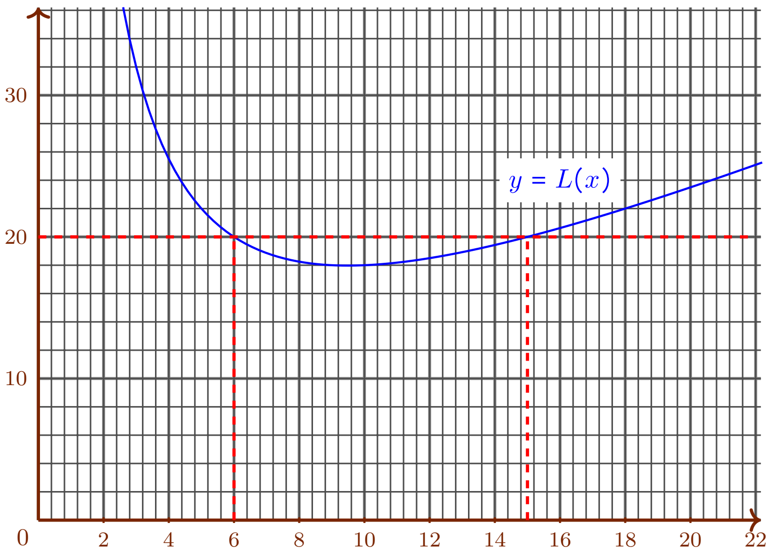
Déterminer graphiquement :

(a) la longueur de grillage lorsque $AG = 18$ m ;



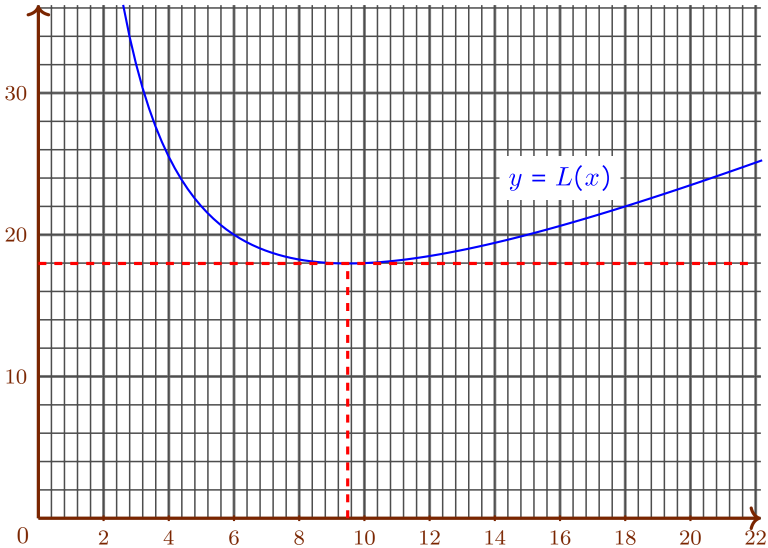
$L(18) = 22$ donc le grillage mesure 22 m.

(b) les valeurs possibles de AG lorsque la longueur de grillage est de 20 m.



Le grillage mesure 22 m si l'on choisit $AG = 6$ m ou $AG = 15$ m.

(c) la valeur de AG pour que la longueur de grillage soit minimale.



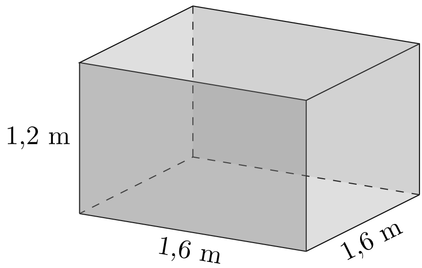
Le grillage semble minimal lorsque $AG = 9{,}48$ m.

Partie B : le compost et le potager.

Le projet prévoit par ailleurs la fabrication et l'utilisation de compost pour entretenir le potager.

Le bac à compost sera posé à l'extérieur du potager.

Ce bac est assimilé à un parallélépipède rectangle à base carrée de 1,6 m de côté et hauteur 1,2 m.



1. Quel est le volume du bac exprimé en m^3 ?

   Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ du bac.

