Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.
Merci à Mme Colle-Guedel pour les corrections apportées.

I Première partie (13 points).

Partie A : boîte de sauce tomate.

1. Calculons le volume V_1 de la boîte.

   Puisque la base de ce cylindre est un disque de rayon $\frac{99}{2}$ mm, d'après la formule qui nous est rappelée :

$$\begin{aligned} V_1 &= \left[\pi\left(\frac{99}{2}\ \text{mm}\right)^2\right] \times (118\ \text{mm}) \\ &= \pi \times \left(\frac{99}{2}\right)^2 \times 118\ \text{mm}^2 \cdot \text{mm} \\ &= 289\,129{,}5\pi\ \text{mm}^3 \\ &= 289\,129{,}5\pi \left(\frac{1}{10}\ \text{cm}\right)^3 \\ &= 289\,129{,}5\pi \times \frac{1}{1000}\ \text{cm}^3 \\ &\approx 908{,}327\,11\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{V_1 \approx 908\ \text{cm}^3.}$$

2. Calculons le volume V_2 correspondant à 95 % du volume de la boîte précédente.

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{95}{100} \times V_1 \\ &= \frac{95}{100} \times 289{,}129\,5\pi\ \text{cm}^3 \\ &= \frac{95}{100} \times 289{,}129\,5\pi\ \text{mL} \\ &\approx 862{,}9107\ \text{mL} \end{aligned}$$

Nous avons bien $V_2 > 850$ mL.

La boîte contient au moins 850 mL.

3. Nous pourrions faire les calculs numériques pour comparer les volumes de boîtes mais nous allons démontrer que ce résultat est inexacte pour tous les cylindres.

   Démontrons que doubler le diamètre ne signifie pas doubler le volume.

   Notons d le diamètre de la base du cylindre et h sa hauteur. Alors son volume est :

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times h \\ &= \frac{1}{4}\pi d^2 h \end{aligned}$$

   Le volume obtenu en doublant le diamètre est :

$$\begin{aligned} V_4 &= \pi \left(\frac{2d}{2}\right)^2 \times h \\ &= \pi d^2 h \end{aligned}$$

   Nous remarquons que : $4V_3 = V_4$ et donc (hormis dans le cas de volumes nuls) :

   lorsque le diamètre double le volume du cylindre ne double pas.

4. * Calculons le volume V_5 de cette nouvelle boîte.

     Reprenons le raisonnement de la question I.A.1

$$
\begin{aligned}
V_5 &= \left[\pi\left(\frac{73}{2}\text{ mm}\right)^2\right] \times (54\text{ mm}) \\
&= \pi \times \left(\frac{73}{2}\right)^2 \times 54\text{ mm}^2 \cdot \text{mm} \\
&= 71\,941{,}5\pi\ \text{mm}^3 \\
&= 71\,941{,}5\pi \left(\frac{1}{10}\text{ cm}\right)^3 \\
&= 71\,941{,}5\pi \times \frac{1}{1000}\text{ cm}^3 \\
&\approx 226{,}010\,8\text{ cm}^3
\end{aligned}
$$

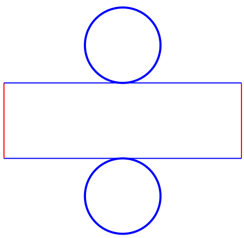
$$V_5 \approx 226\text{ cm}^3.$$

* Nous remarquons que $V_5 \approx \frac{1}{4}V_1$. Et donc :

le format de cette boîte est appelé $\dfrac{1}{4}$ car le volume de cette boîte est un quart du volume de la boîte appelée $\dfrac{4}{4}$.

Partie B : minimisation du coût de fabrication d'une boîte de conserve.

1.



2. Déterminons h en fonction de r.

   Le volume du cylindre est en centimètre cube

$$V_6 = 908$$

Autrement dit, h et r étant exprimés en centimètre :

$$\pi r^2 h = 908$$

ce qui équivaut successivment à :

$$\frac{\pi r^2 h}{\pi r^2} = \frac{908}{\pi r^2}, \quad \text{en supposant } r > 0$$

Finalement

$$h = \frac{908}{\pi r^2}.$$

3. (a) Nous devons reconstruire la formule de l'aire du disque donc :

   La proposition 2 convient.

