Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 2.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci pour la relecture de Mme Bourgeois.

I Première partie (13 points).

Partie A : installation de panneaux photovoltaïques.

1. $\left.\begin{array}{l} DA = 7 \text{ m} \\ EA = CB = 3 \text{ m} \\ E \in [AD] \end{array}\right\}$, donc $DE = 4$m.

   Puisque $P \in [DE]$ et puisque $DE = 4$ m, $0 \text{ m} \leqslant DE \leqslant 4$ m.

   $$\boxed{x \in [0; 4].}$$

2. Exprimons PN en fonction de x.

   * Configuration de Thalès.
     Les points D, P, E d'une part et D, N, C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèse du théorème de Thalès.
     $(AD) \perp (PN)$ et $(AD) \perp (EC)$ donc $(PN) \parallel (EC)$.

   Des deux points précédentes, et d'après le théorème de Thalès nous déduisons :

   $$\frac{DP}{DE} = \frac{PN}{EC}.$$

   La précédente égalité équivaut successivement à :

   $$\begin{aligned} \frac{DP}{DE} \times EC &= \frac{PN}{EC} \times EC \\ \frac{x \text{ m}}{4 \text{ m}} \times (8 \text{ m}) &= PN \\ 2x \text{ m} &= PN \end{aligned}$$

   $$\boxed{PN = 2x \text{ m.}}$$

3. Exprimons $A(x)$.

   $AMNP$ est un rectangle donc son aire se calcul en faisant $PN \times AP$ *i.e.*

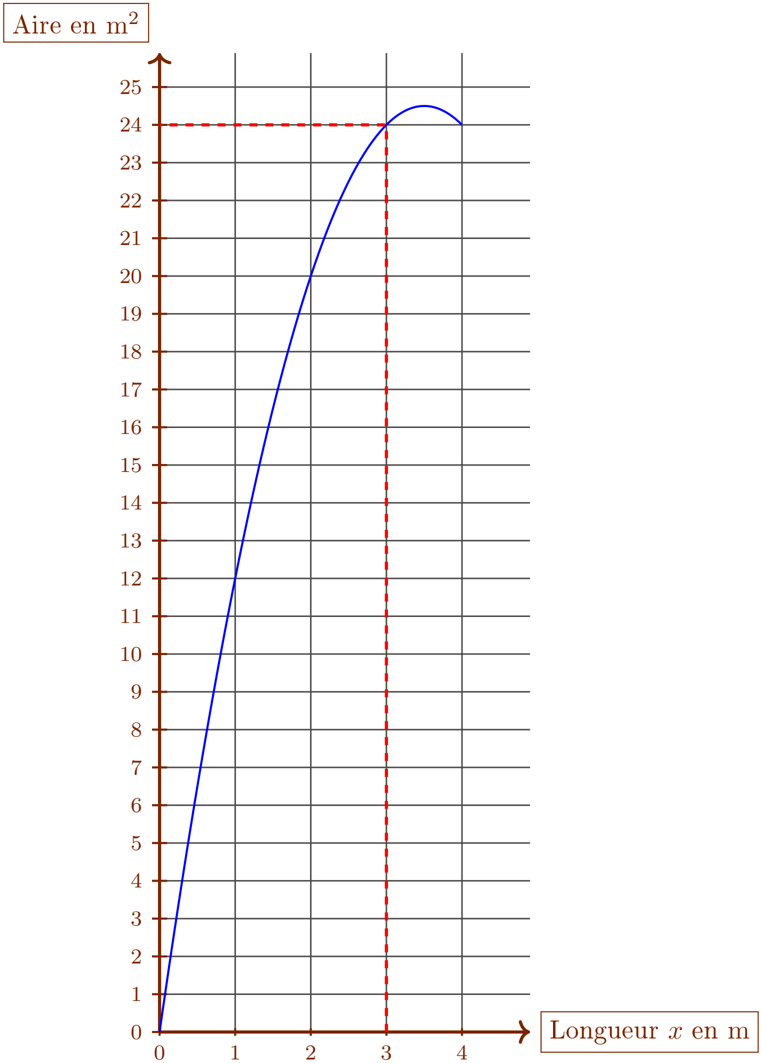
$$\begin{aligned} A(X) &= 2x \times (7 - x) \\ &= 2x \times 7 - 2x \times x \end{aligned}$$