   Le bac ayant la forme d'un parallélépipède rectangle son volume s'obtient comme le produit des longueur, largeur et hauteur :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= (1{,}2\ \mathrm{m}) \times (1{,}6\ \mathrm{m}) \times (1{,}6\ \mathrm{m}) \\ &= 1{,}2 \times 1{,}6 \times 1{,}6\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_1 = 3{,}072\ \mathrm{m}^3.}$$

2. Le compost se transforme naturellement et son volume diminue de 20 % par mois.

   (a) En remplissant le bac en totalité, quel sera le volume de compost au bout d'un mois ?

   Calculons le volume, $\mathscr{V}_2$, de compost au bout de un mois.

   En un mois le volume diminue de 20 % le coefficient multiplicateur correspondant est

$$\begin{aligned}CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-20}{100} \\ &= 0{,}8\end{aligned}$$

   Nous en déduisons le volume au bout d'un mois :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= CM \times \mathscr{V}_1\\ &= 0{,}8 \times 3{,}072 \text{ m}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_2 = 2{,}4576 \text{ m}^3.}$$

Les enseignants ont calculé l'évolution du volume de compost disponible à la fin de chaque mois d'un bac rempli. Voici ce qui a été trouvé :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Nombre de mois	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Volume de compost en m^3	3,072	2,4576	1,9661	1,5729	1,2583	1,0066	0,8053	0,6442	0,5154	0,4123	0,3299

(b) Quelle formule faut-il saisir dans la cellule C2 pour remplir ensuite l'ensemble de la ligne 2 en étirant la cellule C2 jusqu'à la cellule L2 ?

La formule à saisir en C2 est

$$\boxed{= 0{,}8 * \texttt{B2}.}$$

(c) Plus longtemps dure la maturation du compost, meilleure sera sa qualité. Au bout de 5 mois la classe décide d'utiliser le compost pour les 40 m^2 de plants de salades du jardin. Y a-t-il suffisamment de compost pour en épandre sur une épaisseur de 3 cm ?

Calculons le volume $\mathscr{V}_3$ correspondant à parallélépipède rectangle de surface au sol 40 m^2 et de hauteur 3 cm.

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_3 &= (3 \text{ cm}) \times (40 \text{ m})\\ &= 3 \times 40 \text{ cm} \cdot \text{m}^2\\ &= 120 \times \frac{1}{100} \text{ m} \cdot \text{m}^3\\ &= \frac{120}{100} \text{ m}^3\\ &= 1{,}2 \text{ m}^3\end{aligned}$$

Or au bout de cinq mois le volume de compost n'est, d'après le tableur, que de 1,0066 m^3 donc

> il n'y a pas assez de compost pour en épandre comme souhaité.

Partie C : achat des graines à planter.

En période 4, les élèves décident de planter des pieds de salade. Dans le commerce, plusieurs tarifs sont proposés :

Tarif A	prix d'une barquette de 5 plants : 1,20 €.
Tarif B	prix d'un plant : 0,25 €, et à partir de 50 plants une réduction de 5 % est faite sur l'ensemble de la commande.
Tarif C	achat de carte de fidélité : 3 €, puis 0,20 € le plant.

1. Quel tarif va être le plus avantageux pour l'achat de 40 plants ?

   Déterminons le nombre de plants achetés avec 30 € de 40 plants.

   Tarif A. 40 plants remplissent $\frac{40}{5} = 8$ barquettes. Le coût sera donc de $8 \times (1{,}20\text{ €}) = 8 \times 1{,}20\text{ €} = 9{,}6\ \text{€}$.

   Tarif B. 40 plants sont insuffisants pour bénéficier de la réduction. Leur coût sera donc de $40 \times (0{,}25\text{ €}) = 40 \times 0{,}25\text{ €} = 10\text{ €}$.

   Tarif C. Chaque plant coûtant 40 € et tenant compte du coût de la carte de fidélité, le coût sera de : $(3\text{ €}) + 40 \times (0{,}20\text{ €}) = (3 + 40 \times 0{,}20)\text{ €} = 11\text{ €}$.

