Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Mme Colle-Guedel et à Mme Malassé pour les corrections apportées.

I Première partie (13 points).

Partie A : boîte de sauce tomate.

1. Calculons le volume V_1 de la boîte.

   Puisque la base de ce cylindre est un disque de rayon $\frac{99}{2}$ mm, d'après la formule qui nous est rappelée :

$$\begin{aligned} V_1 &= \left[\pi\left(\frac{99}{2}\text{ mm}\right)^2\right] \times (118\text{ mm}) \\ &= \pi \times \left(\frac{99}{2}\right)^2 \times 118\text{ mm}^2 \cdot \text{mm} \\ &= 289\,129{,}5\pi\text{ mm}^3 \\ &= 289\,129{,}5\pi\left(\frac{1}{10}\text{ cm}\right)^3 \\ &= 289\,129{,}5\pi \times \frac{1}{1000}\text{ cm}^3 \\ &\approx 908{,}327\,11\text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{V_1 \approx 908\text{ cm}^3.}$$

2. Calculons le volume V_2 correspondant à 95 % du volume de la boîte précédente.

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{95}{100} \times V_1 \\ &= \frac{95}{100} \times 289{,}129\,5\pi\text{ cm}^3 \\ &= \frac{95}{100} \times 289{,}129\,5\pi\text{ mL} \\ &\approx 862{,}9107\text{ mL} \end{aligned}$$

Nous avons bien $V_2 > 850$ mL.

La boîte contient au moins 850 mL.

3. Nous pourrions faire les calculs numériques pour comparer les volumes de boîtes mais nous allons démontrer que ce résultat est inexacte pour tous les cylindres.

   Démontrons que doubler le diamètre ne signifie pas doubler le volume.

   Notons d le diamètre de la base du cylindre et h sa hauteur. Alors son volume est :

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times h \\ &= \frac{1}{4}\pi d^2 h \end{aligned}$$

   Le volume obtenu en doublant le diamètre est :

$$\begin{aligned} V_4 &= \pi \left(\frac{2d}{2}\right)^2 \times h \\ &= \pi d^2 h \end{aligned}$$

   Nous remarquons que : $4V_3 = V_4$ et donc (hormis dans le cas de volumes nuls) :

   lorsque le diamètre double le volume du cylindre ne double pas.

4. * Calculons le volume V_5 de cette nouvelle boîte.

     Reprenons le raisonnement de la question I.A.1

$$\begin{aligned}
V_5 &= \left[\pi\left(\frac{73}{2}\text{ mm}\right)^2\right]\times(54\text{ mm})\\
&= \pi\times\left(\frac{73}{2}\right)^2\times 54\text{ mm}^2\cdot\text{mm}\\
&= 71\,941{,}5\pi\text{ mm}^3\\
&= 71\,941{,}5\pi\left(\frac{1}{10}\text{ cm}\right)^3\\
&= 71\,941{,}5\pi\times\frac{1}{1000}\text{ cm}^3\\
&\approx 226{,}010\,8\text{ cm}^3
\end{aligned}$$

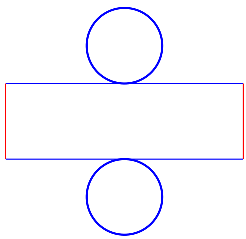
$$\boxed{V_5 \approx 226\text{ cm}^3.}$$

* Nous remarquons que $V_5 \approx \frac{1}{4}V_1$. Et donc :

le format de cette boîte est appelé $\frac{1}{4}$ car le volume de cette boîte est un quart du volume de la boîte appelée $\frac{4}{4}$.

Partie B : minimisation du coût de fabrication d'une boîte de conserve.

1.



2. Déterminons h en fonction de r.

Le volume du cylindre est en centimètre cube

$$V_6 = 908$$

Autrement dit, h et r étant exprimés en centimètre :

$$\pi r^2 h = 908$$

ce qui équivaut successivment à :

$$\frac{\pi r^2 h}{\pi r^2} = \frac{908}{\pi r^2}, \quad \text{en supposant } r > 0$$

Finalement

$$\boxed{h = \frac{908}{\pi r^2}.}$$

3. (a) Nous devons reconstruire la formule de l'aire du disque donc :

   La proposition 2 convient.

   (b) Il faut prendre en compte l'aire de la partie latérale rectangulaire, D2, et l'aire des deux bases, C2.

   Formule en E2 : $\boxed{= \mathtt{D2} + 2 * \mathtt{C2}}$.

   (c) Déterminons un encadrement du rayon correspondant à une aire minimale A_m.

   La plus petite aire calculée est de 520,3 cm^2. Nous pouvons supposer (si les variations de l'aire ne sont pas trop étranges) que la valeur minimale A_m est au voisinage de 520,3 cm^3 : soit entre 554,5 cm^2 et 520,3 cm^3 soit entre 520,3 cm^2 et 528,9 cm^2.
   Autrement dit le minimum est obtenu pour un rayon soit entre 4 cm et 5 cm soit entre 5 cm et 6 cm.
   Finalement

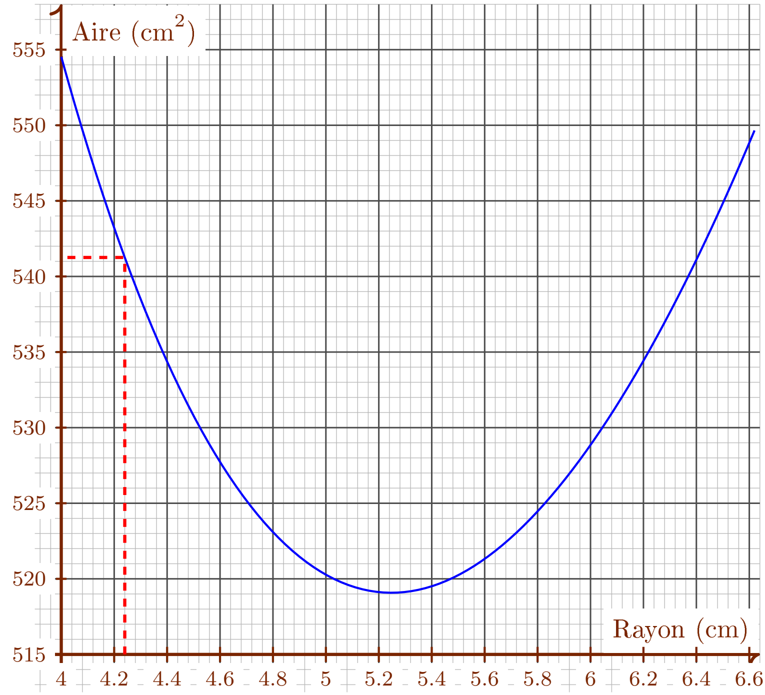
   l'aire du cylindre semble minimale pour un rayon compris entre 4 cm et 6 cm.

4. (a) Un petit raisonnement par l'absurde.

   Si l'aire était proportionnelle au rayon alors la fonction $r \mapsto A$ serait une fonction linéaire. Or la courbe représentative d'une fonction linéaire est une droite et donc cela contredirait la représentation graphique qui nous est fournie.

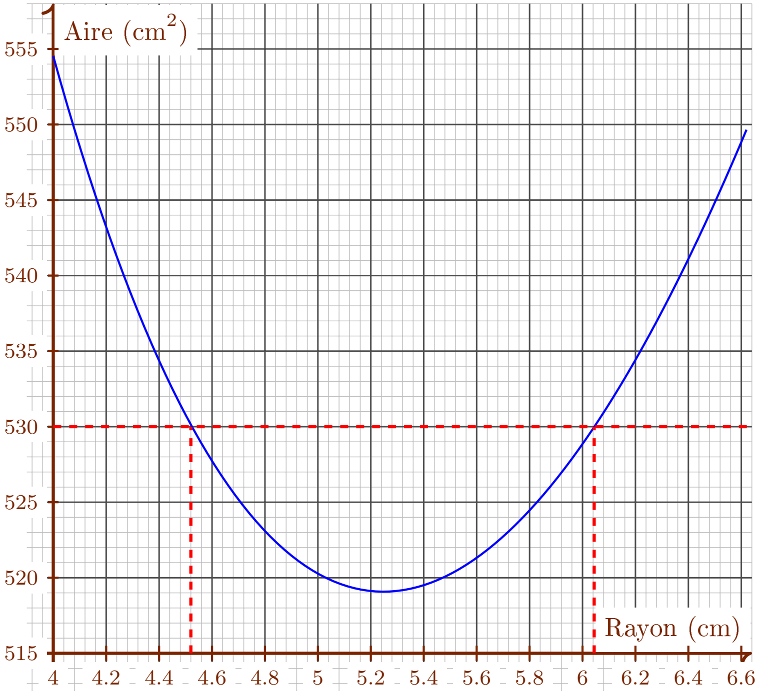
Nécessairement :

L'aire totale n'est pas proportionnelle au rayon.



