# Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Mme Colle-Guedel et à Mme Malassé pour les corrections apportées.

*Durée : 4 heures.*
*Épreuve notée sur* 40.

## I Première partie (13 points).

**Partie A : boîte de sauce tomate.**

Un fabricant de sauce tomate utilise des boîtes de conserve de forme cylindrique de diamètre 99 mm et de hauteur 118 mm.

Le format de ces boîtes est appelé $\dfrac{4}{4}$.

| Rappel du volume d'un cylindre : $$V = \textit{Aire de la base} \times \textit{hauteur}.$$ |
|---|

Dans tout cet exercice, on négligera l'épaisseur du métal.

1. Calculer le volume, en cm$^3$, d'une boîte de conserve $\dfrac{4}{4}$. Arrondir le résultat à l'unité.

   Calculons le volume $V_1$ de la boîte.

   Puisque la base de ce cylindre est un disque de rayon $\frac{99}{2}$ mm, d'après la formule qui nous est rappelée :

$$\begin{aligned}
V_1 &= \left[\pi\left(\frac{99}{2}\ \text{mm}\right)^2\right] \times (118\ \text{mm}) \\
&= \pi \times \left(\frac{99}{2}\right)^2 \times 118\ \text{mm}^2 \cdot \text{mm} \\
&= 289\,129{,}5\pi\ \text{mm}^3 \\
&= 289\,129{,}5\pi\left(\frac{1}{10}\ \text{cm}\right)^3 \\
&= 289\,129{,}5\pi \times \frac{1}{1000}\ \text{cm}^3 \\
&\approx 908{,}327\,11\ \text{cm}^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{V_1 \approx 908\ \text{cm}^3.}$$

2. La contenance affichée sur la boîte est 850 mL. Vérifier qu'une boîte remplie à 95 % contient bien au moins 850 mL de sauce tomate.

   Calculons le volume $V_2$ correspondant à 95 % du volume de la boîte précédente.

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{95}{100} \times V_1 \\
&= \frac{95}{100} \times 289{,}129\,5\pi\ \text{cm}^3 \\
&= \frac{95}{100} \times 289{,}129\,5\pi\ \text{mL} \\
&\approx 862{,}9107\ \text{mL}
\end{aligned}$$

   Nous avons bien $V_2 > 850$ mL.

$$\boxed{\text{La boîte contient au moins 850 mL.}}$$

3. On considère une nouvelle boîte de même hauteur et dont le diamètre est le double de la précédente. Le volume de la nouvelle boîte est-il le double du volume d'une boîte $\frac{4}{4}$ ? Justifier la réponse.

Nous pourrions faire les calculs numériques pour comparer les volumes de boîtes mais nous allons démontrer que ce résultat est inexacte pour tous les cylindres.

Démontrons que doubler le diamètre ne signifie pas doubler le volume.

Notons $d$ le diamètre de la base du cylindre et $h$ sa hauteur. Alors son volume est :

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times h \\ &= \frac{1}{4}\pi d^2 h \end{aligned}$$

Le volume obtenu en doublant le diamètre est :

$$\begin{aligned} V_4 &= \pi \left(\frac{2d}{2}\right)^2 \times h \\ &= \pi d^2 h \end{aligned}$$

Nous remarquons que : $4V_3 = V_4$ et donc (hormis dans le cas de volumes nuls) :

lorsque le diamètre double le volume du cylindre ne double pas.

4. On considère une autre boîte de conserve de diamètre 73 mm et de hauteur 54 mm. Le format de cette boîte s'appelle $\frac{1}{4}$. Calculer le volume de cette boîte cylindrique arrondi au cm$^3$ puis justifier l'appellation du format $\frac{1}{4}$.

   * Calculons le volume $V_5$ de cette nouvelle boîte.

   Reprenons le raisonnement de la question I.A.1

$$\begin{aligned}
V_5 &= \left[\pi\left(\frac{73}{2}\text{ mm}\right)^2\right] \times (54\text{ mm}) \\
&= \pi \times \left(\frac{73}{2}\right)^2 \times 54\text{ mm}^2 \cdot \text{mm} \\
&= 71\,941{,}5\pi\text{ mm}^3 \\
&= 71\,941{,}5\pi\left(\frac{1}{10}\text{ cm}\right)^3 \\
&= 71\,941{,}5\pi \times \frac{1}{1000}\text{ cm}^3 \\
&\approx 226{,}010\,8\text{ cm}^3
\end{aligned}$$

$$V_5 \approx 226\text{ cm}^3.$$

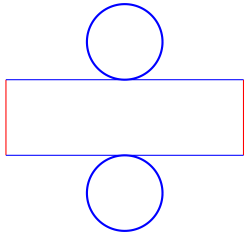
* Nous remarquons que $V_5 \approx \frac{1}{4}V_1$. Et donc :

le format de cette boîte est appelé $\dfrac{1}{4}$ car le volume de cette boîte est un quart du volume de la boîte appelée $\dfrac{4}{4}$.

**Partie B : minimisation du coût de fabrication d'une boîte de conserve.**

Le fabricant doit produire des boîtes de conserve cylindriques de volume fixé 908 cm$^3$. Il souhaite minimiser le coût du métal, pour cela il cherche à minimiser l'aire totale $A$ de la boîte ; celle-ci correspond à la somme de l'aire des disques de base et de l'aire de la surface latérale du cylindre. Il étudie l'évolution de l'aire de métal totale $A$, en centimètre carré, en fonction du rayon $r$, en centimètre, du disque de base.

1. Dessiner à main levée un patron d'une boîte de conserve cylindrique en repassant de la même couleur les éléments de même longueur.



2. Sachant que le volume de la boîte est de 908 cm$^3$, donner l'expression de la hauteur $h$, exprimée en centimètre, de la boîte en fonction du rayon $r$.

   Déterminons $h$ en fonction de $r$.