   (b) Il faut prendre en compte l'aire de la partie latérale rectangulaire, `D2`, et l'aire des deux bases, `C2`.

   Formule en `E2` : $\boxed{\texttt{= D2 + 2 * C2}}$.

   (c) Déterminons un encadrement du rayon correspondant à une aire minimale A_m.

   La plus petite aire calculée est de 520,3 cm^2. Nous pouvons supposer (si les variations de l'aire ne sont pas trop étranges) que la valeur minimale A_m est au voisinage de 520,3 cm^3 : soit entre 554,5 cm^2 et 520,3 cm^3 soit entre 520,3 cm^2 et 528,9 cm^2.
   Autrement dit le minimum est obtenu pour un rayon soit entre 4 cm et 5 cm soit entre 5 cm et 6 cm.
   Finalement

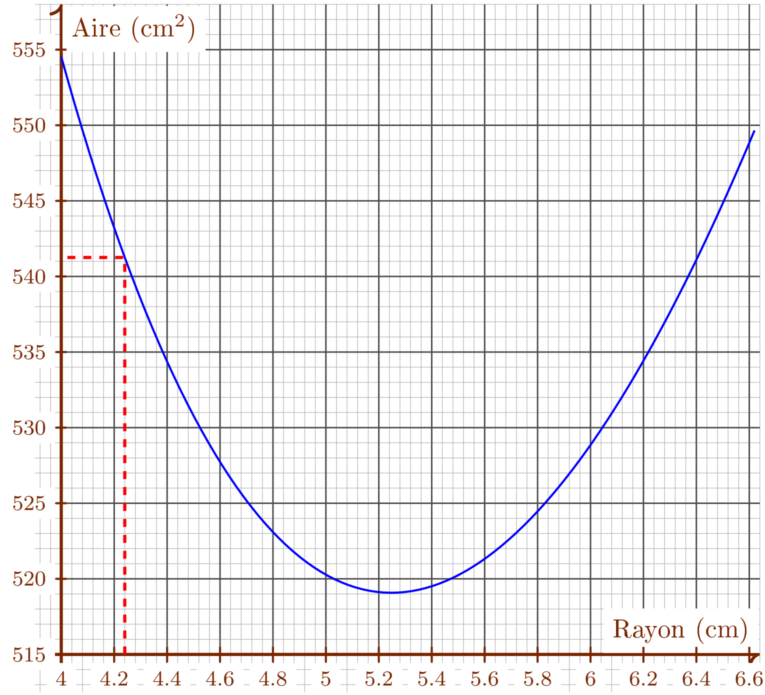
   l'aire du cylindre semble minimale pour un rayon compris entre 4 cm et 6 cm.

4. (a) Un petit raisonnement par l'absurde.

   Si l'aire était proportionnelle au rayon alors la fonction $r \mapsto A$ serait une fonction linéaire. Or la courbe représentative d'une fonction linéaire est une droite et donc cela contredirait la représentation graphique qui nous est fournie.

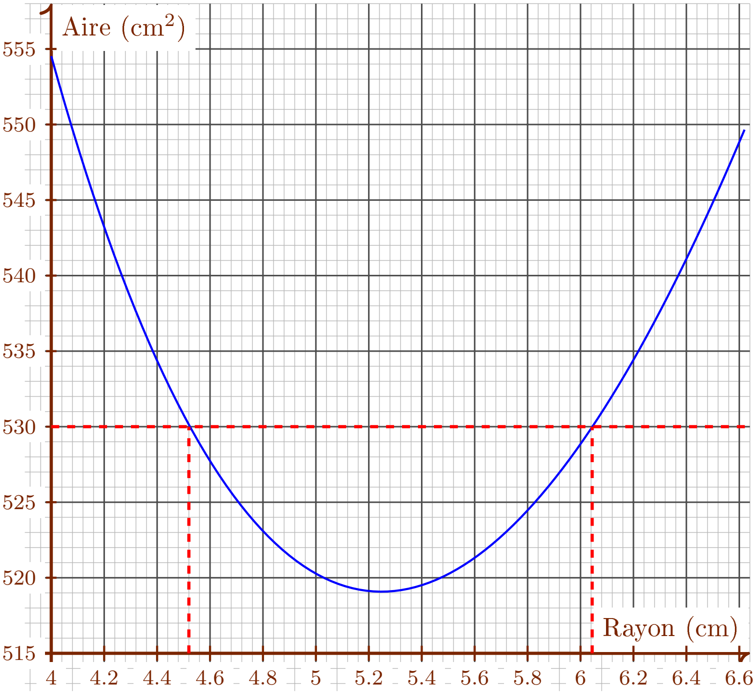
Nécessairement :