$$\boxed{A(x) = -2x^2 + 14x.}$$

4. Calculons $A(2)$.

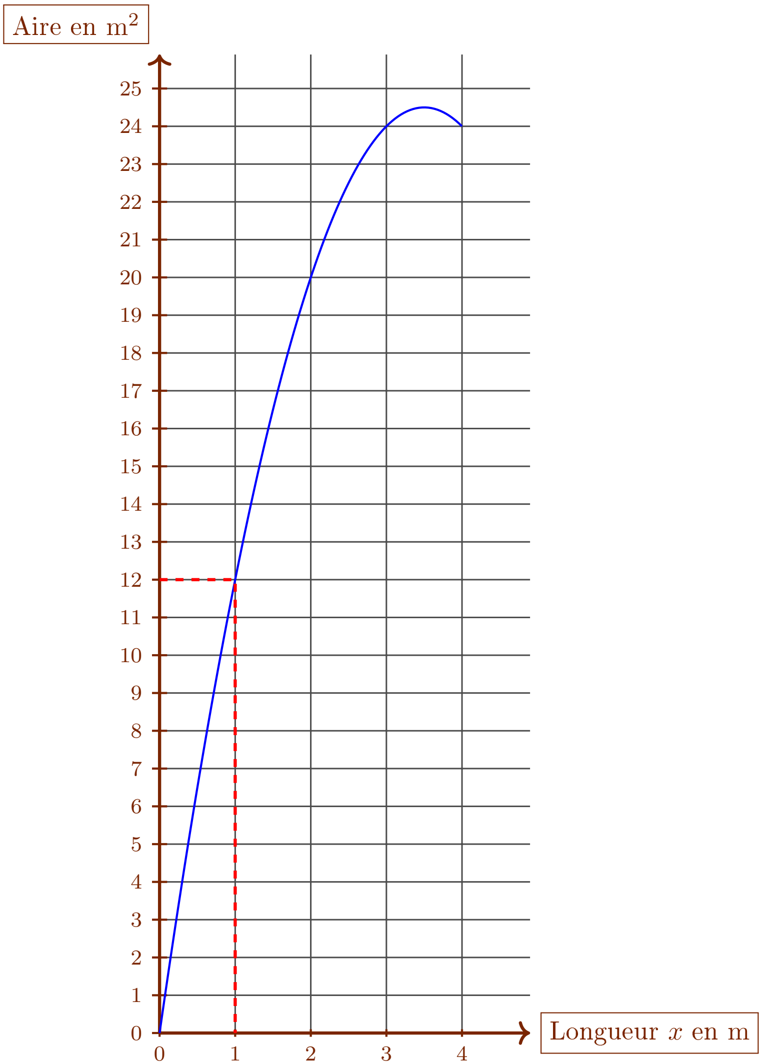
$$\begin{aligned} A(2) &= -2 \times 2^2 + 14 \times 2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } x = 2 \text{ l'aire du support est de } 20\ \text{m}^2.}$$


Aire en m²
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
Longueur x en m

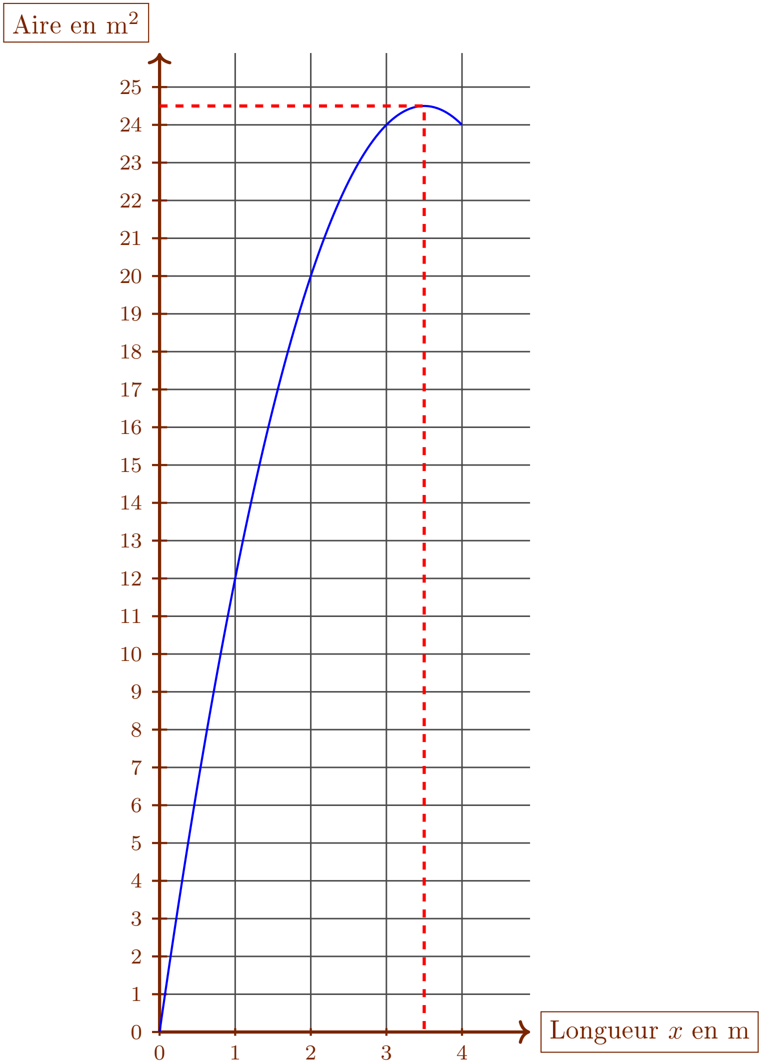
5. (a)