(b)

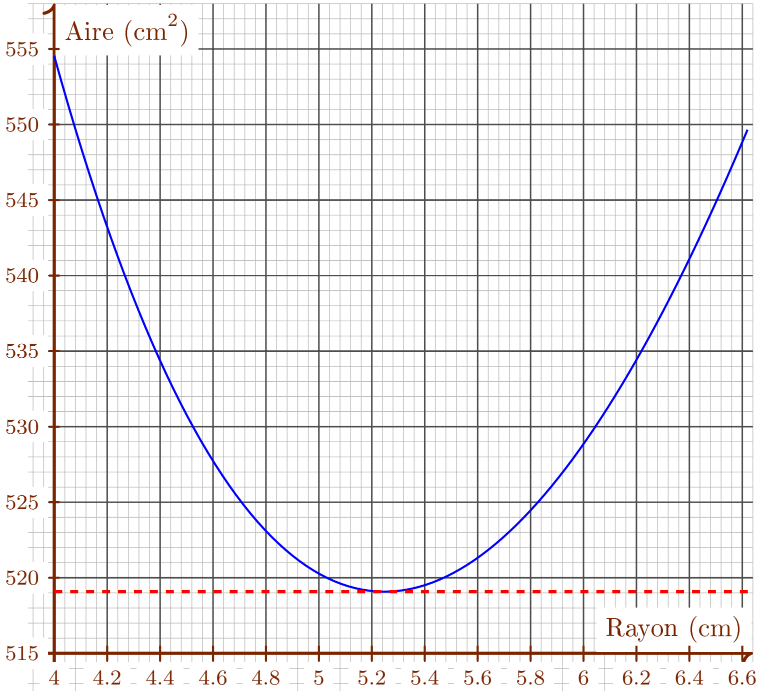
Si le rayon est de 4,24 cm l'aire totale est de 541,2 cm^2.



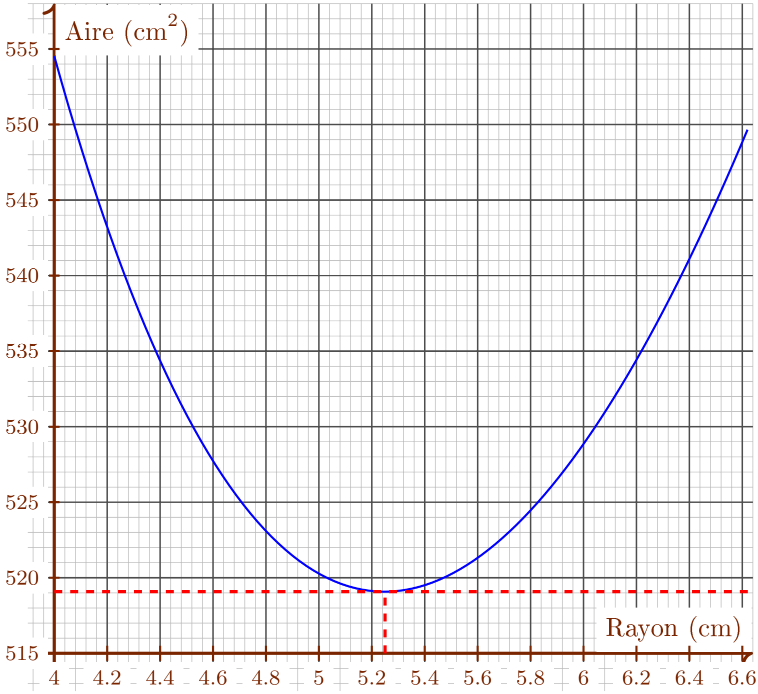
(c)

L'aire totale est de 530 cm^2 si le rayon mesure 4,52 cm ou 6,04 cm.

(d)



L'aire totale minimale est de 519 cm^2.



(e)

> Le rayon correspondant à une aire totale minimale mesure 5,24 cm.

(f) Nous avons établi à la question I.B.2 que, pour r et h exprimés en centimètres :

$$h = \frac{908}{\pi r^2}$$

Nous en déduisons :

$$h = \frac{908}{\pi \times 5{,}24^2} \approx 10{,}5262$$

> Lorsque l'aire totale du cylindre est minimale la hauteur est de 10,5 cm.

Partie C : livraison des boîtes.

Comparons les différents cartons.

	Carton 1	Carton 2	Carton 3
Masse	$1 \times 5 \times 5 \times 0{,}880$ kg = 22 kg	$3 \times 4 \times 2 \times 0{,}880$ kg = 21,12 kg	$3 \times 3 \times 3 \times 0{,}880$ kg = 23,76 kg
Somme des dimensions	$1 \times 11{,}8$ cm + $5 \times 9{,}9$ cm + $5 \times 9{,}9$ cm = 110,8 cm	$3 \times 11{,}8$ cm + $4 \times 9{,}9$ cm + $2 \times 9{,}9$ cm = 94,8 cm	$3 \times 11{,}8$ cm + $3 \times 9{,}9$ cm + $3 \times 9{,}9$ cm = 94,8
Condition de masse est-elle vérifiée ?	Oui	Oui	Non
Condition de longueur est-elle vérifiée ?	Non	Oui	Oui

Seul le carton 2 convient car il respecte simultanément les deux conditions imposées.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

1. Calculons BC.

   ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} BC^2 &= (432\ \text{cm})^2 + (390\ \text{cm})^2 \\ &= \left(432\times\frac{1}{100}\ \text{m}\right)^2 + \left(390\times\frac{1}{100}\ \text{m}\right)^2 \\ &= 4{,}32^2\ \text{m}^2 + 3{,}90^2\ \text{m}^2 \\ &= \left(4{,}32^2\ \text{m}^2\right) + \left(3{,}90^2\ \text{m}^2\right) \\ &= \left(4{,}32^2 + 3{,}90^2\right)\ \text{m}^2 \\ &= 33{,}8724\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

Puisque BC est une longueur donc une grandeur positive :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{33{,}8724\ \text{m}^2} \\ &= \sqrt{33{,}8724}\ \text{m} \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{BC = 5{,}82\ \text{m}.}$$

2. (a) Déterminons AD.

   * Calculons DB.

     . Configuration de Thalès. Les points A, D et B d'une part, et les points C, E, B d'autre part sont alignés dans cet ordre.

     . Hypothèse du théorème de Thalès. Puisque $(AC) \perp (AB)$ et $(DE) \perp (AB)$ donc $(AC) \parallel (DE)$.

     Nous en déduisons d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DE}{AC}.$$

     Cette égalité équivaut successivement à

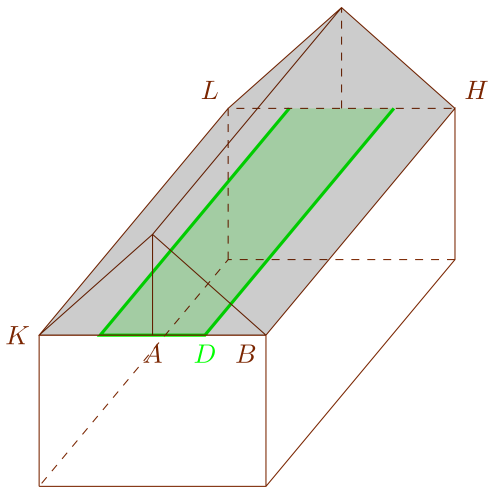
$$\begin{aligned} \frac{DB}{AB}\times AB &= \frac{DE}{AC}\times AB \\ DB &= \frac{1{,}80\ \text{m}}{3{,}90\ \text{m}} \times (4{,}32\ \text{m}) \\ DB &= \frac{1{,}80}{3{,}90} \times 4{,}32\ \text{m} \\ DB &= \frac{648}{325}\ \text{m} \end{aligned}$$

* Déduisons-en AD :

$$\begin{aligned} AD &= AB - DB \\ &= (4{,}32\text{ m}) - \left(\frac{648}{325}\text{ m}\right) \\ &\approx 2{,}3261\text{ m} \end{aligned}$$

Le point D est à 2,33 m du point A.

(b) Déterminons la superficie Carrez S_c.



La surface au sol pour laquelle la hauteur sous plafond est supérieure ou égale à 1,80 m, est un rectangle de $2AD = 2 \times 2{,}33$ m de large et 20 m de long donc

$$\begin{aligned} S_c &= (2 \times 2{,}33\text{ m}) \times (20\text{ m}) \\ &= 2 \times 2{,}33 \times 20\text{ m}^2 \\ &= 93{,}2\text{ m}^2 \end{aligned}$$

La surface correspondant à la loi Carrez est 93 m^2.

Exercice 2.

1. En lisant les questions de l'exercice nous remarquons que ce ne sont pas tant le tickets qui nous intéresse que la valeur des lots éventuellement obtenus. Nous allons donc, pour faciliter les notations des événements introduire une variable aléatoire. Il est bien sûr possible s'en passer.

   Notons X la variable aléatoire qui à chaque ticket associe la valeur du lot correspondant en euro.

   Calculons $\mathbb{P}(X > 0)$.