L'aire totale n'est pas proportionnelle au rayon.



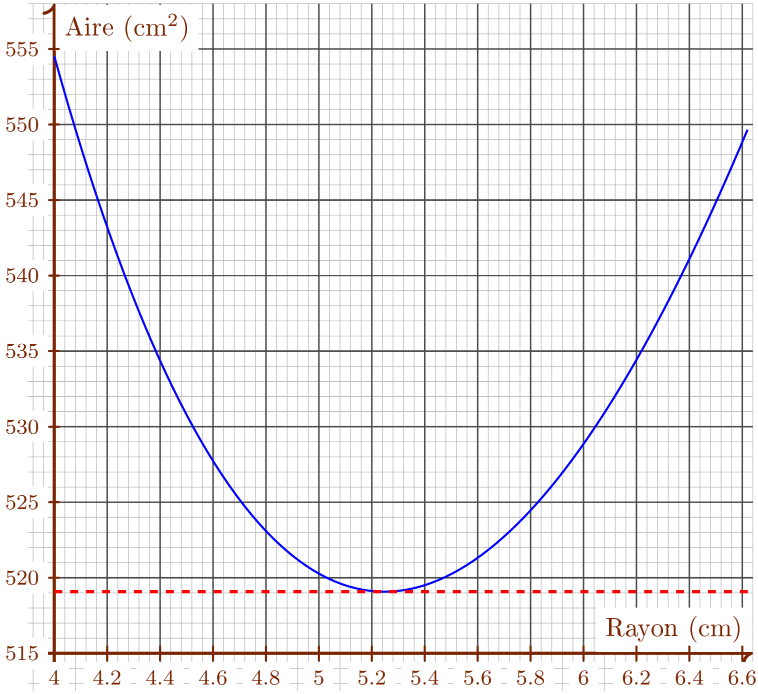
(b)

Si le rayon est de 4,24 cm l'aire totale est de 541,2 cm^2.



(c)

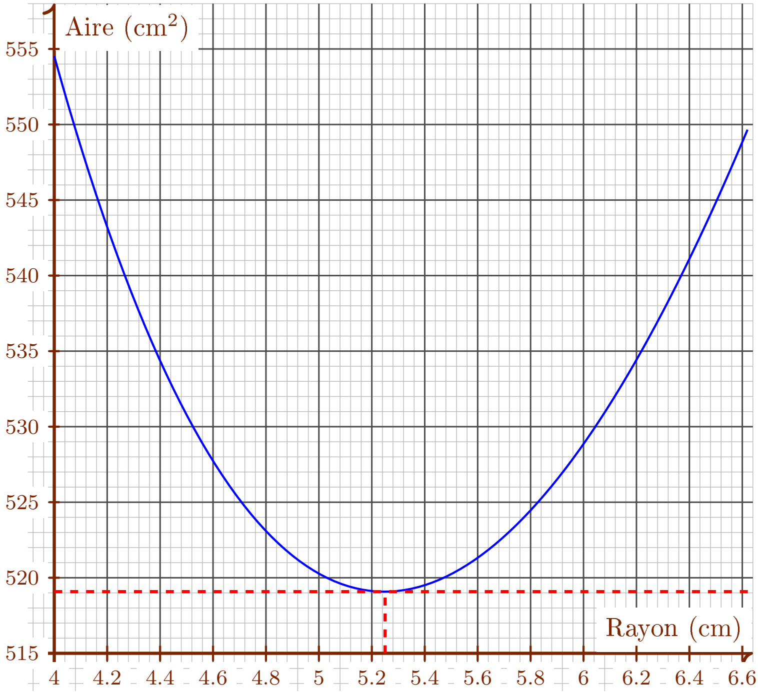
L'aire totale est de 530 cm^2 si le rayon mesure 5,2 cm ou 6,4 cm.