$$A(3) = 24.$$



(b)

L'aire est de 12 m^2 lorsque $x = 1$ m.



(c)

L'aire maximale est atteinte pour $x = 3{,}5$ m.

Partie B : les différentes énergies renouvelables.

1. Déterminons la proportion, p_s, de l'électrique solaire par rapport au reste de la production renouvelable.

Toutes les grandeurs étant la même unité :

$$\begin{aligned} p_s &= \frac{9{,}2}{24 + 9{,}2 + 48{,}6 + 7} \\ &= \frac{23}{222} \\ &\approx 0{,}103603 \end{aligned}$$

> 10,36 % de l'électricité de la filière renouvelable provient du solaire.

2. Déterminons la quantité totale, q_t, d'électricité consommée en France.

	Électricité renouvelable	Toute forme d'électricité
Quantité (en TWh)	$24 + 9{,}2 + 48{,}6 + 7 = 88{,}8$	q_t
Proportion (en %)	18,4	100

Par proportionnalité :

$$\begin{aligned} q_t &= \frac{88{,}8 \times 100}{18{,}4} \\ &\approx 482{,}6086 \end{aligned}$$

> La quantité totale d'électricité consommée en France en 2017 était de 482,6 TWh.

Partie C : coût de l'énergie électrique.

Déterminons la dépense, d_a, électrique de madame Martin pour son thé pendant une année.

* Calculons la consommation d'énergie, E_b, pour chauffer une bouilloire.

$$\begin{aligned}
E_b &= P \times t \\
&= (2200\ \mathrm{W}) \times (1\ \mathrm{min} + 26\ \mathrm{s}) \\
&= (2200\ \mathrm{W}) \times \left(1 \times \frac{1}{60}\ \mathrm{h} + 26 + \frac{1}{3600}\ \mathrm{h}\right) \\
&= 2200 \times \left(\frac{1}{60} + \frac{26}{3600}\right)\ \mathrm{W \cdot h} \\
&= \frac{473}{9}\ \mathrm{Wh}
\end{aligned}$$

* Calculons la consommation énergétique, E_a, pour l'année 2018.
2018 étant une année régulière (non bissextile) :

$$\begin{aligned}
E_a &= 365 E_b \\
&= 365 \times \frac{473}{9}\ \mathrm{W \cdot h} \\
&= \frac{172645}{9}\ \mathrm{W \cdot h} \\
&= \frac{172645}{9} \times \frac{1}{1000}\ \mathrm{kW \cdot h} \\
&= \frac{34529}{1800}\ \mathrm{kW \cdot h} \quad (1)
\end{aligned}$$

* Calculons le prix, p_k, d'un kilowatt-heure avec la TVA.
Une TVA de 20 % signifie une augmentation du prix de 20 %. Le coefficient multiplicateur correspondant est :

$$\begin{aligned}
CM &= 1 + \frac{t}{100} \\
&= 1 + \frac{20}{100} \\
&= 1{,}2
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
p_k &= 1{,}2 \times 0{,}0997\ \text{€}/\mathrm{kWh} \\
&= 0{,}11964\ \text{€}/\mathrm{kWh} \quad (2)
\end{aligned}$$

* De (1) et (2) nous déduisons la somme dépensée annuellement :

$$\begin{aligned} d_a &= \left(\frac{34529}{1800}\text{ kWh}\right) \times (0{,}11964\text{ €/kWh}) \\ &= \frac{34529}{1800} \times 0{,}11964\text{ kWh} \cdot \text{€/kWh} \\ &\approx 2{,}29502 \end{aligned}$$

Pour chauffer son thé madame Martin a dépensé 2,30 € en 2018.