   Nous pouvons supposer que tout les tickets ont la même chance d'être tirés. Il y a donc équiprobabilité ente les tickets.
   $\{X > 0\}$ est réalisé par $1 + 5 + 10 + 14 + 30 + 100 = 160$ issues (ticket) et l'univers tout entier contient 4 000 issues (ticket) donc

   $$\mathbb{P}(X > 0) = \frac{160}{4000}.$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(X > 0) = 0{,}04.}$$

2. Calculons $\mathbb{P}(X = 0{,}50)$.

   Il y a équiprobabilité entre les ticket, $\{X = 0{,}50\}$ est réalisé par 100 issues et l'univers en comporte 4 000 donc :

   $$\mathbb{P}(X = 0{,}50) = \frac{100}{4000}.$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(X = 0{,}50) = \frac{1}{40}.}$$

   Soit p le pourcentage correspondant à une probabilité de $\frac{1}{40}$.
   Nous avons

   $$\frac{1}{40} = \frac{p}{100}$$

   ce qui équivaut successivement à :

   $$\frac{1}{40}\times 100 = \frac{p}{100}\times 100$$
   $$2{,}5 = p$$

$$p = 2{,}5\ \%.$$

3. Calculons $\mathbb{P}(X \geqslant 100)$.

   Il y a équiprobabilité entre les ticket, $\{X \geqslant 100\}$ est réalisé par $10+5+1 = 16$ issues et l'univers en comporte 4 000 donc :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 100) = \frac{16}{4000}.$$

$$\mathbb{P}(X \geqslant 100) = 0{,}004.$$

4. Calculons la valeur moyenne $\overline{x}$ d'un lot en ne considérant que les ticket gagnants.

   En utilisant la formule de la moyenne pondérée :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{1 \times 899 + 5 \times 250 + \cdots + 100 \times 0{,}50}{1 + 5 + \cdots + 100} \\ &= 29{,}53125\end{aligned}$$

La valeur moyenne d'un lot est de 29,53 €, en ne considérant que les tickets gagnants.

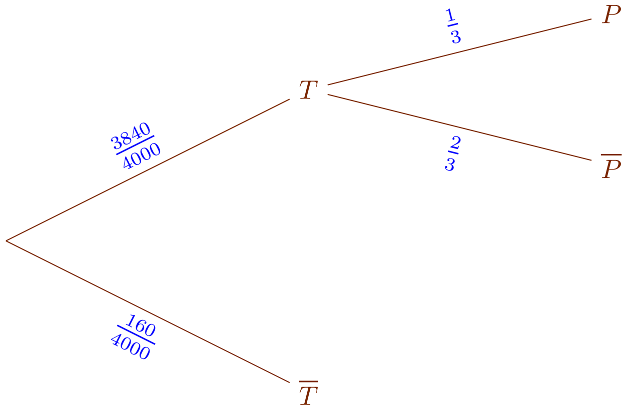
5. Déterminons la somme S que rapporte la tombola.

   En admettant que tout les ticket sont vendus, leur vente rapporte $4\,000 \times 2$ € = 8 000 €.
   Un lot valant en moyenne 29,53125 €, le coût occasionné par l'achat des lots est : $160 \times 29{,}53125$ € = 4 725 €.
   Donc

$$S = (8\,000\text{ €}) - (4\,725\text{ €})$$

$$S = 3\,275\text{ €}.$$

6. Notons T l'événement « Obtenir un ticket perdant » et P l'événement « Obtenir un lot publicitaire ».
   La situation peut être modélisée par l'arbre :



Calculons $\mathbb{P}(T \cap P)$.

$\mathbb{P}(T) > 0$ donc d'après la formule des probabilités composées (principe multiplicatif) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \cap P) &= \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(P)\\ &= \frac{3840}{4000} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(T \cap P) = 0{;}32.}$$

Exercice 3.

1. Déterminons la sortie du programme A lorsqu'on choisit 10 en entrée.

   Dessinons le tableau d'état des variables :

Instruction	a	b	c	d
mettre a à *réponse*	10			
mettre b à $a - 4$	10	$10 - 4 = 6$		
mettre c à $b \times b$	10	6	$6 \times 6 = 36$	
mettre d à $c - 16$	10	6	36	$36 - 16 = 20.$

Si l'on choisit 10 en entrée le programme renvoie 20.

2. Déterminons la sortie du programme B lorsqu'on choisit 5,2 en entrée.

   Dessinons le tableau d'état des variables :

Instruction	x
Choisir un nombre x	5,2
Ôter 4 à ce nombre	$5{,}2 - 4 = 1{,}2$
Effectuer le produit ...	$1{,}2 \times (2 \times 5{,}2) = 12{,}48$

   Si l'on choisit 5,2 en entrée le programme renvoie 12,48.

3. Déterminons si les programmes, pour une même valeur x entrée, peuvent renvoyer le même nombre.

   Nous allons procéder par analyse-synthèse.

   * Analyse. En appliquant le programme A au nombre x (comme avec le tableau d'état des variables précédent) nous obtenons en sortie : $(x-4)^2 - 16$.
     En appliquant le programme B au nombre x (comme avec le tableau d'état des variables précédent) nous obtenons en sortie : $2x(x-4)$.
     Nous recherchons une valeur de x telle que

$$(x-4)^2 - 16 = 2x(x-4)$$

     La précédente égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
(x-4)^2 - 16 - 2x(x-4) &= 2x(x-4) - 2x(x-4) \\
(x-4)^2 - 16 - 2x(x-4) &= 0 \\
x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 - 16 - 2x \times x - 2x \times (-4) &= 0 \\
x^2 - 8x + 16 - 16 - 2x^2 + 8x &= 0 \\
-x^2 &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

   * Synthèse. On vérifie immédiatement qu'en choisissant 0 en entrée les deux programmes renvoient 0.

La seule valeur pour laquelle les programmes renvoient le même nombre est 0.

4. Résolvons l'équation $(x-4)^2 - 16 = 0$.

$$\begin{aligned}(x-4)^2 - 16 = 0 &\iff (x-4)^2 - 4^2 = 0\\ &\iff [(x-4)-4][(x-4)+4] = 0\\ &\iff (x-8)x = 0\\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 8 = 0\\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 8\end{aligned}$$

0 et 8 sont bien des nombres entiers nous pouvons donc conclure

Pour obtenir 0 avec le programme A il faut choisir 8 ou 0 au départ.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2. (a)
   (b)
3.

Situation 2.

1.
2.
3.
4.

Situation 3.

1.
2.
3.
4.

Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 2.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci pour la relecture de Mme Bourgeois.

I Première partie (13 points).

Partie A : installation de panneaux photovoltaïques.

1. $\left.\begin{array}{l} DA = 7 \text{ m} \\ EA = CB = 3 \text{ m} \\ E \in [AD] \end{array}\right\}$, donc $DE = 4$m.

   Puisque $P \in [DE]$ et puisque $DE = 4$ m, 0 m $\leqslant DE \leqslant$ 4 m.

   $$\boxed{x \in [0;4].}$$

2. Exprimons PN en fonction de x.

   * Configuration de Thalès.
     Les points D, P, E d'une part et D, N, C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèse du théorème de Thalès.
     $(AD) \perp (PN)$ et $(AD) \perp (EC)$ donc $(PN) \parallel (EC)$.

   Des deux points précédentes, et d'après le théorème de Thalès nous déduisons :

   $$\frac{DP}{DE} = \frac{PN}{EC}.$$

   La précédente égalité équivaut successivement à :

   $$\begin{aligned} \frac{DP}{DE} \times EC &= \frac{PN}{EC} \times EC \\ \frac{x \text{ m}}{4 \text{ m}} \times (8 \text{ m}) &= PN \\ 2x \text{ m} &= PN \end{aligned}$$