(d)

L'aire totale minimale est de 519 cm^2.

(e)



> Le rayon correspondant à une aire totale minimale mesure 5,24 cm.

(f) Nous avons établi à la question I.B.2 que, pour r et h exprimés en centimètres :

$$h = \frac{908}{\pi r^2}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} h &= \frac{908}{\pi \times 5{,}24^2} \\ &\approx 10{,}5262 \end{aligned}$$

> Lorsque l'aire totale du cylindre est minimale la hauteur est de 10,5 cm.

Partie C : livraison des boîtes.

Comparons les différents cartons.

	Carton 1	Carton 2	Carton 3
Masse	$1 \times 5 \times 5 \times 0{,}880$ kg $= 22$ kg	$3 \times 4 \times 2 \times 0{,}880$ kg $=$ $21{,}12$ kg	$3 \times 3 \times 3 \times 0{,}880$ kg $=$ $23{,}76$ kg
Somme des dimensions	$1 \times 11{,}8$ cm $+ 5 \times 9{,}9$ cm $+ 5 \times 9{,}9$ cm $= 110{,}8$ cm	$3 \times 11{,}8$ cm $+ 4 \times 9{,}9$ cm $+ 2 \times 9{,}9$ cm $= 94{,}8$ cm	$3 \times 11{,}8$ cm $+ 3 \times 9{,}9$ cm $+ 3 \times 9{,}9$ cm $= 94{,}8$
Condition de masse est-elle vérifiée ?	Oui	Oui	Non
Condition de longueur est-elle vérifiée ?	Non	Oui	Oui

Seul le carton 2 convient car il respecte simultanément les deux conditions imposées.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

1. Calculons BC.

   ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} BC^2 &= (432\ \mathrm{cm})^2 + (390\ \mathrm{cm})^2 \\ &= \left(432 \times \frac{1}{100}\ \mathrm{m}\right)^2 + \left(390 \times \frac{1}{100}\ \mathrm{m}\right)^2 \\ &= 4{,}32^2\ \mathrm{m}^2 + 3{,}90^2\ \mathrm{m}^2 \\ &= \left(4{,}32^2\ \mathrm{m}^2\right) + \left(3{,}90^2\ \mathrm{m}^2\right) \\ &= \left(4{,}32^2 + 3{,}90^2\right)\ \mathrm{m}^2 \\ &= 33{,}8724\ \mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Puisque BC est une longueur donc une grandeur positive :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{33{,}8724\ \mathrm{m}^2} \\ &= \sqrt{33{,}8724}\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{BC = 5{,}82\ \mathrm{m}.}$$

2. (a) Déterminons AD.

* Calculons DB.

. Configuration de Thalès. Les points A, D et B d'une part, et les points C, E, B d'autre part sont alignés dans cet ordre.

. Hypothèse du théorème de Thalès. Puisque $(AC) \perp (AB)$ et $(DE) \perp (AB)$ donc $(AC) \parallel (DE)$.

Nous en déduisons d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DE}{AC}.$$

Cette égalité équivaut successivement à

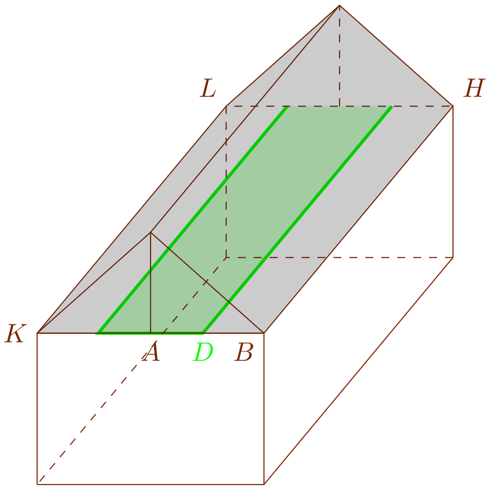
$$\begin{aligned} \frac{DB}{AB} \times AB &= \frac{DE}{AC} \times AB \\ DB &= \frac{1{,}80\ \mathrm{m}}{3{,}90\ \mathrm{m}} \times (4{,}32\ \mathrm{m}) \\ DB &= \frac{1{,}80}{3{,}90} \times 4{,}32\ \mathrm{m} \\ DB &= \frac{648}{325}\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