Partie D : installation d'un récupérateur d'eau.

1. Calculons V_1.

   Puisque la base est le rectangle $ABCD$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3} \times (AB \times AD) \times SH \\ &= \frac{1}{3} \times [(1{,}9\text{ m}) \times (92\text{ cm})] \times (4{,}60\text{ m}) \\ &= \frac{1}{3} \times (1{,}9\text{ m}) \times \left(92 \times \frac{1}{100}\text{ m}\right) \times (4{,}60\text{ m}) \\ &= \frac{1}{3} \times 1{,}9 \times 92 \times \frac{1}{100} \times 4{,}60\text{ m} \cdot \text{m} \cdot \text{m} \\ &= \frac{10051}{3750}\text{ m}^3 \\ &\approx 2{,}68026\text{ m}^3 \end{aligned}$$

   Puisque 1 L = 1 dm^3, il faut que nous arrondissions le résultat au millième de mètre cube :

$$V_1 \approx 2{,}680\text{ m}^3.$$

2. (a) Calculons le coefficient c_r demandé.

$$\begin{aligned}
c_r &= \frac{SH'}{SH}\\
&= \frac{SH - HH'}{SH}\\
&= \frac{(4{,}60\ \text{m}) - (1{,}84\ \text{m})}{4{,}60\ \text{m}}\\
&= \frac{2{,}76\ \text{m}}{4{,}60\ \text{m}}\\
&= \frac{2{,}76}{4{,}60}\ \frac{\text{m}}{\text{m}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{c_r = 0{,}6.}$$

(b) Calculons V_2.

Puisque le coefficient de réduction appliqué aux longueurs est de 0,6, le coefficient multiplicateur appliqué aux volumes est de $0{,}6^3$. Donc :

$$\begin{aligned}
V_2 &= 0{,}6^3 \times V_1\\
&\approx 0{,}6^3 \times 2{,}680\ \text{m}^3\\
&\approx 0{,}57888\ \text{m}^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{V_2 \approx 0{,}579\ \text{m}^3.}$$

3. Calculons V.

$$\begin{aligned}
V &= V_1 - V_2\\
&\approx \left(2{,}680\ \text{m}^3\right) - \left(0{,}579\ \text{m}^3\right)\\
&\approx (2{,}680 - 0{,}579)\ \ \text{m}^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{V \approx 2{,}101\ \text{m}^3.}$$

4. Calculons le nombre, n, d'arrosoirs que madame Martin peut remplir avec une réservoir.

   Exprimons V en litres :

$$\begin{aligned} V &\approx 2{,}101\ \mathrm{m}^3 \\ &\approx 2{,}101 \times 1000\ \mathrm{dm}^3 \\ &\approx 2101\ \mathrm{dm}^3 \\ &\approx 2101\ \mathrm{L} \end{aligned}$$

   Donc :

$$\begin{aligned} n &\approx \frac{2101\ \mathrm{L}}{12\ \mathrm{L}} \\ &\approx \frac{2101}{12}\ \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}} \\ &\approx 175{,}0833 \end{aligned}$$

$$\boxed{n \approx 175.}$$

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Déterminons le nombre, n_r, de relevés fabriqués.

   2019 étant une année régulière elle comportait 365 jours, chaque journée comporte 24 heures et chaque heure comporte 60 minutes donc :

$$n_r = 365 \times 24 \times 60$$

$$\boxed{n_r = 525\,600.}$$

2. (a) Déterminons le minimum de cette série.

   L'étendue est donnée par :

$$e = max - min$$

donc :

$$\begin{aligned} min &= max - e \\ &= (24 \text{ m/s}) - (23 \text{ m/s}) \\ &= 1 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La vitesse minimum fut de 1 m/s, qui est inférieure strictement à 3 m/s, il y a au moins eu un jour dans l'année pendant lequel l'éolienne n'a pas fonctionné.

Le gérant a raison.

(b) La médiane est de 14,3 m/s et le maximum est de 24 m/s donc la moitié du temps la vitesse du vent était dans des conditions de puissance stabilisée (*i.e.* entre 13 m/s et 24 m/s).