   $$\boxed{PN = 2x \text{ m.}}$$

3. Exprimons $A(x)$.

$AMNP$ est un rectangle donc son aire se calcul en faisant $PN \times AP$ *i.e.*

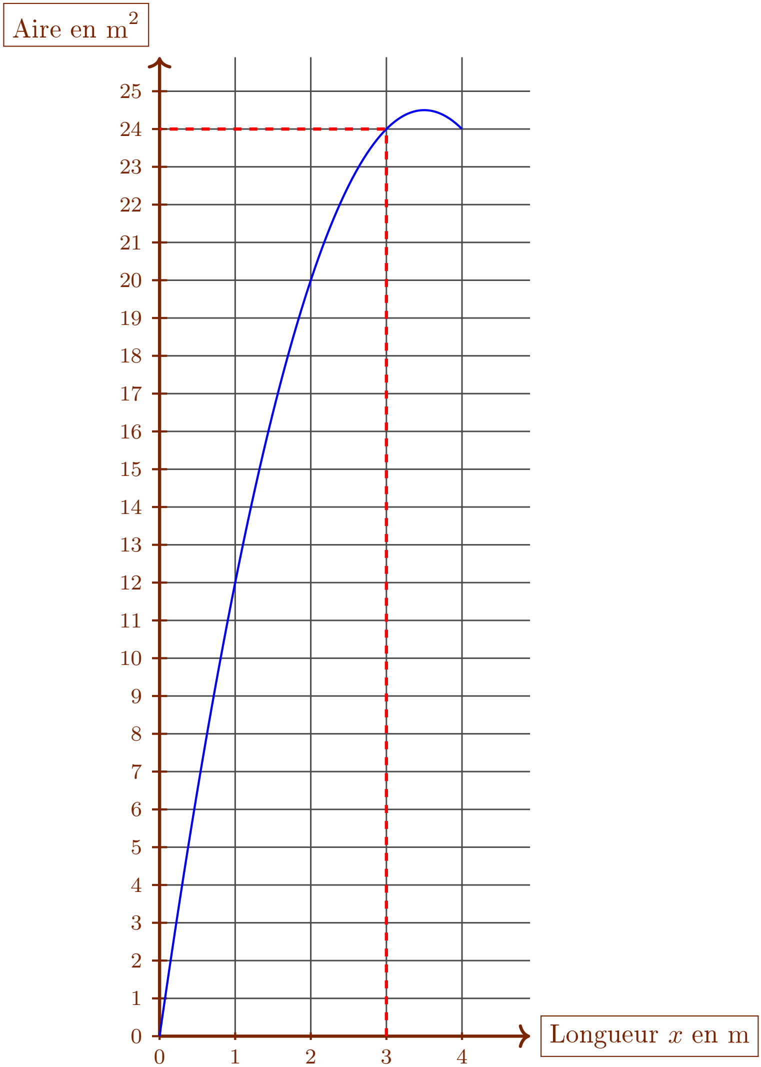
$$\begin{aligned} A(X) &= 2x \times (7 - x) \\ &= 2x \times 7 - 2x \times x \end{aligned}$$

$$A(x) = -2x^2 + 14x.$$

4. Calculons $A(2)$.

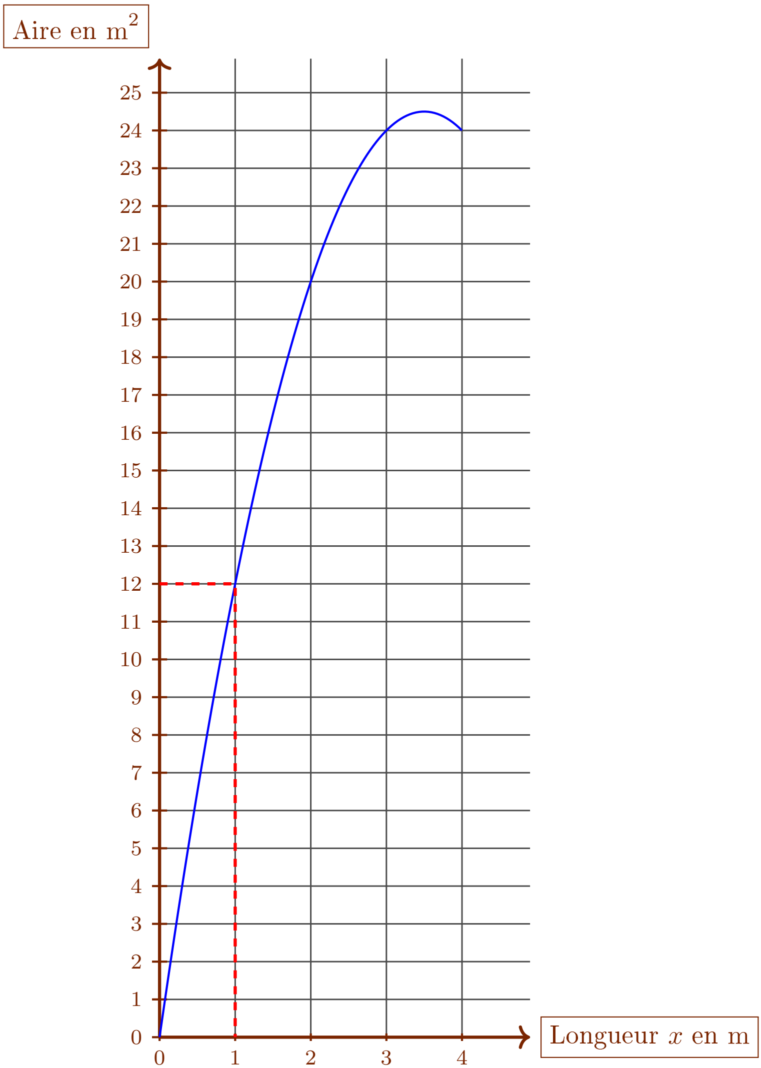
$$\begin{aligned} A(2) &= -2 \times 2^2 + 14 \times 2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Si $x = 2$ l'aire du support est de 20 m^2.


Aire en m²
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
Longueur x en m

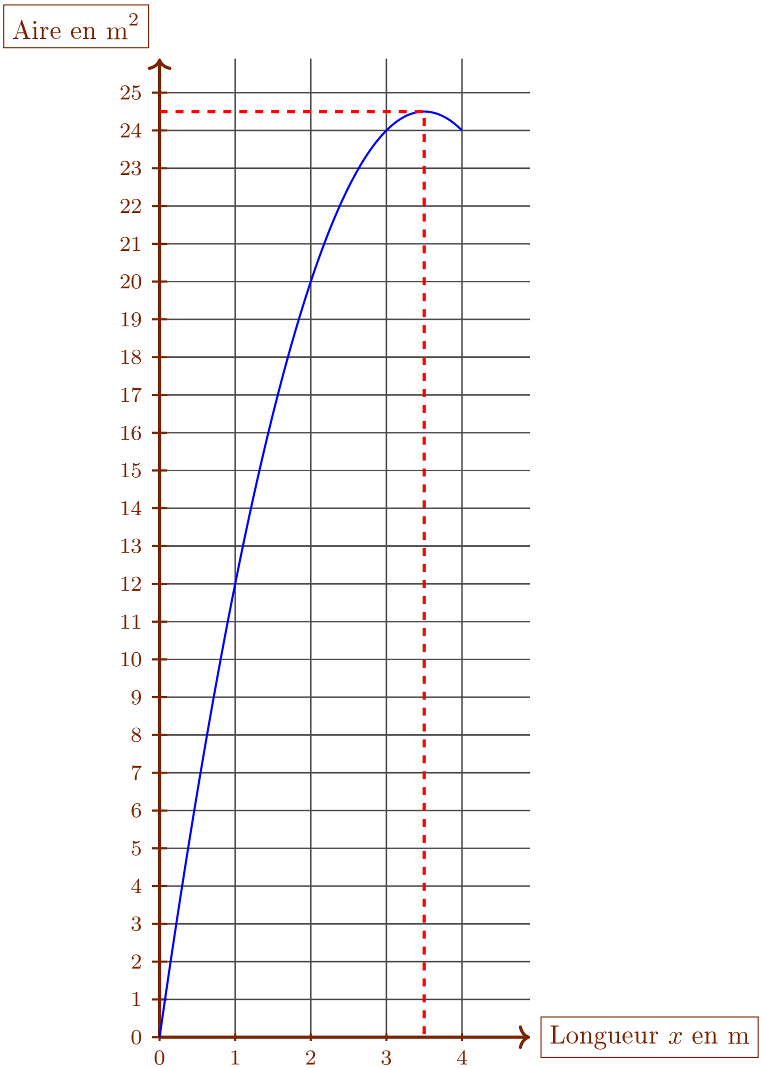
5. (a)

$A(3) = 24.$



(b)

L'aire est de 12 m^2 lorsque $x = 1$ m.



(c)

L'aire maximale est atteinte pour $x = 3{,}5$ m.

Partie B : les différentes énergies renouvelables.

1. Déterminons la proportion, p_s, de l'électrique solaire par rapport au reste de la production renouvelable.

Toutes les grandeurs étant la même unité :

$$\begin{aligned} p_s &= \frac{9{,}2}{24 + 9{,}2 + 48{,}6 + 7} \\ &= \frac{23}{222} \\ &\approx 0{,}103603 \end{aligned}$$

10,36 % de l'électricité de la filière renouvelable provient du solaire.

2. Déterminons la quantité totale, q_t, d'électricité consommée en France.

	Électricité renouvelable	Toute forme d'électricité
Quantité (en TWh)	24 + 9,2 + 48,6 + 7 = 88,8	q_t
Proportion (en %)	18,4	100

Par proportionnalité :

$$\begin{aligned} q_t &= \frac{88{,}8 \times 100}{18{,}4} \\ &\approx 482{,}6086 \end{aligned}$$

La quantité totale d'électricité consommée en France en 2017 était de 482,6 TWh.

Partie C : coût de l'énergie électrique.

Déterminons la dépense, d_a, électrique de madame Martin pour son thé pendant une année.