   > Pour 40 plants le tarif A est plus avantageux.

2. L'école dispose d'un budget de 30 €. Quel tarif permet d'acheter le plus de pieds de salade ?

   Déterminons le nombre de plants achetés avec 30 €.

   Tarif A. Avec 30 € il est possible d'acheter $\frac{30\text{ €}}{1{,}20\text{ €}} = 25$ barquettes ce qui correspond à $25 \times 5 = 125$ plants.

Tarif B. Supposons qu'avec 30 € le nombre de plants est strictement inférieur à 50 alors le nombre de plants est précisément : $\frac{30\ €}{0{,}25\ €} = 120$. Ceci contredit notre hypothèse que le nombre de plants vendus est strictement inférieur à 50.

Supposons donc dorénavant que le nombre de plants obtenus avec 30 € est supérieur à 50.
Une diminution de 5 % correspond à un coefficient multiplicateur de

$$\begin{aligned} CM_2 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-5}{100} \\ &= 0{,}95 \end{aligned}$$

Donc chaque plant est payé $0{,}95 \times (0{,}25\ €) = 0{,}2375\ €$.
Par conséquent avec 30 € le nombre de plants achetés est : $\frac{30\ €}{0{,}2375\ €} \approx 126{,}3157$. Autrement dit 126 plants.

Tarif C. Notons x le nombre de plants acheté.
Nous avons

$$0{,}2x + 3 = 30$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 0{,}2x + 3 - 3 &= 30 - 3 \\ 0{,}2x &= 27 \\ \frac{0{,}2x}{0{,}2} &= \frac{27}{0{,}2} \\ x &= 135 \end{aligned}$$

Avec 30 euro il est possible d'acheter 135 plants.

Pour 30 € le tarif C permet d'acheter le plus de plants.

3. À partir de l'achat de combien de plants le tarif C devient-il plus intéressant que le tarif B ?

Comparons les coûts pour les tarifs B et C pour x plants vendus avec $0 \leqslant x$.

Raisonnons par disjonction des cas suivant que x est plus petit ou plus grand que 50.

* Supposons tout d'abord que $0 \leqslant x < 50$.
Pour le tarif B le coût exprimé en euro est : $\mathcal{C}_B(x) = 0{,}25x$.
Pour le tarif C le coût exprimé en euro est : $\mathcal{C}_C(x) = 0{,}2x + 3$.
Dire que le coût avec le tarif B est inférieur au coût avec C équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_B(x) &\leqslant \mathcal{C}_C(x)\\
0{,}25x &\leqslant 0{,}2x + 3\\
0{,}25x - 0{,}2x &\leqslant 0{,}2x + 3 - 0{,}2x\\
0{,}05x &\leqslant 3\\
\frac{0{,}05x}{0{,}05} &\leqslant \frac{3}{0{,}05} \quad \text{car } 0{,}05 > 0\\
x &\leqslant 60
\end{aligned}$$

Ce qui est toujours vrai puisque nous sommes dans le cas $x \leqslant 50$.

* Supposons maintenant que $50 \leqslant x$.
Pour le tarif B le coût exprimé en euro est donc : $\mathcal{C}_B(x) = 0{,}2375x$.
Pour le tarif C le coût exprimé en euro est encore : $\mathcal{C}_C(x) = 0{,}2x + 3$.
Dire que le coût avec le tarif B est inférieur au coût avec C équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_B(x) &\leqslant \mathcal{C}_C(x)\\
0{,}2375x &\leqslant 0{,}2x + 3\\
0{,}2375x - 0{,}2x &\leqslant 0{,}2x + 3 - 0{,}2x\\
0{,}0375x &\leqslant 3\\
\frac{0{,}0375x}{0{,}0375} &\leqslant \frac{3}{0{,}0375} \quad \text{car } 0{,}0375 > 0\\
x &\leqslant 80
\end{aligned}$$

Ainsi le coût avec le tarif B reste inférieur tant que l'on achète moins de 81 plants de salade.