   Le volume du cylindre est en centimètre cube

$$V_6 = 908$$

   Autrement dit, $h$ et $r$ étant exprimés en centimètre :

$$\pi r^2 h = 908$$

   ce qui équivaut successivment à :

$$\frac{\pi r^2 h}{\pi r^2} = \frac{908}{\pi r^2}, \quad \text{en supposant } r > 0$$

   Finalement

$$\boxed{h = \frac{908}{\pi r^2}.}$$

3. Pour calculer l'aire totale des cylindres de rayons différents, on a construit à l'aide d'un tableur la feuille de calcul suivante :

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Rayon r (cm) | Hauteur h (cm) | Aire d'un disque de base (cm$^2$) | Aire latérale (cm$^2$) | Aire totale du cylindre (cm$^2$) |
| 2 | 1 | 289,0 | 3,1 | 1816,0 | 1822,3 |
| 3 | 2 | 72,3 | 12,6 | 908,0 | 933,1 |
| 4 | 3 | 32,1 | 28,3 | 605,3 | 661,9 |
| 5 | 4 | 18,1 | 50,3 | 454,0 | 554,5 |
| 6 | 5 | 11,6 | 78,5 | 363,2 | 520,3 |
| 7 | 6 | 8,0 | 113,1 | 302,7 | 528,9 |
| 8 | 7 | 5,9 | 153,9 | 259,4 | 567,3 |
| 9 | 8 | 4,5 | 201,1 | 227,0 | 629,1 |
| 10 | 9 | 3,6 | 254,5 | 201,8 | 710,7 |

(a) Sans justifier, parmi les cinq propositions données ci-dessous, recopier celle qui a été saisie dans la cellule `C2` et étirée vers le bas jusqu'à la cellule `C21`.

Proposition 1 : $\boxed{= \texttt{PI()} * \texttt{A1} * \texttt{A1}}$

Proposition 2 : $\boxed{= \texttt{PI()} * \texttt{A2} * \texttt{A2}}$

Proposition 3 : $\boxed{= \texttt{PI()} * 49{,}5 * 49{,}5}$

Proposition 4 : $\boxed{= \texttt{PI()} * 1 * 1}$

Proposition 5 : $\boxed{= \texttt{PI()} * \texttt{B2} * \texttt{B2}}$

Rappel :« `PI()` » *correspond à la valeur du nombre* $\pi$.

Nous devons reconstruire la formule de l'aire du disque donc :

La proposition 2 convient.

(b) On suppose que les colonnes `A`, `B`, `C` et `D` sont déjà remplies. Proposer une formule à saisir dans la cellule `E2` et copiée par glissement vers le bas jusqu'à la cellule `E21`, donnant l'aire totale du cylindre.

Il faut prendre en compte l'aire de la partie latérale rectangulaire, `D2`, et l'aire des deux bases, `C2`.

Formule en `E2` : $\boxed{= \texttt{D2} + 2 * \texttt{C2}}$.

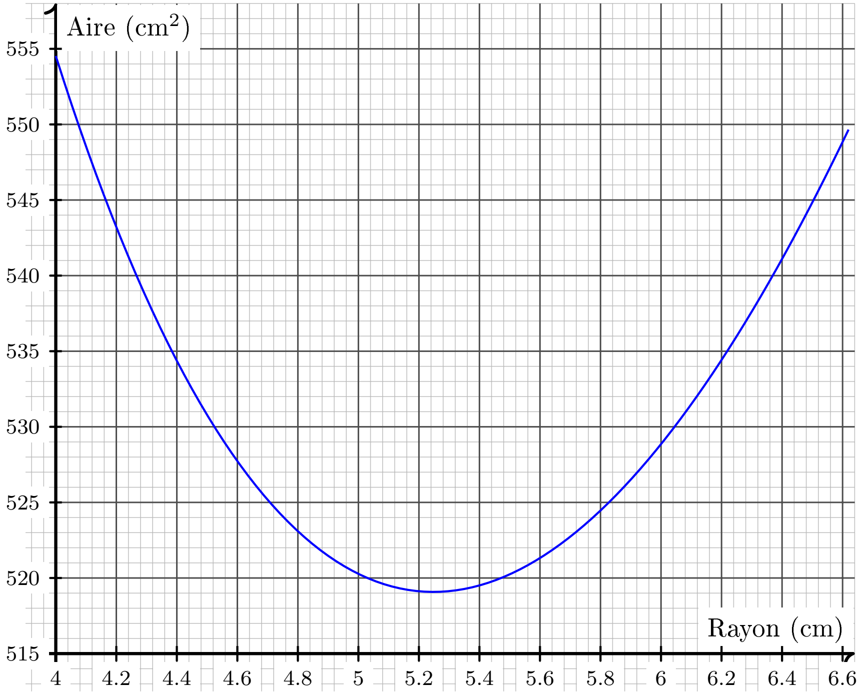
(c) En utilisant la feuille de calcul ci-dessus, conjecturer un encadrement d'amplitude minimale du rayon, correspondant au coût minimal de métal pour la fabrication de cette boîte de conserve.

Déterminons un encadrement du rayon correspondant à une aire minimale $A_m$.

La plus petite aire calculée est de 520,3 cm$^2$. Nous pouvons supposer (si les variations de l'aire ne sont pas trop étranges) que la valeur minimale $A_m$ est au voisinage de 520,3 cm$^3$ : soit entre 554,5 cm$^2$ et 520,3 cm$^3$ soit entre 520,3 cm$^2$ et 528,9 cm$^2$.
Autrement dit le minimum est obtenu pour un rayon soit entre 4 cm et 5 cm soit entre 5 cm et 6 cm.
Finalement

l'aire du cylindre semble minimale pour un rayon compris entre 4 cm et 6 cm.

4. Pour affiner la précision, on a représenté graphiquement, ci-dessous, l'aire totale $A$ en fonction du rayon $r$ :




Répondre aux questions (a) à (e) par lecture graphique.

(a) L'aire totale $A$ est-elle proportionnelle au rayon $r$ ? Justifier.