* Calculons la consommation d'énergie, E_b, pour chauffer une bouilloire.

$$\begin{aligned}
E_b &= P \times t \\
&= (2200 \text{ W}) \times (1 \text{ min} + 26 \text{ s}) \\
&= (2200 \text{ W}) \times \left(1 \times \frac{1}{60} \text{ h} + 26 + \frac{1}{3600} \text{ h}\right) \\
&= 2200 \times \left(\frac{1}{60} + \frac{26}{3600}\right) \text{ W} \cdot \text{h} \\
&= \frac{473}{9} \text{ Wh}
\end{aligned}$$

* Calculons la consommation énergétique, E_a, pour l'année 2018.
2018 étant une année régulière (non bissextile) :

$$\begin{aligned}
E_a &= 365 E_b \\
&= 365 \times \frac{473}{9} \text{ W} \cdot \text{h} \\
&= \frac{172645}{9} \text{ W} \cdot \text{h} \\
&= \frac{172645}{9} \times \frac{1}{1000} \text{ kW} \cdot \text{h} \\
&= \frac{34529}{1800} \text{ kW} \cdot \text{h} \quad (1)
\end{aligned}$$

* Calculons le prix, p_k, d'un kilowatt-heure avec la TVA.
Une TVA de 20 % signifie une augmentation du prix de 20 %. Le coefficient multiplicateur correspondant est :

$$\begin{aligned}
CM &= 1 + \frac{t}{100} \\
&= 1 + \frac{20}{100} \\
&= 1{,}2
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
p_k &= 1{,}2 \times 0{,}0997 \text{ €/kWh} \\
&= 0{,}11964 \text{ €/kWh} \quad (2)
\end{aligned}$$

* De (1) et (2) nous déduisons la somme dépensée annuellement :

$$\begin{aligned} d_a &= \left(\frac{34529}{1800}\ \text{kWh}\right) \times (0{,}11964\ €/\text{kWh}) \\ &= \frac{34529}{1800} \times 0{,}11964\ \text{kWh} \cdot €/\text{kWh} \\ &\approx 2{,}29502 \end{aligned}$$

Pour chauffer son thé madame Martin a dépensé 2,30 € en 2018.

Partie D : installation d'un récupérateur d'eau.

1. Calculons V_1.

   Puisque la base est le rectangle $ABCD$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3} \times (AB \times AD) \times SH \\ &= \frac{1}{3} \times [(1{,}9\ \text{m}) \times (92\ \text{cm})] \times (4{,}60\ \text{m}) \\ &= \frac{1}{3} \times (1{,}9\ \text{m}) \times \left(92 \times \frac{1}{100}\ \text{m}\right) \times (4{,}60\ \text{m}) \\ &= \frac{1}{3} \times 1{,}9 \times 92 \times \frac{1}{100} \times 4{,}60\ \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{m} \\ &= \frac{10051}{3750}\ \text{m}^3 \\ &\approx 2{,}68026\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

   Puisque 1 L = 1 dm^3, il faut que nous arrondissions le résultat au millième de mètre cube :

$$V_1 \approx 2{,}680\ \text{m}^3.$$

2. (a) Calculons le coefficient c_r demandé.

$$\begin{aligned}
c_r &= \frac{SH'}{SH} \\
&= \frac{SH - HH'}{SH} \\
&= \frac{(4{,}60\ \text{m}) - (1{,}84\ \text{m})}{4{,}60\ \text{m}} \\
&= \frac{2{,}76\ \text{m}}{4{,}60\ \text{m}} \\
&= \frac{2{,}76}{4{,}60}\ \frac{\text{m}}{\text{m}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{c_r = 0{,}6.}$$

(b) Calculons V_2.

Puisque le coefficient de réduction appliqué aux longueurs est de 0,6, le coefficient multiplicateur appliqué aux volumes est de $0{,}6^3$. Donc :

$$\begin{aligned}
V_2 &= 0{,}6^3 \times V_1 \\
&\approx 0{,}6^3 \times 2{,}680\ \text{m}^3 \\
&\approx 0{,}57888\ \text{m}^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{V_2 \approx 0{,}579\ \text{m}^3.}$$

3. Calculons V.

$$\begin{aligned}
V &= V_1 - V_2 \\
&\approx \left(2{,}680\ \text{m}^3\right) - \left(0{,}579\ \text{m}^3\right) \\
&\approx (2{,}680 - 0{,}579)\ \ \text{m}^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{V \approx 2{,}101\ \text{m}^3.}$$

4. Calculons le nombre, n, d'arrosoirs que madame Martin peut remplir avec une réservoir.

   Exprimons V en litres :

$$\begin{aligned} V &\approx 2{,}101 \text{ m}^3 \\ &\approx 2{,}101 \times 1000 \text{ dm}^3 \\ &\approx 2101 \text{ dm}^3 \\ &\approx 2101 \text{ L} \end{aligned}$$

   Donc :

$$\begin{aligned} n &\approx \frac{2101 \text{ L}}{12 \text{ L}} \\ &\approx \frac{2101}{12} \frac{\text{L}}{\text{L}} \\ &\approx 175{,}0833 \end{aligned}$$

$$\boxed{n \approx 175.}$$

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Déterminons le nombre, n_r, de relevés fabriqués.

   2019 étant une année régulière elle comportait 365 jours, chaque journée comporte 24 heures et chaque heure comporte 60 minutes donc :

$$n_r = 365 \times 24 \times 60$$

$$\boxed{n_r = 525\,600.}$$

2. (a) Déterminons le minimum de cette série.

   L'étendue est donnée par :

$$e = max - min$$

donc :

$$\begin{aligned} min &= max - e \\ &= (24 \text{ m/s}) - (23 \text{ m/s}) \\ &= 1 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La vitesse minimum fut de 1 m/s, qui est inférieure strictement à 3 m/s, il y a au moins eu un jour dans l'année pendant lequel l'éolienne n'a pas fonctionné.

Le gérant a raison.

(b) La médiane est de 14,3 m/s et le maximum est de 24 m/s donc la moitié du temps la vitesse du vent était dans des conditions de puissance stabilisée (*i.e.* entre 13 m/s et 24 m/s).

Les éoliennes ont délivré une puissance stabilisée pendant au moins la moitié de temps.

Exercice 2.

1. Évaluer la primalité d'un grand nombre est extrêmement fastidieux : il faut testé s'il est divisible par les nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée.

   C'est tellement pénible qu'il est peu vraisemblable que ce soit ici le cas.

   Démontrons que 4 700 001 n'est pas premier.

   Il suffit de tester les différents critères de divisibilité connus.

   $4+7+0+0+0+0+1 = 12$ et 12 est divisible par 3 don 4 700 001 est divisible par 3.

   L'affirmation 1 est fausse.

2. Les calculs à la calculatrice semblent impossibles. Nous ne pouvons espérer, avec le peu de temps dont on dispose en examen, faire ces calculs manuellement. Il faut donc essayer autrement de comparer ces nombres.

   Comparons 32^{12} et $16^{15} + 3$.

   Une façon comparer deux nombres consiste à étudier le signe de leur différence.
   Nous avons les décompositions en facteurs premiers : $32 = 2^5$ et $16 = 2^4$.
   Par conséquent :

$$\begin{aligned} 16^{15} + 3 - 32^{12} &= \left(2^4\right)^{15} + 3 - \left(2^5\right)^{12} \\ &= 2^{4\times 15} + 3 - 2^{5\times 12} \\ &= 2^{60} + 3 - 2^{60} \\ &= 3 \end{aligned}$$

   Clairement :

$$16^{15} + 3 - 32^{12} > 0$$

   Autrement dit :

$$16^{15} + 3 > 32^{12}$$

   L'affirmation 2 est fausse.

3. Nous allons démontrer le résultat en utilisant la caractérisation suivante : un entier est impair si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $2k + 1$ avec k un entier naturel.

   Démontrons que la somme des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est toujours un nombre impair.

   Soit n un entier naturel.
   $n + 1$ est donc l'entier consécutif.
   Nous avons :

$$\begin{aligned} n^2 + (n+1)^2 &= n^2 + n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2 \\ &= n^2 + n^2 + 2n + 1 \\ &= 2n^2 + 2n + 1 \\ &= 2(n^2 + n) + 1 \\ &= 2k + 1 \quad \text{avec } k = n^2 + n \text{ un entier naturel} \end{aligned}$$

Autrement dit $n^2 + (n+1)^2$ est un nombre impair.
Nous avons démontré que la somme des carrés de tous les entiers consécutifs est un nombre impair.

L'affirmation 3 est vraie.

4. Un rapide calcul à la calculatrice donne : $6{,}4^2 + 4{,}8^2 = 64$ et $8^2 = 64$. Nous savons donc ce que nous devons établir.

Démontrons que ABC est rectangle en B.

D'une part :

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= 6{,}4^2 + 4{,}8^2 \\ &= 64 \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} AC^2 &= 8^2 \\ &= 64 \end{aligned}$$

d'où $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que ABC est rectangle en B.

L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 3.

Cliquez sur le programme ci-dessus pour le télécharger.