* Déduisons-en AD :

$$\begin{aligned} AD &= AB - DB \\ &= (4{,}32 \text{ m}) - \left(\frac{648}{325} \text{ m}\right) \\ &\approx 2{,}3261 \text{ m} \end{aligned}$$

Le point D est à 2,33 m du point A.

(b) Déterminons la superficie Carrez S_c.



La surface au sol pour laquelle la hauteur sous plafond est supérieure ou égale à 1,80 m, est un rectangle de $2AD = 2 \times 2{,}33$ m de large et 20 m de long donc

$$\begin{aligned} S_c &= (2 \times 2{,}33 \text{ m}) \times (20 \text{ m}) \\ &= 2 \times 2{,}33 \times 20 \text{ m}^2 \\ &= 93{,}2 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

La surface correspondant à la loi Carrez est 93 m^2.

Exercice 2.

1. En lisant les questions de l'exercice nous remarquons que ce ne sont pas tant le tickets qui nous intéresse que la valeur des lots éventuellement obtenus. Nous allons donc, pour faciliter les notations des événements introduire une variable aléatoire. Il est bien sûr possible s'en passer.

   Notons X la variable aléatoire qui à chaque ticket associe la valeur du lot correspondant en euro.

   Calculons $\mathbb{P}(X > 0)$.

   Nous pouvons supposer que tout les tickets ont la même chance d'être tirés. Il y a donc équiprobabilité ente les tickets.
   $\{X > 0\}$ est réalisé par $1 + 5 + 10 + 14 + 30 + 100 = 160$ issues (ticket) et l'univers tout entier contient 4 000 issues (ticket) donc

   $$\mathbb{P}(X > 0) = \frac{160}{4000}.$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(X > 0) = 0{,}04.}$$

2. Calculons $\mathbb{P}(X = 0{,}50)$.

   Il y a équiprobabilité entre les ticket, $\{X = 0{,}50\}$ est réalisé par 100 issues et l'univers en comporte 4 000 donc :

   $$\mathbb{P}(X = 0{,}50) = \frac{100}{4000}.$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(X = 0{,}50) = \tfrac{1}{40}.}$$

   Soit p le pourcentage correspondant à une probabilité de $\frac{1}{40}$.
   Nous avons

   $$\frac{1}{40} = \frac{p}{100}$$

   ce qui équivaut successivement à :

   $$\frac{1}{40} \times 100 = \frac{p}{100} \times 100$$
   $$2{,}5 = p$$

$$p = 2{,}5\ \%.$$

3. Calculons $\mathbb{P}(X \geqslant 100)$.

   Il y a équiprobabilité entre les ticket, $\{X \geqslant 100\}$ est réalisé par $10+5+1 = 16$ issues et l'univers en comporte 4 000 donc :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 100) = \frac{16}{4000}.$$

$$\mathbb{P}(X \geqslant 100) = 0{,}004.$$

4. Calculons la valeur moyenne $\overline{x}$ d'un lot en ne considérant que les ticket gagnants.

   En utilisant la formule de la moyenne pondérée :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{1 \times 899 + 5 \times 250 + \cdots + 100 \times 0{,}50}{1 + 5 + \cdots + 100} \\ &= 29{,}53125\end{aligned}$$

La valeur moyenne d'un lot est de 29,53 €, en ne considérant que les tickets gagnants.

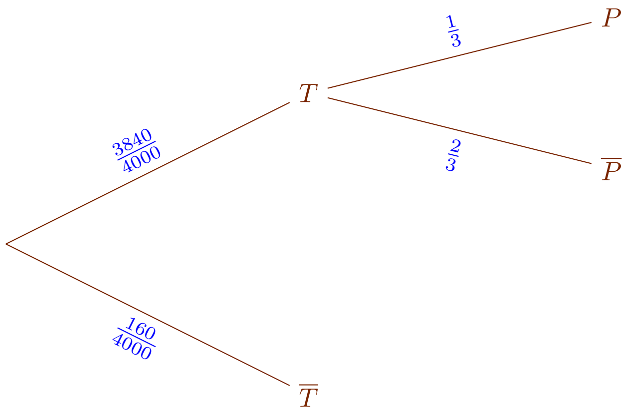
5. Déterminons la somme S que rapporte la tombola.