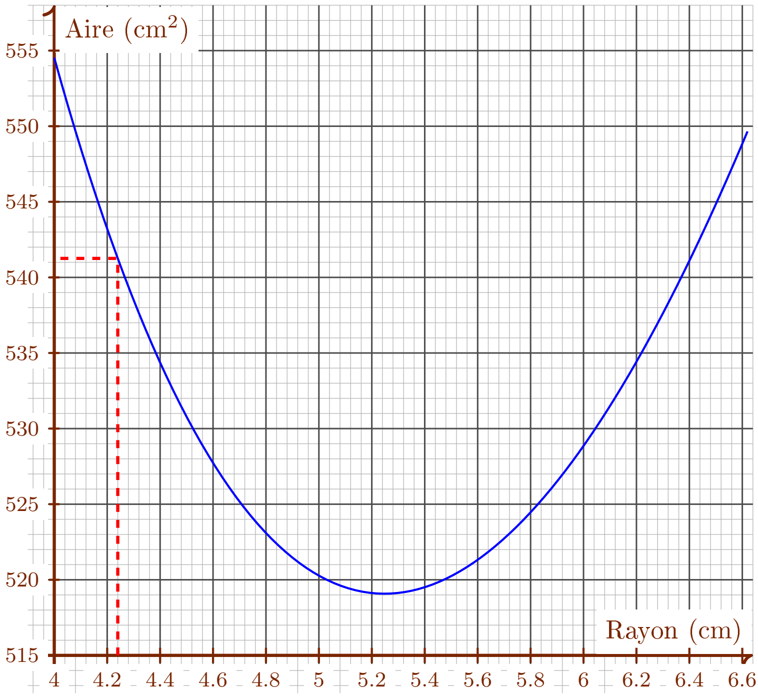
Un petit raisonnement par l'absurde.

Si l'aire était proportionnelle au rayon alors la fonction $r \mapsto A$ serait une fonction linéaire. Or la courbe représentative d'une fonction linéaire est une droite et donc cela contredirait la représentation graphique qui nous est fournie.

Nécessairement :

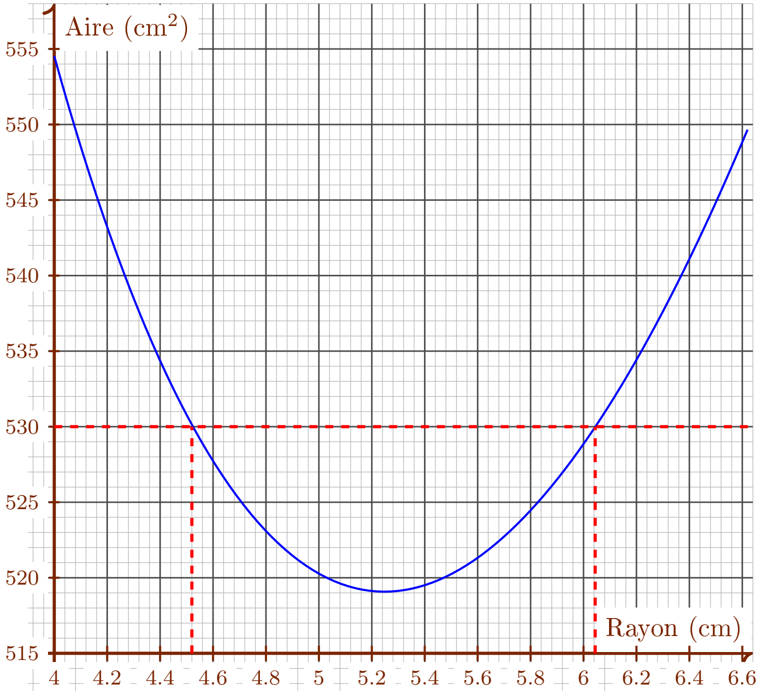
L'aire totale n'est pas proportionnelle au rayon.

(b) Déterminer l'aire totale pour un rayon de 4,24 cm.



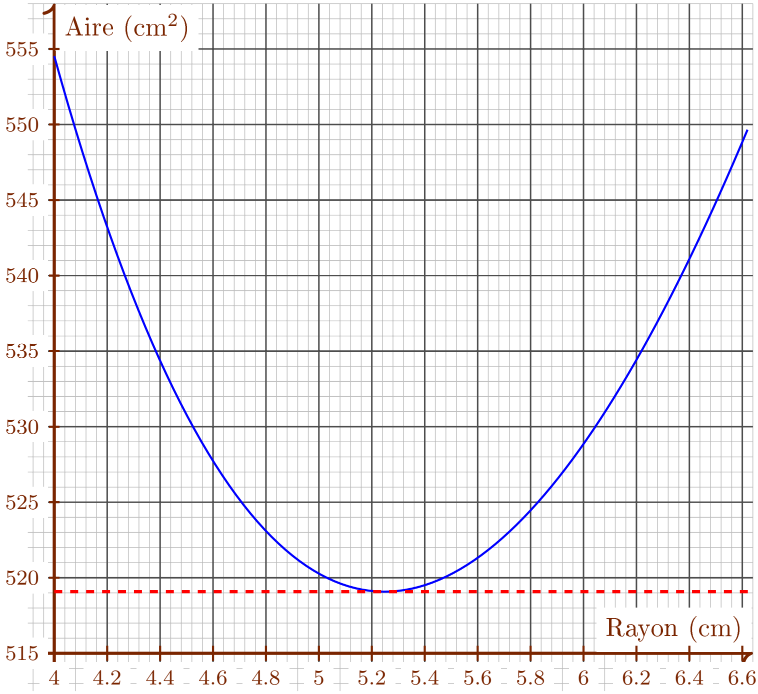

Si le rayon est de 4,24 cm l'aire totale est de 541,2 cm$^2$.

(c) Déterminer les rayons correspondant à une aire totale de 530 cm$^2$.