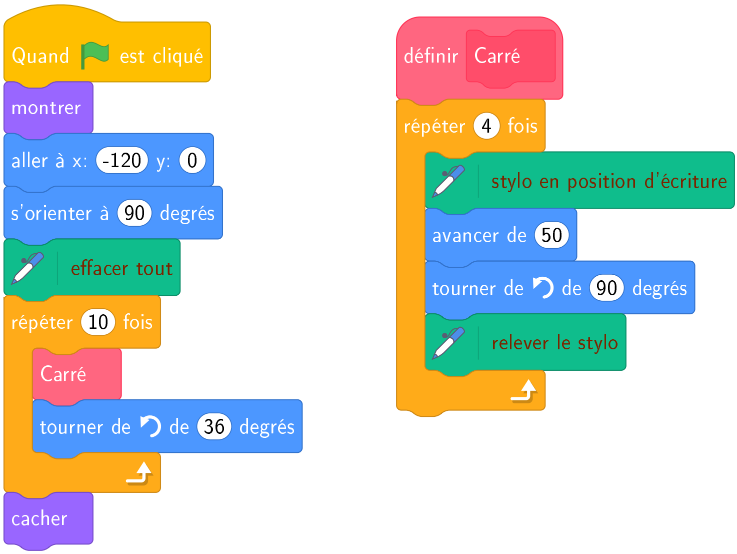
1. Le programme contient l'indication explicite « répéter 6 fois ».

   6 motifs « Carré » composent la rosace.

2. Le programme contient l'indication explicite « tourner de 60 degré » dans le sens directe comme l'indique la flèche.

   On passe d'un motif « Carré » au suivant par une rotation dont le centre est le centre de symétrie de la rosace et d'angle 60°.

3. Il faut modifier le nombre de répétition et l'angle de la rotation comme suit :



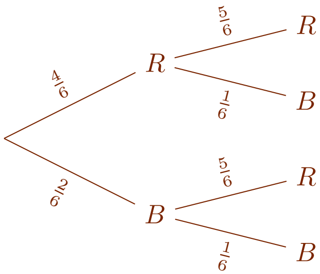
4. Il suffit de remplacer « tourner de ↺ de 60 degrés » par « avancer de 60 ».

Exercice 4.

1. (a) Notons A l'événement « Mourad gagne ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Schématisons l'expérience par un arbre probabiliste pondéré dans lequel le premier niveau correspond au dé de Kelly et le second celui de Mourad.



Gagnant :	Probabilité :
Mourad	$\frac{10}{36}$
Kelly	$\frac{4}{26}$
Kelly	$\frac{10}{36}$
Mourad	$\frac{2}{36}$

Nous modélisons l'expérience en choisissant $\Omega = \{RR, RB, BR, BB\}$ et la loi de probabilité est celle indiquée sur le schéma et qui est obtenue en utilisant le principe multiplicatif.

$A = \{RR, BB\}$ donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(RR) + \mathbb{P}(BB)$$

D'après le principe multiplicatif :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{4}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{20}{36} + \frac{2}{36} \\ &= \frac{22}{36}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{11}{18}.}$$

(b) Notons B l'événement « Kelly gange ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Clairement A et B sont des événements contraires donc :

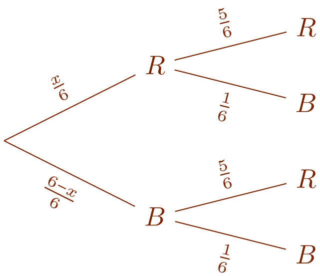
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}(A) \\ &= 1 - \frac{11}{18} \\ &= \frac{7}{18}\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(B) \neq \mathbb{P}(A)$.

$$\boxed{\text{Le coloriage proposé n'est pas une solution du problème.}}$$

2. (a) Notons C_x l'événement « Mourad gagne ».

Calculons $\mathbb{P}(C_x)$.



Gagnant :	Probabilité :
Mourad	$\frac{5x}{36}$
Kelly	$\frac{x}{26}$
Kelly	$\frac{5(6-x)}{36}$
Mourad	$\frac{6-x}{36}$

$C_x = \{RR,\ BB\}$ donc :

$$\mathbb{P}(C_x) = \mathbb{P}(RR) + \mathbb{P}(BB)$$

D'après le principe multiplicatif :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_x) &= \frac{x}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{6-x}{6}\times\frac{1}{6}\\ &= \frac{5x}{36}+\frac{6-x}{36}\\ &= \frac{5x+6-x}{36}\\ &= \frac{4x+6}{36}\\ &= \frac{2\times 2x+2\times 3}{36}\\ &= \frac{2\times(2x+3)}{2\times 18}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C_x)=\frac{2x+3}{18}.}$$

(b) Résolvons l'équation $\frac{2x+3}{18}=\frac{1}{2}$.

Nous reconnaissons une équation linéaire du premier degré, la résolution algébrique consiste à isoler l'inconnue.

$$\frac{2x+3}{18}=\frac{1}{2}$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}18\times\frac{2x+3}{18} &= 18\times\frac{1}{2}\\ 2x+3 &= 9\\ 2x+3-3 &= 9-3\\ 2x &= 6\\ \frac{2x}{2} &= \frac{6}{2}\\ x &= 3\end{aligned}$$

La solution trouvée est bien un entier entre 1 et 6 nous pouvons donc conclure.

La seule valeur possible pour laquelle les deux joueurs ont la même chance de gagner est $x = 3$.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3.
4.

Situation 2.

1.
2.
3.
4.
5. (a)
   (b)
   (c)
   (d)

Situation 3.

1.
2.
3.
4.

Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 3.

Lien vers le sujet seul : pdf.
Merci à M. Vanche et Mme Guyard pour les corrections apportées.

I Première partie (13 points).

Partie A : le grillage et le potager.

1. (a) Supposons que $AG = 5$ m et démontrons qu'alors la longueur, $\ell(AG)$, du grillage est 22 m.

   Nous remarquons que $\ell(AG) = PF + EF$.

* Déterminons AE.
L'aire $AEFG$ est de 90 m^2 donc :

$$\mathscr{A}(AEFG) = 90 \text{ m}^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} AG \times AE &= 90 \text{ m}^2 \\ (5 \text{ m}) \times AE &= 90 \text{ m}^2 \\ \frac{(5 \text{ m}) \times AE}{5 \text{ m}} &= \frac{90 \text{ m}^2}{5 \text{ m}} \\ AE &= 18 \text{ m} \end{aligned}$$

* Déterminons PF.

$$\begin{aligned} PF &= AE - (1 \text{ m}) \\ &= (18 \text{ m}) - (1 \text{ m}) \\ &= 17 \text{ m} \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $AG = EF = 5$ m nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \ell(AG) &= PF + EF \\ &= (17 \text{ m}) + (5 \text{ m}) \end{aligned}$$

Si $AG = 5$ m alors $\ell(AG) = 22$ m.

(b) En procédant comme à la question précédente :

$$\begin{aligned} \ell(AG) &= PF + EF \\ &= \frac{90}{7{,}5} - 1 + 7{,}5 \text{ m} \end{aligned}$$

Si $AG = 7{,}5$ m alors $\ell(AG) = 18{,}5$ m.

2. (a) Si $AG = x$ alors, en reprenant le raisonnement de la question 1.(a) nous obtenons bien :

$$L(x) = x + \frac{90}{x} - 1.$$

(b) i. Pour $x = 2$: $2 + \frac{89}{2} = 47{,}5$ et $L(2) = 2 + \frac{90}{2} - 1 = 46$.

ii. Soit $x \in [5;20]$.

$$\begin{aligned} L(x) &= x + \frac{90}{x} - 1 \\ &= x + \frac{90}{x} - \frac{1\times x}{x} \\ &= x + \frac{90 - x}{x} \end{aligned}$$

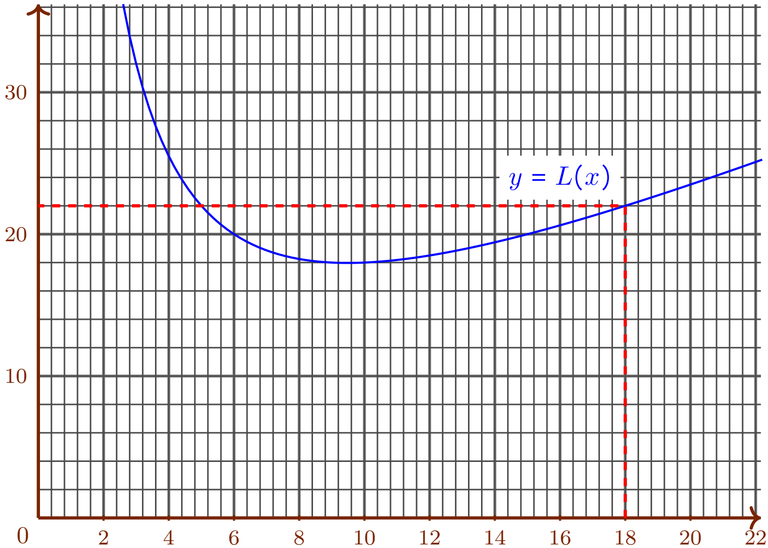
iii. Soit $x \in [5;20]$.
En reprenant le précédent calcul :

$$\begin{aligned} L(x) &= x + \frac{90 - x}{x} \\ &= \frac{x\times x}{x} + \frac{90 - x}{x} \\ &= \frac{x^2 - x + 90}{x} \end{aligned}$$

iv. Pour $x = 2$: $\frac{2^2+89}{2} = 47{,}5$ alors que $L(2) = 46$.