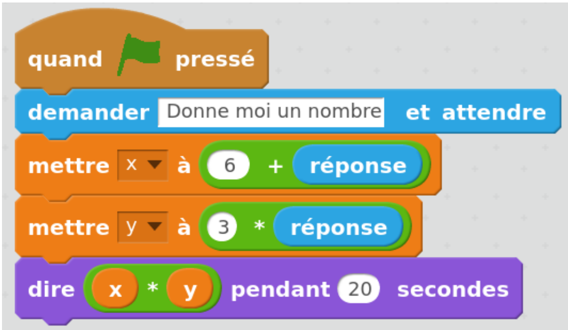
À partir de 80 plants de salade le tarif C est plus avantageux.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Le programme ci-dessous a été écrit avec le logiciel Scratch.



1. Montrer que si l'utilisateur rentre le nombre 5 alors le lutin va dire 165 pendant 20 secondes.

   Considérons le tableau d'état des variables.

	réponse	x	y	x * y
demander Donne moi un nombre et attendre	5			
mettre x à 6 + réponse	5	$5 + 6 = 11$		
mettre y à 3 * réponse	5	11	$3 \times 5 = 15$	
dire x * y pendant 20 secondes	5	11	15	$11 \times 15 = 165$

   Si l'utilisateur entre 5 le lutin dira 165.

2. Que va dire le lutin pendant 20 secondes si l'utilisateur rentre le nombre $2 + \frac{7}{10}$?

   Considérons le tableau d'état des variables.

	réponse	x	y	x * y
demander Donne moi un nombre et attendre	$2+\frac{7}{10}=\frac{27}{10}$			
mettre x à 6 + réponse	$\frac{27}{10}$	$6+\frac{27}{10}=\frac{87}{10}$		
mettre y à 3 * réponse	$\frac{27}{10}$	$\frac{87}{10}$	$3\times\frac{27}{10}=\frac{81}{10}$	
dire x * y pendant 20 secondes	$\frac{27}{10}$	$\frac{87}{10}$	$\frac{81}{10}$	$\frac{87}{10}\times\frac{81}{10}=\frac{7047}{100}$

Si l'utilisateur entre $2+\frac{7}{10}$ le lutin dira $\frac{7047}{100}$.

3. Quels nombres ont pu être rentrés dans « réponse » si le lutin dit : « 0 » pendant 20 secondes ?

Déterminons la valeur z entrée dans « réponse ».

Si nous reprenons le tableau d'état des variables :

	réponse	x	y	x * y
demander Donne moi un nombre et attendre	z			
mettre x à 6 + réponse	z	$6+z$		
mettre y à 3 * réponse	z	$6+z$	$3z$	
dire x * y pendant 20 secondes	z	$6+z$	$3z$	$(6+z)\times 3z$

Ainsi le nombre retourné est 0 si et seulement si :

$$(6+z)3z=0$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 6+z&=0 \quad \text{ou} \quad 3z=0\\ z&=-6 \quad \text{ou} \quad z=0\end{aligned}$$

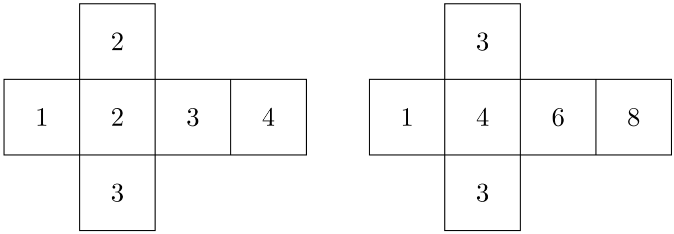
Pour que le nombre retourné soit 0 il faut et il suffit que les nombres entrés soient 0 ou -6.

Exercice 2.

Dans cet exercice, tous les dés sont équilibrés.

Arthur possède deux dés classiques (les faces sont numérotées de 1 à 6).

Juliette possède deux dés très particuliers : un patron de chacun de ces deux dés est donné ci-dessous :



Arthur et Juliette définissent une règle du jeu : chacun d'eux lance ses deux dés puis additionne les deux nombres qu'il a obtenus.

1. Lors de leur premier lancer, Juliette et Arthur ont tous deux obtenu une somme égale à 5. Qui, de Juliette ou d'Arthur, avait le plus de chances d'obtenir 5 ?