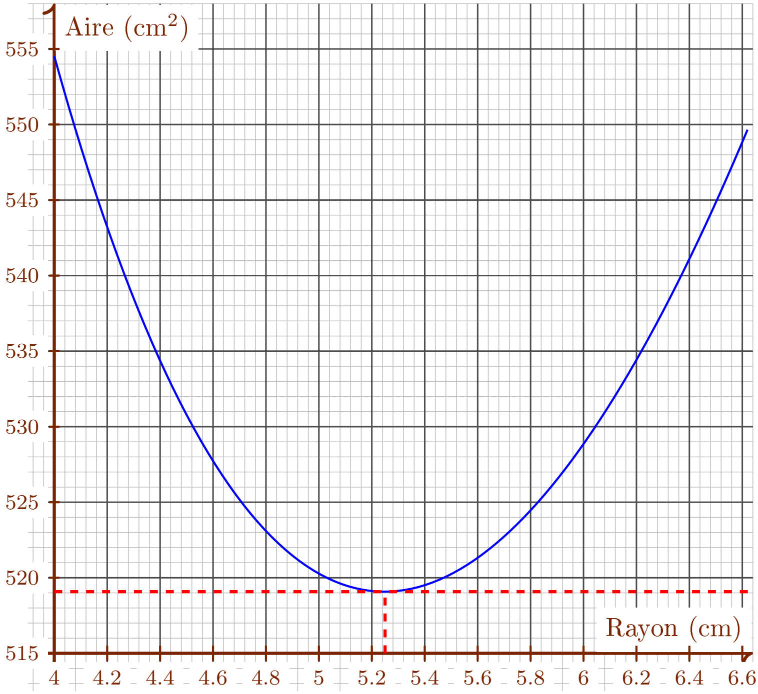

L'aire totale est de 530 cm$^2$ si le rayon mesure 4,52 cm ou 6,04 cm.

(d) Déterminer l'aire totale minimale.




L'aire totale minimale est de 519 cm$^2$.

(e) Donner le rayon correspondant.




Le rayon correspondant à une aire totale minimale mesure 5,24 cm.

(f) Déterminer, par un calcul, la hauteur correspondante. Arrondir au millimètre.

Nous avons établi à la question I.B.2 que, pour $r$ et $h$ exprimés en centimètres :

$$h = \frac{908}{\pi r^2}$$

Nous en déduisons :

$$h = \frac{908}{\pi \times 5{,}24^2}$$
$$\approx 10{,}5262$$

Lorsque l'aire totale du cylindre est minimale la hauteur est de 10,5 cm.

**Partie C : livraison des boîtes.**

Le fabricant de sauce tomate souhaite expédier par carton ses boîtes de conserve modèle $\frac{4}{4}$ de diamètre 99 mm, de hauteur 118 mm et de masse 880 g. Il a le choix entre les 3 types de cartons ci-dessous (les boîtes sont posées sur leur base dans les cartons) :

| |
|---|
| **Carton 1** |
| Un seul étage contenant 5 boîtes en longueur et 5 boîtes en largeur. |
| **Carton 2** |
| Trois étages contenant chacun 4 boîtes en longueur et 2 boîtes en largeur. |
| **Carton 3** |
| Trois étages contenant chacun 3 boîtes en longueur et 3 boîtes en largeur. |

Le transporteur lui impose deux conditions :

- La masse du carton ne doit pas dépasser 22 kg.
- La somme des dimensions longueur + largeur + hauteur ne doit pas dépasser 100 cm.

Quel(s) carton(s) peut-il choisir ? Justifier la réponse pour chaque type de carton.

Comparons les différents cartons.

| | Carton 1 | Carton 2 | Carton 3 |
|---|---|---|---|
| Masse | $1 \times 5 \times 5 \times 0{,}880$ kg $= 22$ kg | $3 \times 4 \times 2 \times 0{,}880$ kg $= 21{,}12$ kg | $3 \times 3 \times 3 \times 0{,}880$ kg $= 23{,}76$ kg |
| Somme des dimensions | $1 \times 11{,}8$ cm $+ 5 \times 9{,}9$ cm $+ 5 \times 9{,}9$ cm $= 110{,}8$ cm | $3 \times 11{,}8$ cm $+ 4 \times 9{,}9$ cm $+ 2 \times 9{,}9$ cm $= 94{,}8$ cm | $3 \times 11{,}8$ cm $+ 3 \times 9{,}9$ cm $+ 3 \times 9{,}9$ cm $= 94{,}8$ |
| Condition de masse est-elle vérifiée ? | Oui | Oui | Non |
| Condition de longueur est-elle vérifiée ? | Non | Oui | Oui |

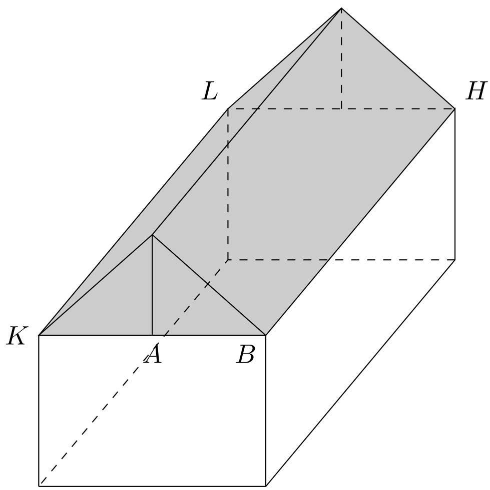
Seul le carton 2 convient car il respecte simultanément les deux conditions imposées.

# II Deuxième partie (13 points).

*Cette partie est composée de trois exercices indépendants.*

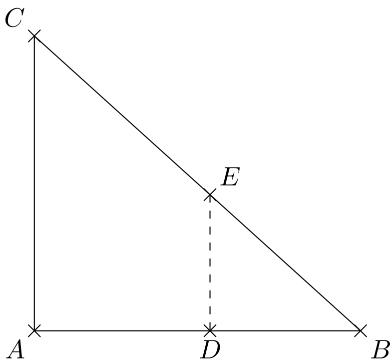
**Exercice 1.**

Un couple souhaite aménager les combles de sa maison, représentés par la partie grisée du schéma ci-dessous.



$KBHL$ est un rectangle et le point $A$ est le milieu de $[BK]$.

Le triangle $ABC$ ci-dessous représente une coupe de profil d'une partie des combles.




On donne les informations suivantes :

- la droite $(AC)$ est perpendiculaire à la droite $(AB)$ ;
- $AB = 432$ cm et $AC = 390$ cm ;
- Les points $D$ et $E$ sont tels que $D$ appartient au segment $[AB]$, $E$ appartient au segment $[BC]$, la droite $(DE)$ est perpendiculaire à la droite $(AB)$ et $DE = 1{,}80$ m.