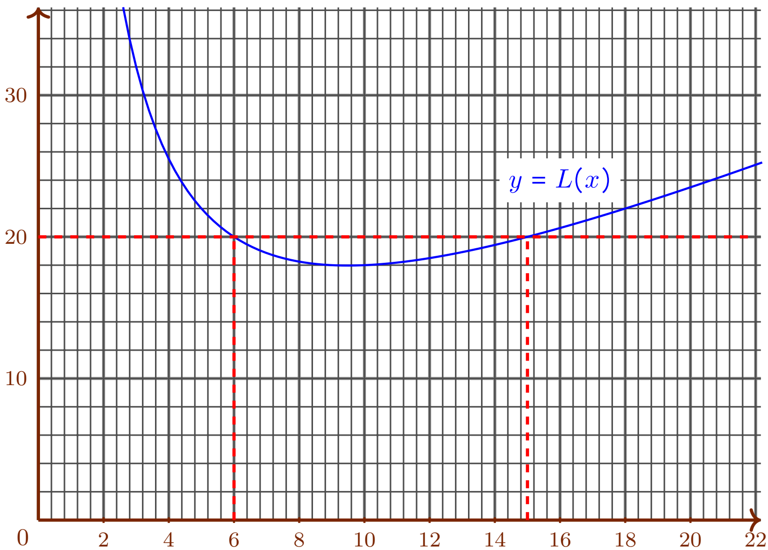
Seules ii. et iii. sont d'autres expressions de $L(x)$.

3. (a)

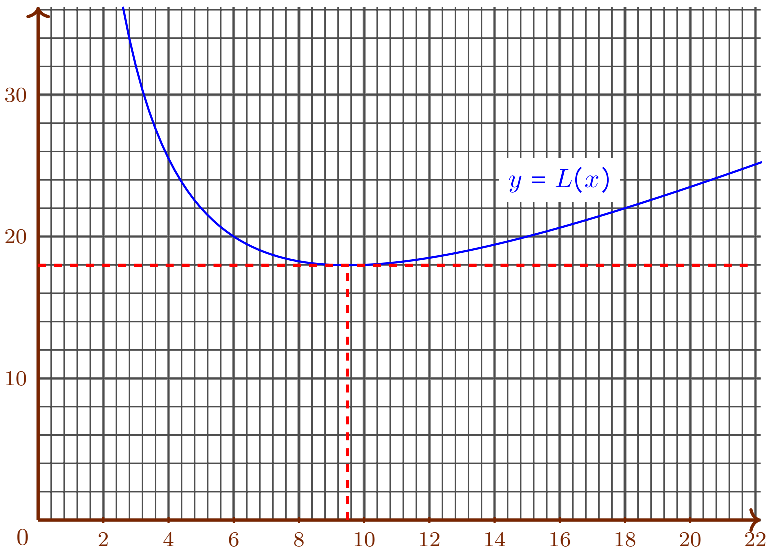


$L(18) = 22$ donc le grillage mesure 22 m.

(b)



Le grillage mesure 22 m si l'on choisit $AG = 6$ m ou $AG = 15$ m.



(c)

Le grillage semble minimal lorsque $AG = 9{,}48$ m.

Partie B : le compost et le potager.

1. Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ du bac.

   Le bac ayant la forme d'un parallélépipède rectangle son volume s'obtient comme le produit des longueur, largeur et hauteur :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= (1{,}2 \text{ m}) \times (1{,}6 \text{ m}) \times (1{,}6 \text{ m})\\ &= 1{,}2 \times 1{,}6 \times 1{,}6 \text{ m} \cdot \text{m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$\mathscr{V}_1 = 3{,}072 \text{ m}^3$.

2. (a) Calculons le volume, $\mathscr{V}_2$, de compost au bout de un mois.

En un mois le volume diminue de 20 % le coefficient multiplicateur correspondant est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-20}{100} \\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Nous en déduisons le volume au bout d'un mois :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_2 &= CM \times \mathscr{V}_1 \\ &= 0{,}8 \times 3{,}072 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_2 = 2{,}4576 \text{ m}^3.}$$

(b) La formule à saisir en `C2` est

$$\boxed{= 0{,}8 * \texttt{B2}.}$$

(c) Calculons le volume $\mathscr{V}_3$ correspondant à parallélépipède rectangle de surface au sol 40 m^2 et de hauteur 3 cm.

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_3 &= (3 \text{ cm}) \times (40 \text{ m}) \\ &= 3 \times 40 \text{ cm} \cdot \text{m}^2 \\ &= 120 \times \frac{1}{100} \text{ m} \cdot \text{m}^3 \\ &= \frac{120}{100} \text{ m}^3 \\ &= 1{,}2 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Or au bout de cinq mois le volume de compost n'est, d'après le tableur, que de 1,0066 m^3 donc

il n'y a pas assez de compost pour en épandre comme souhaité.

Partie C : achat des graines à planter.

1. Déterminons le nombre de plants achetés avec 30 € de 40 plants.

Tarif A. 40 plants remplissent $\frac{40}{5} = 8$ barquettes. Le coût sera donc de $8 \times (1{,}20\ €) = 8 \times 1{,}20\ € = 9{,}6\ \ €$.

Tarif B. 40 plants sont insuffisants pour bénéficier de la réduction. Leur coût sera donc de $40\ \times (0{,}25\ €) = 40 \times 0{,}25\ € = 10\ €$.

Tarif C. Chaque plant coûtant 40 € et tenant compte du coût de la carte de fidélité, le coût sera de : $(3\ €) + 40 \times (0{,}20\ €) = (3 + 40 \times 0{,}20)\ € = 11\ €$.

> Pour 40 plants le tarif A est plus avantageux.

2. Déterminons le nombre de plants achetés avec 30 €.

Tarif A. Avec 30 € il est possible d'acheter $\frac{30\ €}{1{,}20\ €} = 25$ barquettes ce qui correspond à $25 \times 5 = 125$ plants.

Tarif B. Supposons qu'avec 30 € le nombre de plants est strictement inférieur à 50 alors le nombre de plants est précisément : $\frac{30\ €}{0{,}25\ €} = 120$. Ceci contredit notre hypothèse que le nombre de plants vendus est strictement inférieur à 50.

Supposons donc dorénavant que le nombre de plants obtenus avec 30 € est supérieur à 50.
Une diminution de 5 % correspond à un coefficient multiplicateur de

$$\begin{aligned} CM_2 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-5}{100} \\ &= 0{,}95 \end{aligned}$$

Donc chaque plant est payé $0{,}95 \times (0{,}25\ €) = 0{,}2375\ €$.
Par conséquent avec 30 € le nombre de plants achetés est : $\frac{30\ €}{0{,}2375\ €} \approx 126{,}3157$. Autrement dit 126 plants.

Tarif C. Notons x le nombre de plants acheté.
Nous avons

$$0{,}2x + 3 = 30$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 0{,}2x + 3 - 3 &= 30 - 3 \\ 0{,}2x &= 27 \\ \frac{0{,}2x}{0{,}2} &= \frac{27}{0{,}2} \\ x &= 135 \end{aligned}$$

Avec 30 euro il est possible d'acheter 135 plants.

Pour 30 € le tarif C permet d'acheter le plus de plants.

3. Comparons les coûts pour les tarifs B et C pour x plants vendus avec $0 \leqslant x$.

Raisonnons par disjonction des cas suivant que x est plus petit ou plus grand que 50.

* Supposons tout d'abord que $0 \leqslant x < 50$.
  Pour le tarif B le coût exprimé en euro est : $\mathcal{C}_B(x) = 0{,}25x$.
  Pour le tarif C le coût exprimé en euro est : $\mathcal{C}_C(x) = 0{,}2x + 3$.
  Dire que le coût avec le tarif B est inférieur au coût avec C équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_B(x) &\leqslant \mathcal{C}_C(x) \\ 0{,}25x &\leqslant 0{,}2x + 3 \\ 0{,}25x - 0{,}2x &\leqslant 0{,}2x + 3 - 0{,}2x \\ 0{,}05x &\leqslant 3 \\ \frac{0{,}05x}{0{,}05} &\leqslant \frac{3}{0{,}05} \quad \text{car } 0{,}05 > 0 \\ x &\leqslant 60 \end{aligned}$$

  Ce qui est toujours vrai puisque nous sommes dans le cas $x \leqslant 50$.
* Supposons maintenant que $50 \leqslant x$.
  Pour le tarif B le coût exprimé en euro est donc : $\mathcal{C}_B(x) = 0{,}2375x$.

Pour le tarif C le coût exprimé en euro est encore : $\mathcal{C}_C(x) = 0{,}2x + 3$.
Dire que le coût avec le tarif B est inférieur au coût avec C équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_B(x) &\leqslant \mathcal{C}_C(x)\\
0{,}2375x &\leqslant 0{,}2x + 3\\
0{,}2375x - 0{,}2x &\leqslant 0{,}2x + 3 - 0{,}2x\\
0{,}0375x &\leqslant 3\\
\frac{0{,}0375x}{0{,}0375} &\leqslant \frac{3}{0{,}0375} \quad \text{car } 0{,}0375 > 0\\
x &\leqslant 80
\end{aligned}$$

Ainsi le coût avec le tarif B reste inférieur tant que l'on achète moins de 81 plants de salade.