Les éoliennes ont délivré une puissance stabilisée pendant au moins la moitié de temps.

Exercice 2.

1. Évaluer la primalité d'un grand nombre est extrêmement fastidieux : il faut testé s'il est divisible par les nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée.

   C'est tellement pénible qu'il est peu vraisemblable que ce soit ici le cas.

   Démontrons que 4 700 001 n'est pas premier.

   Il suffit de tester les différents critères de divisibilité connus.

   $4+7+0+0+0+0+1 = 12$ et 12 est divisible par 3 don 4 700 001 est divisible par 3.

   L'affirmation 1 est fausse.

2. Les calculs à la calculatrice semblent impossibles. Nous ne pouvons espérer, avec le peu de temps dont on dispose en examen, faire ces calculs manuellement. Il faut donc essayer autrement de comparer ces nombres.

   Comparons 32^{12} et $16^{15} + 3$.

   Une façon comparer deux nombres consiste à étudier le signe de leur différence.
   Nous avons les décompositions en facteurs premiers : $32 = 2^5$ et $16 = 2^4$.
   Par conséquent :

$$\begin{aligned} 16^{15} + 3 - 32^{12} &= \left(2^4\right)^{15} + 3 - \left(2^5\right)^{12} \\ &= 2^{4\times 15} + 3 - 2^{5\times 12} \\ &= 2^{60} + 3 - 2^{60} \\ &= 3 \end{aligned}$$

   Clairement :

$$16^{15} + 3 - 32^{12} > 0$$

   Autrement dit :

$$16^{15} + 3 > 32^{12}$$

   L'affirmation 2 est fausse.

3. Nous allons démontrer le résultat en utilisant la caractérisation suivante : un entier est impair si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $2k + 1$ avec k un entier naturel.

   Démontrons que la somme des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est toujours un nombre impair.

   Soit n un entier naturel.
   $n + 1$ est donc l'entier consécutif.
   Nous avons :

$$
\begin{aligned}
n^2+(n+1)^2 &= n^2+n^2+2\times n\times 1+1^2\\
&= n^2+n^2+2n+1\\
&= 2n^2+2n+1\\
&= 2(n^2+n)+1\\
&= 2k+1 \quad \text{avec } k=n^2+n \text{ un entier naturel}
\end{aligned}
$$

Autrement dit $n^2+(n+1)^2$ est un nombre impair.
Nous avons démontré que la somme des carrés de tous les entiers consécutifs est un nombre impair.

L'affirmation 3 est vraie.

4. Un rapide calcul à la calculatrice donne : $6{,}4^2+4{,}8^2=64$ et $8^2=64$. Nous savons donc ce que nous devons établir.

   Démontrons que ABC est rectangle en B.

   D'une part :

$$
\begin{aligned}
AB^2+BC^2 &= 6{,}4^2+4{,}8^2\\
&= 64
\end{aligned}
$$

   d'autre part

$$
\begin{aligned}
AC^2 &= 8^2\\
&= 64
\end{aligned}
$$

   d'où $AB^2+BC^2=AC^2$.
   Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que ABC est rectangle en B.

L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 3.

Cliquez sur le programme ci-dessus pour le télécharger.

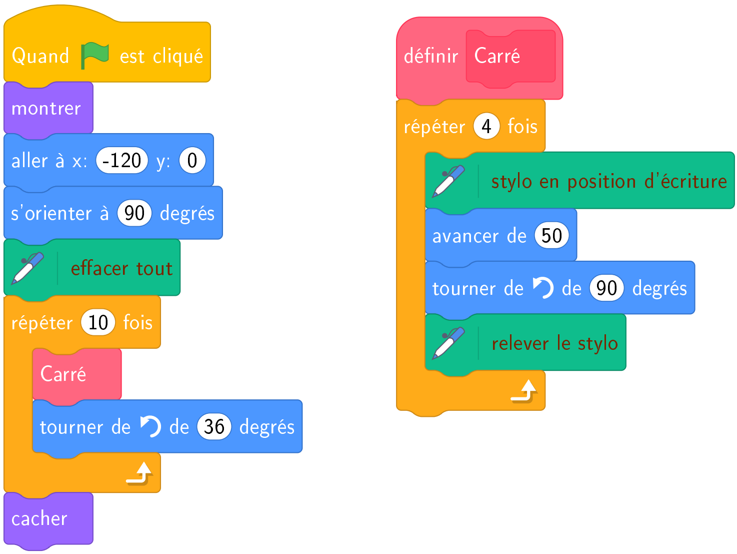
1. Le programme contient l'indication explicite « répéter 6 fois ».