   En admettant que tout les ticket sont vendus, leur vente rapporte $4\,000 \times 2$ € $= 8\,000$ €.
   Un lot valant en moyenne 29,53125 €, le coût occasionné par l'achat des lots est : $160 \times 29{,}53125$ € $= 4\,725$ €.
   Donc

$$S = (8\,000\ €) - (4\,725\ €)$$

$$S = 3\,275\ €.$$

6. Notons T l'événement « Obtenir un ticket perdant » et P l'événement « Obtenir un lot publicitaire ».
La situation peut être modélisée par l'arbre :



Calculons $\mathbb{P}(T \cap P)$.

$\mathbb{P}(T) > 0$ donc d'après la formule des probabilités composées (principe multiplicatif) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \cap P) &= \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(P) \\ &= \frac{3840}{4000} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(T \cap P) = 0;32.}$$

Exercice 3.

1. Déterminons la sortie du programme A lorsqu'on choisit 10 en entrée.

Dessinons le tableau d'état des variables :

Instruction	a	b	c	d
mettre a à *réponse*	10			
mettre b à $a - 4$	10	$10 - 4 = 6$		
mettre c à $b \times b$	10	6	$6 \times 6 = 36$	
mettre d à $c - 16$	10	6	36	$36 - 16 = 20.$

Si l'on choisit 10 en entrée le programme renvoie 20.

2. Déterminons la sortie du programme B lorsqu'on choisit 5,2 en entrée.

   Dessinons le tableau d'état des variables :

Instruction	x
Choisir un nombre x	5,2
Ôter 4 à ce nombre	$5{,}2 - 4 = 1{,}2$
Effectuer le produit ...	$1{,}2 \times (2 \times 5{,}2) = 12{,}48$

   Si l'on choisit 5,2 en entrée le programme renvoie 12,48.

3. Déterminons si les programmes, pour une même valeur x entrée, peuvent renvoyer le même nombre.

   Nous allons procéder par analyse-synthèse.

   * Analyse. En appliquant le programme A au nombre x (comme avec le tableau d'état des variables précédent) nous obtenons en sortie : $(x-4)^2 - 16$.
     En appliquant le programme B au nombre x (comme avec le tableau d'état des variables précédent) nous obtenons en sortie : $2x(x-4)$.
     Nous recherchons une valeur de x telle que

     $$(x-4)^2 - 16 = 2x(x-4)$$

     La précédente égalité équivaut successivement à :

     $$\begin{aligned}(x-4)^2 - 16 - 2x(x-4) &= 2x(x-4) - 2x(x-4)\\ (x-4)^2 - 16 - 2x(x-4) &= 0\\ x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 - 16 - 2x \times x - 2x \times (-4) &= 0\\ x^2 - 8x + 16 - 16 - 2x^2 + 8x &= 0\\ -x^2 &= 0\\ x &= 0\end{aligned}$$

   * Synthèse. On vérifie immédiatement qu'en choisissant 0 en entrée les deux programmes renvoient 0.

La seule valeur pour laquelle les programmes renvoient le même nombre est 0.

4. Résolvons l'équation $(x-4)^2 - 16 = 0$.

$$\begin{aligned}(x-4)^2 - 16 = 0 &\Leftrightarrow (x-4)^2 - 4^2 = 0\\ &\Leftrightarrow [(x-4)-4]\,[(x-4)+4] = 0\\ &\Leftrightarrow (x-8)x = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x-8 = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 8\end{aligned}$$

0 et 8 sont bien des nombres entiers nous pouvons donc conclure

Pour obtenir 0 avec le programme A il faut choisir 8 ou 0 au départ.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2. (a)
   (b)
3.

Situation 2.

1.
2.
3.
4.

Situation 3.

1.
2.
3.
4.