1. Démontrer que $BC = 5{,}82$ m.

   Calculons $BC$.

   $ABC$ est rectangle en $A$ donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

   Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} BC^2 &= (432 \text{ cm})^2 + (390 \text{ cm})^2 \\ &= \left(432 \times \frac{1}{100} \text{ m}\right)^2 + \left(390 \times \frac{1}{100} \text{ m}\right)^2 \\ &= 4{,}32^2 \text{ m}^2 + 3{,}90^2 \text{ m}^2 \\ &= \left(4{,}32^2 \text{ m}^2\right) + \left(3{,}90^2 \text{ m}^2\right) \\ &= \left(4{,}32^2 + 3{,}90^2\right) \text{ m}^2 \\ &= 33{,}8724 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Puisque $BC$ est une longueur donc une grandeur positive :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{33{,}8724 \text{ m}^2} \\ &= \sqrt{33{,}8724} \text{ m} \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{BC = 5{,}82 \text{ m.}}$$

2. Le couple cherche à connaître la superficie Carrez des combles, c'est-à-dire la surface pour laquelle la hauteur sous plafond est supérieure ou égale à 1,80 m.

   (a) Le segment $[DE]$, perpendiculaire au sol, représente une hauteur sous plafond de 1,80 m. À quelle distance du point $A$, arrondie au centimètre, se trouve le point $D$ ?

   Déterminons $AD$.

   * Calculons $DB$.

     . Configuration de Thalès. Les points $A$, $D$ et $B$ d'une part, et les points $C$, $E$, $B$ d'autre part sont alignés dans cet ordre.

     . Hypothèse du théorème de Thalès. Puisque $(AC) \perp (AB)$ et $(DE) \perp (AB)$ donc $(AC) \parallel (DE)$.

     Nous en déduisons d'après le théorème de Thalès que

     $$\frac{DB}{AB} = \frac{DE}{AC}.$$

     Cette égalité équivaut successivement à

     $$\begin{aligned} \frac{DB}{AB} \times AB &= \frac{DE}{AC} \times AB \\ DB &= \frac{1{,}80 \text{ m}}{3{,}90 \text{ m}} \times (4{,}32 \text{ m}) \\ DB &= \frac{1{,}80}{3{,}90} \times 4{,}32 \text{ m} \\ DB &= \frac{648}{325} \text{ m} \end{aligned}$$

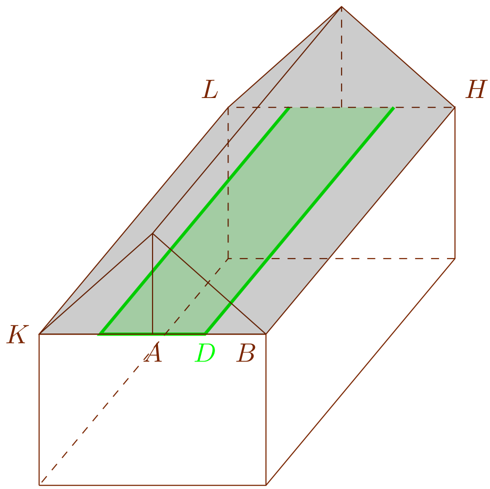
* Déduisons-en $AD$ :

$$\begin{aligned} AD &= AB - DB \\ &= (4{,}32 \text{ m}) - \left(\frac{648}{325} \text{ m}\right) \\ &\approx 2{,}3261 \text{ m} \end{aligned}$$

Le point $D$ est à 2,33 m du point $A$.

(b) La longueur $[BH]$ de la maison mesure 20 m. En déduire la superficie Carrez des combles, arrondie au mètre carré.

Déterminons la superficie Carrez $S_c$.




La surface au sol pour laquelle la hauteur sous plafond est supérieure ou égale à 1,80 m, est un rectangle de $2AD = 2 \times 2{,}33$ m de large et 20 m de long donc

$$\begin{aligned} S_c &= (2 \times 2{,}33 \text{ m}) \times (20 \text{ m}) \\ &= 2 \times 2{,}33 \times 20 \text{ m}^2 \\ &= 93{,}2 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

La surface correspondant à la loi Carrez est 93 $\mathrm{m}^2$.

**Exercice 2.**

Lors d'un vide-grenier, les organisateurs proposent aux visiteurs d'acheter des tickets de tombola.

Le prix d'un ticket est fixé à deux euros. 4 000 tickets ont été imprimés et vendus.

Les lots ont tous été achetés par les organisateurs.

La répartition des tickets et des lots est donnée par l'extrait de tableur suivant :

| Nombre de tickets gagnants | Lot | Valeur du lot |
|---|---|---|
| 1 | Téléviseur | 899 € |
| 5 | Lecteur Blu-ray | 250 € |
| 10 | Smartphone | 125 € |
| 14 | Bracelet connecté | 59 € |
| 30 | Grille-pain | 15 € |
| 100 | Peluche | 0,50 € |
| | Ticket perdant | 0 € |

Isabelle achète un ticket de tombola.

1. Vérifier que la probabilité qu'elle gagne un lot est de 0,04.

   En lisant les questions de l'exercice nous remarquons que ce ne sont pas tant le tickets qui nous intéresse que la valeur des lots éventuellement obtenus. Nous allons donc, pour faciliter les notations des événements introduire une variable aléatoire. Il est bien sûr possible de s'en passer.

   Notons $X$ la variable aléatoire qui à chaque ticket associe la valeur du lot correspondant en euro.

   Calculons $\mathbb{P}(X > 0)$.

   Nous pouvons supposer que tout les tickets ont la même chance d'être tirés. Il y a donc équiprobabilité ente les tickets.
   $\{X > 0\}$ est réalisé par $1 + 5 + 10 + 14 + 30 + 100 = 160$ issues (ticket) et l'univers tout entier contient 4 000 issues (ticket) donc

$$\mathbb{P}(X > 0) = \frac{160}{4000}.$$

$$\mathbb{P}(X > 0) = 0{,}04.$$

2. Quelle est la probabilité qu'Isabelle gagne une peluche ? Donner la réponse sous la forme d'une fraction irréductible, puis d'un pourcentage.