   Schématisons le lancer d'Arthur avec un tableau double entrée que nous remplirons des sommes des chiffres affichés par les deux dés.

   Pour Arthur :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

   Pour Juliette :

	1	3	3	4	6	8
1	2	4	4	5	7	9
2	3	5	5	6	8	10
2	3	5	5	6	8	10
3	4	6	6	7	9	11
3	4	6	6	7	9	11
4	5	7	7	8	10	12

   Ω_A est l'ensemble des couples de chiffres obtenus (en distinguant toutes les faces par un coloriage par exemple) pour Arthur.
   De même pour Ω_J.

Les dés étant équilibrés il est raisonnable de faire l'hypothèse que chaque couple de faces représenté par une case du tableau à la même probabilité qu'un autre couple. Il y a équiprobabilité entre les couples. Et dans les deux cas, Arthur ou Juliette, l'univers comporte 36 issues.

Notons A_5 (resp. J_5) l'événement « Arthur (resp. Juliette) obtient un 5 ».

Calculons $\mathbb{P}(A_5)$ (resp. $\mathbb{P}(J_5)$).

I y a équiprobabilité entre les couples. A_5 (resp. J_5) est réalisé par 4 (resp. 6) issues. L'univers comporte 36 issues. Nous en déduisons :

$$\mathbb{P}(A_5) = \frac{4}{36} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(J_5) = \frac{6}{36}.$$

Donc : $\mathbb{P}(A_5) < \mathbb{P}(J_5)$.

La probabilité est plus grande que Juliette obtienne 5.

2. Arthur prétend que, s'il lance ses dés classiques, la somme ayant la plus grande probabilité d'être obtenue est 7. Est-ce exact ? Justifier la réponse.

Comparons les probabilités des différentes sommes possibles.

Notons X_A la variable aléatoire qui à un lancer de dés de Arthur associe la somme des chiffres obtenus.
D'après le tableau de la question précédente : $X_A \in \{2,3,\ldots,12\}$. Et en raisonnant comme à la question précédente (équiprobabilité) nous obtenons aisément les probabilité suivantes :

Somme x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Arthur a raison : 7 est la somme qui a la plus grande probabilité d'être obtenue.

3. Juliette dispose d'un tableau de synthèse résultant d'une simulation de 1000 lancers de ses deux dés.

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	32	51	122	174	151	151	79	81	89	48	22

(a) En observant ce tableau, elle affirme que lorsqu'elle lance ses dés, la probabilité d'obtenir 6 est égale à celle d'obtenir un 7. Le tableau permet-il effectivement de l'affirmer ?

Du fait des phénomène de fluctuation d'échantillonnage, si la probabilité d'obtenir 6 semble assez proche de celle d'obtenir 7,

le tableau ne permet pas d'affirmer que les probabilités d'obtenir 6 égale celle d'obtenir 7.

Au vu des connaissances exigées pour le concours je pense que la réponse à cette question doit relever davantage de l'intuitif que du quantitatif.

(b) Calculer la probabilité d'obtenir un 6 et celle d'obtenir un 7 avec les dés de Juliette.

Comparons la probabilité d'obtenir 6 et celle d'obtenir 7.

Notons X_J la variable aléatoire qui à un lancer de dés de Juliette associe la somme des chiffres obtenus.
En utilisant le tableau de la question 1. nous pouvons affirmer que l'événement $\{X_J = 6\}$ est réalisé par 6 issues tandis que $\{X_J = 7\}$ est réalisé par 5 issues. Compte tenu de l'équiprobabilité et du fait que l'univers contient 36 issues :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_J = 6) = \frac{6}{36} \qquad et \qquad \mathbb{P}(X_J = 7) = \frac{5}{36}.}$$

Exercice 3.

Sarah choisit un nombre entier. À la somme des carrés des deux entiers qui lui succèdent, elle retranche la somme des carrés des deux entiers qui le précèdent.

1. Montrer qu'en appliquant ce calcul à 7, on trouve 84.

   Déterminons le résultat obtenu, $r(7)$, en choisissant 7.