6 motifs « Carré » composent la rosace.

2. Le programme contient l'indication explicite « tourner de 60 degré » dans le sens directe comme l'indique la flèche.

On passe d'un motif « Carré » au suivant par une rotation dont le centre est le centre de symétrie de la rosace et d'angle 60°.

3. Il faut modifier le nombre de répétition et l'angle de la rotation comme suit :



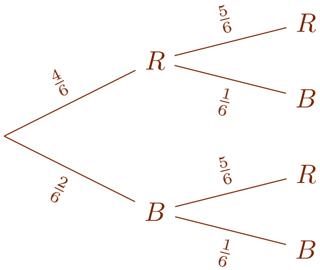
4. Il suffit de remplacer « tourner de ↺ de 60 degrés » par « avancer de 60 ».

Exercice 4.

1. (a) Notons A l'événement « Mourad gagne ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   Schématisons l'expérience par un arbre probabiliste pondéré dans lequel le premier niveau correspond au dé de Kelly et le second celui de Mourad.



Gagnant :	Probabilité :
Mourad	$\frac{10}{36}$
Kelly	$\frac{4}{26}$
Kelly	$\frac{10}{36}$
Mourad	$\frac{2}{36}$

Nous modélisons l'expérience en choisissant $\Omega = \{RR, RB, BR, BB\}$ et la loi de probabilité est celle indiquée sur le schéma et qui est obtenue en utilisant le principe multiplicatif.

$A = \{RR, BB\}$ donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(RR) + \mathbb{P}(BB)$$

D'après le principe multiplicatif :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{4}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{6}\\ &= \frac{20}{36} + \frac{2}{36}\\ &= \frac{22}{36}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{11}{18}.}$$

(b) Notons B l'événement « Kelly gange ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Clairement A et B sont des événements contraires donc :

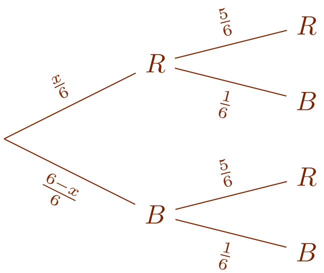
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}(A)\\ &= 1 - \frac{11}{18}\\ &= \frac{7}{18}\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(B) \neq \mathbb{P}(A)$.

> Le coloriage proposé n'est pas une solution du problème.

2. (a) Notons C_x l'événement « Mourad gagne ».

Calculons $\mathbb{P}(C_x)$.



Gagnant :	Probabilité :
Mourad	$\frac{5x}{36}$
Kelly	$\frac{x}{26}$
Kelly	$\frac{5(6-x)}{36}$
Mourad	$\frac{6-x}{36}$

$C_x = \{RR,\, BB\}$ donc :

$$\mathbb{P}(C_x) = \mathbb{P}(RR) + \mathbb{P}(BB)$$

D'après le principe multiplicatif :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_x) &= \frac{x}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{6-x}{6} \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{5x}{36} + \frac{6-x}{36} \\
&= \frac{5x+6-x}{36} \\
&= \frac{4x+6}{36} \\
&= \frac{2\times 2x + 2\times 3}{36} \\
&= \frac{2\times(2x+3)}{2\times 18}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C_x) = \frac{2x+3}{18}.}$$

(b) Résolvons l'équation $\frac{2x+3}{18} = \frac{1}{2}$.

Nous reconnaissons une équation linéaire du premier degré, la résolution algébrique consiste à isoler l'inconnue.

$$\frac{2x+3}{18} = \frac{1}{2}$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
18\times\frac{2x+3}{18} &= 18\times\frac{1}{2} \\
2x+3 &= 9 \\
2x+3-3 &= 9-3 \\
2x &= 6 \\
\frac{2x}{2} &= \frac{6}{2} \\
x &= 3
\end{aligned}$$

La solution trouvée est bien un entier entre 1 et 6 nous pouvons donc conclure.

La seule valeur possible pour laquelle les deux joueurs ont la même chance de gagner est $x = 3$.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3.
4.

Situation 2.

1.
2.
3.
4.

5. (a)
   (b)
   (c)
   (d)

Situation 3.

1.
2.
3.
4.