   Calculons $\mathbb{P}(X = 0{,}50)$.

   Il y a équiprobabilité entre les ticket, $\{X = 0{,}50\}$ est réalisé par 100 issues et l'univers en comporte 4 000 donc :

$$\mathbb{P}(X = 0{,}50) = \frac{100}{4000}.$$

$$\mathbb{P}(X = 0{,}50) = \frac{1}{40}.$$

   Soit $p$ le pourcentage correspondant à une probabilité de $\frac{1}{40}$.
   Nous avons

$$\frac{1}{40} = \frac{p}{100}$$

   ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{1}{40}\times 100 = \frac{p}{100}\times 100$$
$$2{,}5 = p$$

$$p = 2{,}5~\%.$$

3. Déterminer la probabilité qu'elle gagne un lot dont la valeur est au moins 100 €.

   Calculons $\mathbb{P}(X \geqslant 100)$.

   Il y a équiprobabilité entre les ticket, $\{X \geqslant 100\}$ est réalisé par $10+5+1 = 16$ issues et l'univers en comporte 4 000 donc :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 100) = \frac{16}{4000}.$$

$$\mathbb{P}(X \geqslant 100) = 0{,}004.$$

4. En ne considérant que les tickets gagnants, calculer la valeur moyenne d'un lot. On donnera la valeur arrondie au centime.

   Calculons la valeur moyenne $\overline{x}$ d'un lot en ne considérant que les ticket gagnants.

   En utilisant la formule de la moyenne pondérée :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r}\\ &= \frac{1 \times 899 + 5 \times 250 + \cdots + 100 \times 0{,}50}{1 + 5 + \cdots + 100}\\ &= 29{,}53125\end{aligned}$$

   La valeur moyenne d'un lot est de 29,53 €, en ne considérant que les tickets gagnants.

5. On considère que l'achat des lots est le seul coût engagé. Quelle somme d'argent a rapporté cette tombola ?

   Déterminons la somme $S$ que rapporte la tombola.

   En admettant que tout les ticket sont vendus, leur vente rapporte $4\,000 \times 2$ € $= 8\,000$ €.
   Un lot valant en moyenne 29,53125 €, le coût occasionné par l'achat des lots est : $160 \times 29{,}53125$ € $= 4\,725$ €.
   Donc

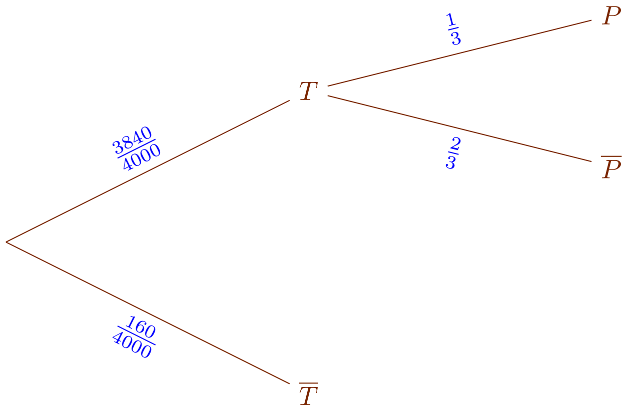
$$S = (8\,000 \text{ €}) - (4\,725 \text{ €})$$

$$S = 3\,275 \text{ €}.$$

6. L'organisateur de la tombola propose un deuxième tirage aux personnes ayant obtenu un ticket perdant. Il leur est proposé de choisir une carte parmi trois.

Une de ces trois cartes permet de gagner un lot publicitaire. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant acheté un ticket gagne un lot publicitaire ?

Notons $T$ l'événement « Obtenir un ticket perdant » et $P$ l'événement « Obtenir un lot publicitaire ».
La situation peut être modélisée par l'arbre :




Calculons $\mathbb{P}(T \cap P)$.

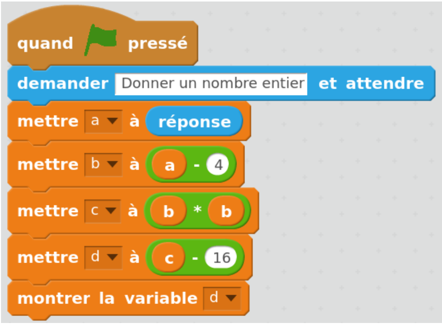
$\mathbb{P}(T) > 0$ donc d'après la formule des probabilités composées (principe multiplicatif) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \cap P) &= \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(P) \\ &= \frac{3840}{4000} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(T \cap P) = 0;32.}$$

**Exercice 3.**

Voici deux programmes de calcul, le premier est codé avec le logiciel Scratch :

<table>
<tr><th>Programme A.</th><th>Programme B.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>

- Choisir un nombre.
- Ôter 4 à ce nombre.
- Effectuer le produit du résultat obtenu par le double du nombre de départ.

</td></tr>
</table>

1. Vérifier que le nombre 10, appliqué au programme A, permet d'obtenir 20.

Déterminons la sortie du programme A lorsqu'on choisit 10 en entrée.

Dessinons le tableau d'état des variables :

| Instruction | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| mettre $a$ à *réponse* | 10 | | | |
| mettre $b$ à $a-4$ | 10 | $10-4=6$ | | |
| mettre $c$ à $b \times b$ | 10 | 6 | $6 \times 6 = 36$ | |
| mettre $d$ à $c-16$ | 10 | 6 | 36 | $36-16=20.$ |

> Si l'on choisit 10 en entrée le programme renvoie 20.

2. Quel résultat obtient-on, en appliquant le nombre 5,2 au programme B ?

Déterminons la sortie du programme B lorsqu'on choisit 5,2 en entrée.

Dessinons le tableau d'état des variables :

| Instruction | $x$ |
|---|---|
| Choisir un nombre $x$ | 5,2 |
| Ôter 4 à ce nombre | $5{,}2-4=1{,}2$ |
| Effectuer le produit ... | $1{,}2 \times (2 \times 5{,}2) = 12{,}48$ |

> Si l'on choisit 5,2 en entrée le programme renvoie 12,48.