   Les deux successeurs de 7 sont $7 + 1 = 8$ et $7 + 2 = 9$. Donc leurs carrés sont $8^2 = 64$ et $9^2 = 81$.
   Les deux prédécesseurs de 7 sont $7 - 1 = 6$ et $7 - 2 = 5$. Donc leurs carrés sont $6^2 = 36$ et $5^2 = 25$.
   Donc

$$r(7) = (81 + 64) - (36 + 25)$$

$$\boxed{r(7) = 84.}$$

2. Calculer le résultat obtenu si l'on choisit le nombre 5.

   Déterminons le résultat obtenu, $r(5)$, en choisissant 5.

   Les deux successeurs de 5 sont $5 + 1 = 6$ et $5 + 2 = 7$. Donc leurs carrés sont $6^2 = 36$ et $7^2 = 49$.
   Les deux prédécesseurs de 5 sont $5 - 1 = 4$ et $5 - 2 = 3$. Donc leurs carrés sont $4^2 = 16$ et $3^2 = 9$.
   Donc

$$r(5) = (49 + 36) - (16 + 9)$$

$$\boxed{r(5) = 60.}$$

3. On reporte dans un tableau les résultats obtenus pour plusieurs calculs :

Nombre choisi	-37	0	2	7	10	30
Résultat obtenu	-444	0	24	84	120	360

   Conjecturer une méthode permettant de retrouver le nombre choisi connaissant le résultat.

   Il semble qu'il y ait proportionnalité entre la première et la seconde ligne.

   Le nombre choisi peut être retrouvé en divisant par 12 le résultat.

4. Démontrer la conjecture.

   Démontrons que, quelque soit l'entier n choisi, le résultat est $12n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

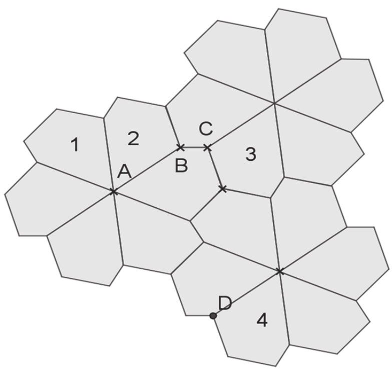
Les deux successeurs de n sont $n+1$ et $n+2$. Donc leurs carrés sont $(n+1)^2$ et $(n+2)^2$.
Les deux prédécesseurs de n sont $n-1$ et $n-2$. Donc leurs carrés sont $(n-2)^2$ et $(n-1)^2$.
Donc

$$\begin{aligned}
r(n) &= \left[(n+2)^2 + (n+1)^2\right] - \left[(n-1)^2 + (n-2)^2\right] \\
&= \left[n^2 + 2\times n\times 2 + 2^2 + n^2 + 2\times n\times 1 + 1^2\right] - \left[n^2 - 2\times n\times 2 + 2^2 + n^2 - 2\times\right. \\
&= \left(n^2 + 4n + 4 + n^2 + 2n + 1\right) - \left(n^2 - 4n + 4 + n^2 - 2n + 1\right) \\
&= \left(2n^2 + 6n + 5\right) - \left(2n^2 - 6n + 5\right) \\
&= 2n^2 + 6n + 5 - 2n^2 + 6n - 5 \\
&= 12n
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que

> quelque soit l'entier naturel n choisi le résultat est $12n$.

Exercice 4.



Ce pavage est composé de 18 pentagones tous superposables. Quatre d'entre eux ont été numérotés.

Indiquer quelle transformation (translation, rotation, symétrie) permet de passer :

1. du pentagone 1 au pentagone 2 ;

   Une rotation de centre A et d'angle 60°.

2. du pentagone 2 au pentagone 3 ;

   Une symétrie centrale dont le centre est le milieu de $[BC]$.

3. du pentagone 3 au pentagone 4.

   La translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$, ou encore la translation qui transforme C en D.

Préciser dans chaque cas les éléments qui définissent la transformation choisie. Aucune justification n'est attendue.

III Troisième partie (14 points).

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

Situation 1.

Une enseignante veut faire renforcer la capacité « utiliser le nombre pour repérer une position » chez ses élèves de grande section. Elle leur propose l'activité ci-dessous.