3. En appliquant un même nombre de départ, les programmes A et B peuvent-ils donner un résultat identique ?

Déterminons si les programmes, pour une même valeur $x$ entrée, peuvent renvoyer le même nombre.

Nous allons procéder par analyse-synthèse.

* Analyse. En appliquant le programme A au nombre $x$ (comme avec le tableau d'état des variables précédent) nous obtenons en sortie : $(x-4)^2 - 16$.
En appliquant le programme B au nombre $x$ (comme avec le tableau d'état des variables précédent) nous obtenons en sortie : $2x(x-4)$.
Nous recherchons une valeur de $x$ telle que

$$(x-4)^2 - 16 = 2x(x-4)$$

La précédente égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
(x-4)^2 - 16 - 2x(x-4) &= 2x(x-4) - 2x(x-4) \\
(x-4)^2 - 16 - 2x(x-4) &= 0 \\
x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 - 16 - 2x \times x - 2x \times (-4) &= 0 \\
x^2 - 8x + 16 - 16 - 2x^2 + 8x &= 0 \\
-x^2 &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

* Synthèse. On vérifie immédiatement qu'en choisissant 0 en entrée les deux programmes renvoient 0.

La seule valeur pour laquelle les programmes renvoient le même nombre est 0.

4. Déterminer le ou les nombre(s) que l'on doit choisir au départ pour obtenir 0 comme résultat avec le programme A.

Résolvons l'équation $(x-4)^2 - 16 = 0$.

$$\begin{aligned}(x-4)^2-16=0 &\Leftrightarrow (x-4)^2-4^2=0\\ &\Leftrightarrow [(x-4)-4]\,[(x-4)+4]=0\\ &\Leftrightarrow (x-8)x=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x-8=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=8\end{aligned}$$

0 et 8 sont bien des nombres entiers nous pouvons donc conclure

Pour obtenir 0 avec le programme A il faut choisir 8 ou 0 au départ.

# III Troisième partie (14 points).

*Cette partie est composée de trois situations indépendantes.*

**Situation 1.**

Une enseignante propose, en cycle 3, le calcul 13,25 × 10.

Voici les réponses proposées par quatre élèves : a) 1,325 b) 130,25 c) 13,250 d) 132,5.

1. Analyser les réponses erronées proposées par les élèves en cherchant à expliciter les erreurs qui ont pu conduire les élèves à proposer ces réponses.

2. À la demande de l'enseignante, les élèves proposent une trace écrite de la multiplication d'un nombre décimal par 10.

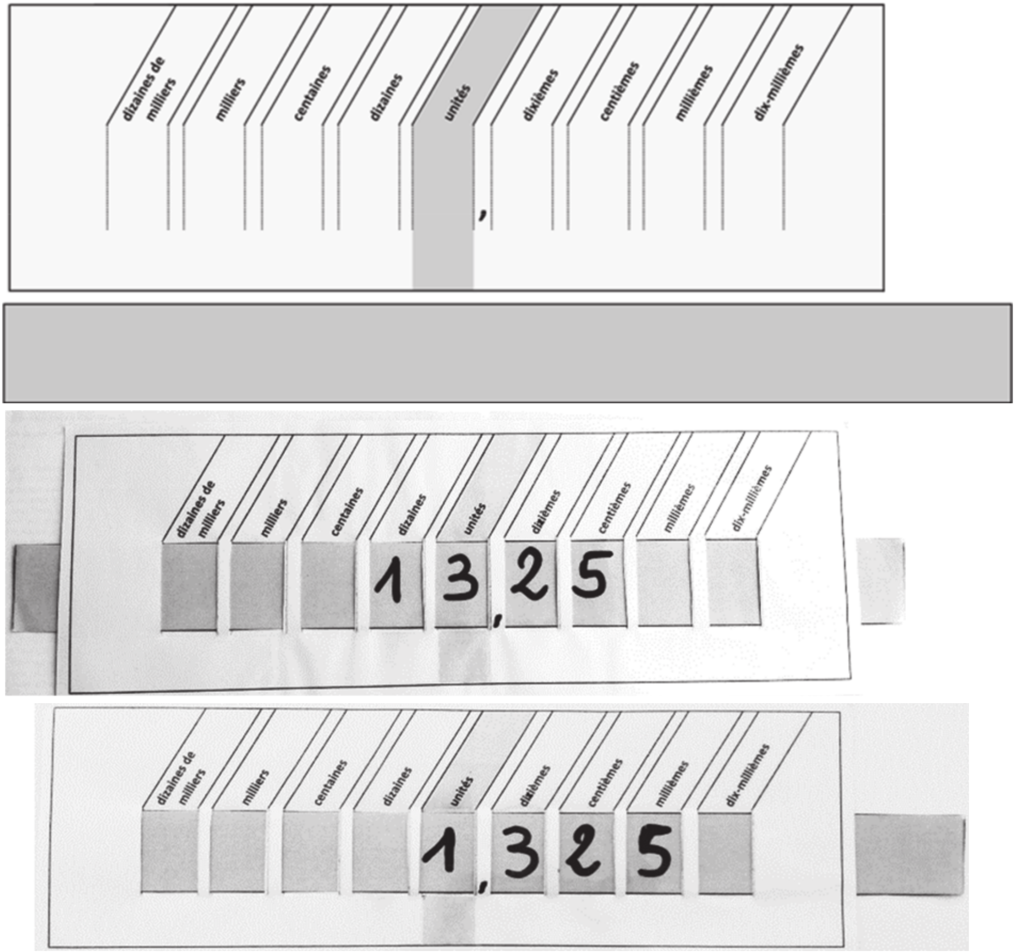
   **Élève 1** : Pour multiplier par 10, on ajoute un zéro à droite du nombre.

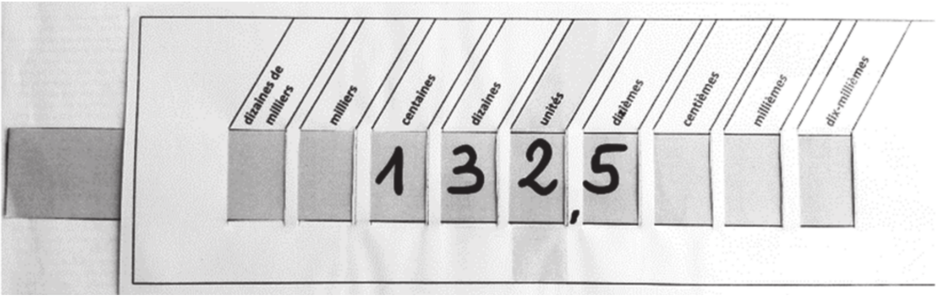
   **Élève 2** : Pour multiplier par 10, on déplace la virgule d'un rang vers la droite.

   (a) Expliquer pourquoi ces deux propositions ne peuvent pas être retenues par l'enseignante pour être notées dans les cahiers des élèves.

   (b) Proposer une institutionnalisation que l'enseignante pourrait faire noter dans les cahiers des élèves pour la multiplication d'un nombre décimal par 10.

3. En s'appuyant sur l'extrait de la ressource d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 3, EDUSCOL, Fractions et nombres décimaux au cycle 3, Annexe 4), l'enseignant propose l'utilisation d'un glisse-nombre dont une utilisation est montrée ci-après. Il est composé d'une languette sur laquelle ont écrit les chiffres d'un nombre donné, que l'on peut ensuite faire glisser de façon à faire changer les chiffres de colonne.






En quoi cet outil peut-il aider les élèves ayant donné les réponses a), b) et c) ?

**Situation 2.**

Voici un extrait de la note de service n°2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ».

> « **Modéliser » et « calculer » sont deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes à l'école élémentaire** qui doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :
> — difficultés à « modéliser » : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;
> — difficultés à « calculer » : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, la ou les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calcul utilisés.

Un enseignant propose à ses élèves de CM2 le problème suivant : « Théo achète un pain à 2,35 € et deux viennoiseries valant chacune 1,15 €. Il donne un billet de 10 € au vendeur. Combien le vendeur va-t-il rendre à Théo ? ».

Voici les réponses proposées par quatre élèves :

<table>
<tr>
<td>Élève A<br><br>10<br>+ 2,35<br>+ 1,15<br>13,50<br><br>Ça fait 13,50 €</td>
<td>Élève B<br><br>1<br>2,35<br>+ 1,15<br>+ 1,15<br>4,65<br><br>10<br>– 4,65<br>6,65<br><br>Le vendeur va rendre 6,65 €.</td>
</tr>
<tr>
<td>Élève C<br><br>2,30<br>+ 2,35<br>4,65<br><br>10, $_1$0$_1$0<br>– 4$_1$,6$_1$5<br>5, 35<br><br>Il rend 5,35 €.</td>
<td>Élève D<br><br>1<br>2,35<br>+ 1,15<br>3,50<br><br>10 – 3,50 = 7,50 €</td>
</tr>
</table>

1. En vous appuyant sur l'extrait de la note de service proposé ci-dessus, analyser les quatre propositions d'élèves en termes de réussites et d'échecs pour chacune des compétences « modéliser » et « calculer ».

2. Proposer deux activités de remédiation que vous pourriez envisager pour aider l'élève A à réussir ce type de problème, une avec du matériel et une sans matériel.

3. Que peut proposer l'enseignant à l'élève B pour qu'il puisse repérer son erreur ?

4. On considère maintenant le problème suivant : « Théo achète un pain à 2,50 €. Il donne un billet de 10 € au vendeur. Combien le vendeur va-t-il rendre à Théo ? ». En comparant les deux problèmes, donner une difficulté qu'un enseignant ne peut pas détecter en proposant ce problème à une étape.

**Situation 3.**

Dans une classe de grande section, un enseignant propose à un groupe d'élèves de retrouver l'image correspondant à la description qu'il énonce.

« Donnez-moi l'image où :

A) Le koala est devant la tour de cubes.

B) La princesse est derrière le cube.

C) Le koala est sur le cube.

D) Le koala est entre les deux tours de cubes.

E) Le koala est sous le pont de cubes. »

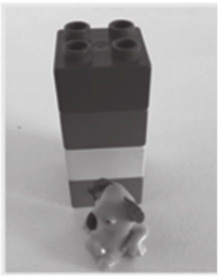


image 1

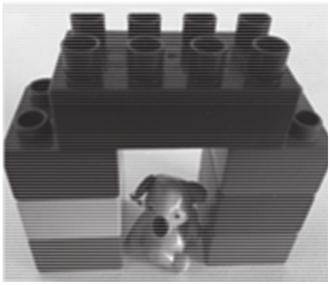


image 2

image 3

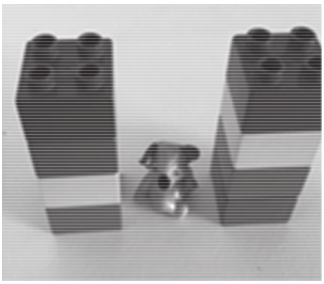


image 4

image 5

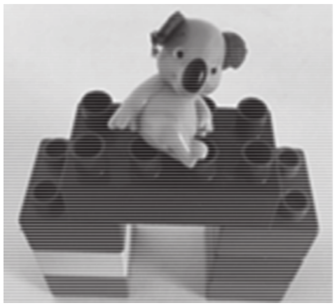


image 6


image 7


image 8

Le tableau ci-dessous répertorie les différentes réponses données par les élèves.

| Affirmations proposées | Réponses des élèves |
|---|---|
| A) Le koala est devant la tour de cubes. | 1 et 7 |
| B) La princesse est derrière le cube. | 5 |
| C) Le koala est sur le cube. | 6, 8 et 3 |
| D) Le koala est entre les deux tours de cubes. | 2 et 4 |
| E) Le koala est sous le pont de cubes. | 2 et 6 |

1. Donner un intérêt et une limite de cette situation.

2. Analyser chacune des réponses données aux affirmations C et E.

3. Tous les élèves de la classe ont réussi à donner l'image de l'assertion B. Que peut-on en conclure ?

4. Un élève fait correspondre l'image 7 à l'affirmation A en justifiant : « Le koala regarde la tour. Il est devant. ». L'enseignant propose la manipulation des objets considérés.
   Justifier le choix de l'enseignant.