Un train modèle de 31 wagons est décoré avec des images toutes différentes et facilement reconnaissables.
L'élève dispose :
- d'un train personnel de même longueur, non décoré ;
- d'images identiques à celles du train modèle.

L'élève doit décorer son train de la même façon que le train modèle.

Phase 1 :
L'enseignant propose de faire l'activité en positionnant le train personnel juste en-dessous du train modèle. Quand l'élève a reproduit le train modèle, la correspondance terme à terme est introduite par le maître comme procédure de vérification.

Phase 2 :
La consigne est identique mais le train modèle est placé à distance de l'élève, hors de son champ visuel. L'élève n'a pas le droit de déplacer son train pour le décorer. Cependant, l'élève pourra se déplacer autant de fois que nécessaire pour reproduire le modèle.

1. Quelles vérifications permettent la phase 1 avant de proposer la phase 2 aux élèves ?
   Formuler deux attendus pour la première phase.

Pour la phase 2, l'enseignant a imaginé les deux situations suivantes :

- Train modèle 1

- Train modèle 2 :

2. Les deux trains ci-dessus permettent-ils de mobiliser de la même manière la capacité visée ?

3. Citer les étapes que doit réaliser un élève pour réussir la tâche demandée dans la phase 2.

4. (a) Sacha sait compter jusqu'à 8. Décrire comment Sacha peut procéder pour placer avec succès chacune des trois images du train modèle 2.

   (b) Comment Sacha peut-il savoir s'il a réussi ?

Situation 2.

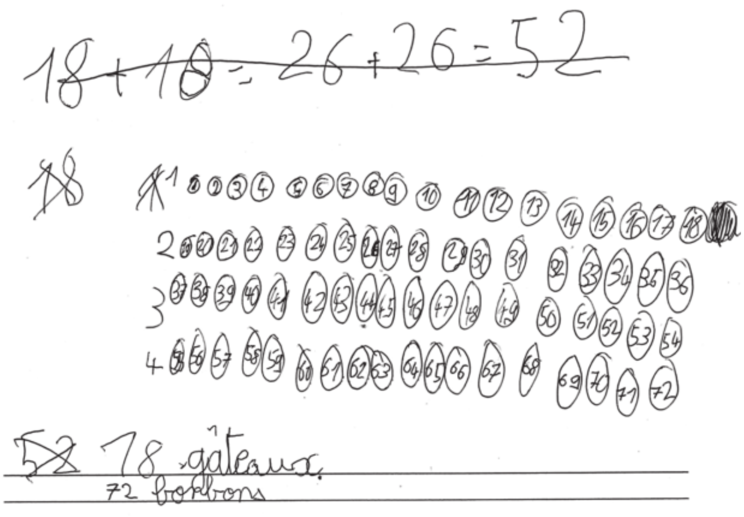
Le problème suivant a été proposé en fin d'année à des élèves d'une classe de CE1 :

> 18 enfants sont réunis pour goûter. Chaque enfant reçoit 1 gâteau et 4 bonbons.
>
> - Combien de gâteaux a-t-on donnés ?
> - Combien de bonbons a-t-on donnés ?

1. Analyse des productions :

   (a) Quels points communs et quelles différences peut-on mettre en évidence dans les procédures de Maëlys et de Malyan ?

Maëlys



Malyan

18 ~~gat~~ ~~att~~ gâteau

~~71~~ 71 bonbon

(b) Quels points communs et quelles différences peut-on mettre en évidence dans les procédures de Bérénice et de Mila ?

Bérénice

$10 \times 4 = 40$

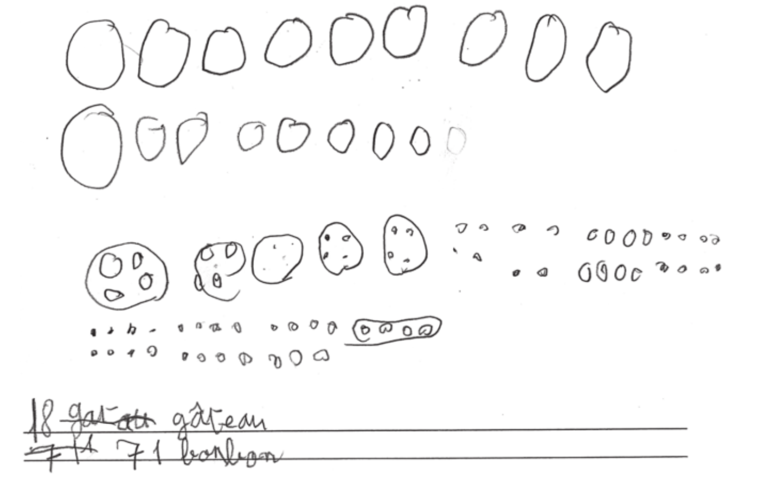
$8 \times 4 = 32$

$40 + 32 = 72$

18 gâteaux

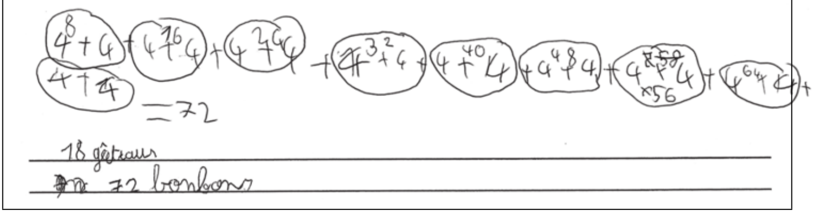
72 bonbons

Mila



2. L'encadré ci-dessous donne la réponse de Martin au problème posé. L'enseignant propose alors à Martin un nouveau problème où le nombre d'enfants passe de 18 à 32. En quoi cette modification peut-elle influencer la production de Martin ?

Martin



3. En quoi la représentation de Maëlys peut-elle être une illustration des calculs effectués par Martin et Bérénice ? Quelle propriété de la multiplication cette comparaison induit-elle ?

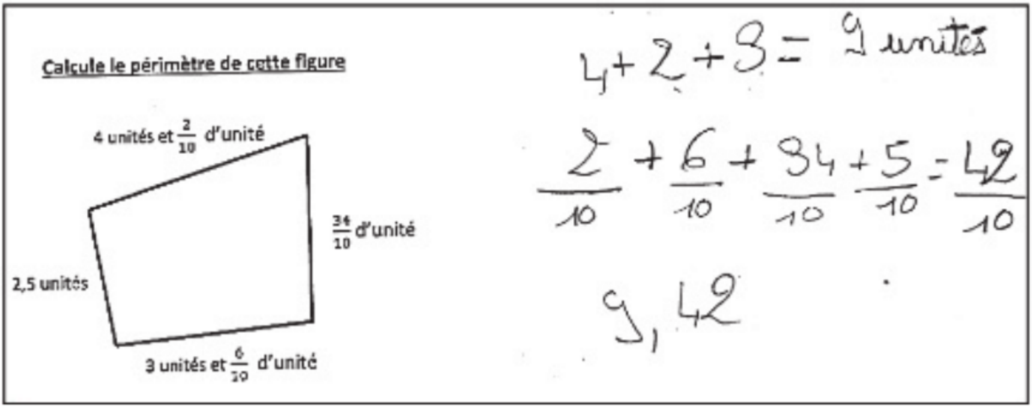
Situation 3.

1. Voici deux réponses d'élèves à la question « Dans un nombre, à quoi sert la virgule ? » posée par un enseignant dans une classe de CM1 :
   — Élève A : « La virgule sert à montrer que c'est un nombre décimal. »
   — Élève B : « La virgule sert à séparer le nombre entier et la partie décimale. »

(a) Pour chacune des réponses proposées, expliquer pourquoi elle ne peut pas être retenue par l'enseignant pour la trace écrite à noter dans les cahiers d'élèves.

(b) Quelle réponse à la question posée, l'enseignant peut-il proposer à la classe ?

2. Voici une production d'élève :



(a) Analyser la production de l'élève en relevant ses réussites et ses erreurs.

(b) Que peut-on proposer à l'élève pour l'aider à corriger ses éventuelles erreurs ?