À partir de 80 plants de salade le tarif C est plus avantageux.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Considérons le tableau d'état des variables.

	réponse	x	y	x * y
demander Donne moi un nombre et attendre	5			
mettre x à 6 + réponse	5	$5 + 6 = 11$		
mettre y à 3 * réponse	5	11	$3 \times 5 = 15$	
dire x * y pendant 20 secondes	5	11	15	$11 \times 15 = 165$

Si l'utilisateur entre 5 le lutin dira 165.

2. Considérons le tableau d'état des variables.

	réponse	x	y	x * y
demander Donne moi un nombre et attendre	$2+\frac{7}{10}=\frac{27}{10}$			
mettre x à 6 + réponse	$\frac{27}{10}$	$6+\frac{27}{10}=\frac{87}{10}$		
mettre y à 3 * réponse	$\frac{27}{10}$	$\frac{87}{10}$	$3\times\frac{27}{10}=\frac{81}{10}$	
dire x * y pendant 20 secondes	$\frac{27}{10}$	$\frac{87}{10}$	$\frac{81}{10}$	$\frac{87}{10}\times\frac{81}{10}=\frac{7047}{100}$

Si l'utilisateur entre $2+\frac{7}{10}$ le lutin dira $\frac{7047}{100}$.

3. Déterminons la valeur z entrée dans « réponse ».

   Si nous reprenons le tableau d'état des variables :

	réponse	x	y	x * y
demander Donne moi un nombre et attendre	z			
mettre x à 6 + réponse	z	$6+z$		
mettre y à 3 * réponse	z	$6+z$	$3z$	
dire x * y pendant 20 secondes	z	$6+z$	$3z$	$(6+z)\times 3z$

Ainsi le nombre retourné est 0 si et seulement si :

$$(6+z)3z=0$$

Ceci équivaut successivement à :

$$6+z=0 \quad \text{ou} \quad 3z=0$$
$$z=-6 \quad \text{ou} \quad z=0$$

Pour que le nombre retourné soit 0 il faut et il suffit que les nombres entrés soient 0 ou -6.

Exercice 2.

1. Schématisons le lancer d'Arthur avec un tableau double entrée que nous remplirons des sommes des chiffres affichés par les deux dés.

   Pour Arthur :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Pour Juliette :

	1	3	3	4	6	8
1	2	4	4	5	7	9
2	3	5	5	6	8	10
2	3	5	5	6	8	10
3	4	6	6	7	9	11
3	4	6	6	7	9	11
4	5	7	7	8	10	12

Ω_A est l'ensemble des couples de chiffres obtenus (en distinguant toutes les faces par un coloriage par exemple) pour Arthur.
De même pour Ω_J.
Les dés étant équilibrés il est raisonnable de faire l'hypothèse que chaque couple de faces représenté par une case du tableau à la même probabilité qu'un autre couple. Il y a équiprobabilité entre les couples. Et dans les deux cas, Arthur ou Juliette, l'univers comporte 36 issues.

Notons A_5 (resp. J_5) l'événement « Arthur (resp. Juliette) obtient un 5 ».

Calculons $\mathbb{P}(A_5)$ (resp. $\mathbb{P}(J_5)$).

I y a équiprobabilité entre les couples. A_5 (resp. J_5) est réalisé par 4 (resp. 6) issues. L'univers comporte 36 issues. Nous en déduisons :

$$\mathbb{P}(A_5) = \frac{4}{36} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(J_5) = \frac{6}{36}.$$

Donc : $\mathbb{P}(A_5) < \mathbb{P}(J_5)$.

La probabilité est plus grande que Juliette obtienne 5.

2. Comparons les probabilités des différentes sommes possibles.

Notons X_A la variable aléatoire qui à un lancer de dés de Arthur associe la somme des chiffres obtenus.

D'après le tableau de la question précédente : $X_A \in \{2,3,\ldots,12\}$. Et en raisonnant comme à la question précédente (équiprobabilité) nous obtenons aisément les probabilité suivantes :

Somme x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Arthur a raison : 7 est la somme qui a la plus grande probabilité d'être obtenue.

3. (a) Du fait des phénomène de fluctuation d'échantillonnage, si la probabilité d'obtenir 6 semble assez proche de celle d'obtenir 7,

   le tableau ne permet pas d'affirmer que les probabilités d'obtenir 6 égale celle d'obtenir 7.

   Au vu des connaissances exigées pour le concours je pense que la réponse à cette question doit relever davantage de l'intuitif que du quantitatif.

   (b) Comparons la probabilité d'obtenir 6 et celle d'obtenir 7.

   Notons X_J la variable aléatoire qui à un lancer de dés de Juliette associe la somme des chiffres obtenus.
   En utilisant le tableau de la question 1. nous pouvons affirmer que l'événement $\{X_J = 6\}$ est réalisé par 6 issues tandis que $\{X_J = 7\}$ est réalisé par 5 issues. Compte tenu de l'équiprobabilité et du fait que l'univers contient 36 issues :

   $$\mathbb{P}(X_J = 6) = \frac{6}{36} \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{P}(X_J = 7) = \frac{5}{36}.$$

Exercice 3.

1. Déterminons le résultat obtenu, $r(7)$, en choisissant 7.

   Les deux successeurs de 7 sont $7 + 1 = 8$ et $7 + 2 = 9$. Donc leurs carrés sont $8^2 = 64$ et $9^2 = 81$.
   Les deux prédécesseurs de 7 sont $7 - 1 = 6$ et $7 - 2 = 5$. Donc leurs carrés sont $6^2 = 36$ et $5^2 = 25$.
   Donc

$$r(7) = (81 + 64) - (36 + 25)$$

$$\boxed{r(7) = 84.}$$

2. Déterminons le résultat obtenu, $r(5)$, en choisissant 5.

   Les deux successeurs de 5 sont $5 + 1 = 6$ et $5 + 2 = 7$. Donc leurs carrés sont $6^2 = 36$ et $7^2 = 49$.
   Les deux prédécesseurs de 5 sont $5 - 1 = 4$ et $5 - 2 = 3$. Donc leurs carrés sont $4^2 = 16$ et $3^2 = 9$.
   Donc

$$r(5) = (49 + 36) - (16 + 9)$$

$$\boxed{r(5) = 60.}$$

3. Il semble qu'il y ait proportionnalité entre la première et la seconde ligne.

   Le nombre choisi peut être retrouvé en divisant par 12 le résultat.

4. Démontrons que, quelque soit l'entier n choisi, le résultat est $12n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Les deux successeurs de n sont $n+1$ et $n+2$. Donc leurs carrés sont $(n+1)^2$ et $(n+2)^2$.
   Les deux prédécesseurs de n sont $n-1$ et $n-2$. Donc leurs carrés sont $(n-2)^2$ et $(n-1)^2$.
   Donc

$$\begin{aligned}
r(n) &= \left[(n+2)^2 + (n+1)^2\right] - \left[(n-1)^2 + (n-2)^2\right] \\
&= \left[n^2 + 2 \times n \times 2 + 2^2 + n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2\right] - \left[n^2 - 2 \times n \times 2 + 2^2 + n^2 - 2 \times\right. \\
&= \left(n^2 + 4n + 4 + n^2 + 2n + 1\right) - \left(n^2 - 4n + 4 + n^2 - 2n + 1\right) \\
&= \left(2n^2 + 6n + 5\right) - \left(2n^2 - 6n + 5\right) \\
&= 2n^2 + 6n + 5 - 2n^2 + 6n - 5 \\
&= 12n
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que

> quelque soit l'entier naturel n choisi le résultat est $12n$.

Exercice 4.

1. Une rotation de centre A et d'angle 60°.

2. Une symétrie centrale dont le centre est le milieu de $[BC]$.

3. La translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$, ou encore la translation qui transforme C en D.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3.
4. (a)
   (b)

Situation 2.

1. (a)
   (b)
2.
3.

Situation 3.

1. (a)
   (b)
2. (a)
   (b)

Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 4.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à M. Meynier, JJ KK et M. Depoorter pour les corrections apportées.

I Première partie (13 points).

Partie A : géographie et histoire.

1. (a) Calculons le périmètre p de ABC.

   * Commençons par déterminer CB.
   ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

   Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} BC^2 &= 2AB^2, \quad \text{car } ABC \text{ est isocèle en } A \\ &= 2\,(18\text{ km})^2 \\ &= 2\left(18^2\text{ km}^2\right) \\ &= 2\times 18^2\text{ km}^2 \\ &= 648\text{ km}^2 \end{aligned}$$

   Puisque BC est une longueur donc positive nous en déduisons :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{648\text{ km}^2} \\ &= \sqrt{648}\text{ km} \\ &= 18\sqrt{2}\text{ km} \end{aligned}$$

* Enfin, pour le périmètre

$$\begin{aligned} p &= AB + AC + BC \\ &= (18 \text{ km}) + (18 \text{ km}) + \left(18\sqrt{2} \text{ km}\right) \\ &= 36 + 18\sqrt{2} \text{ km} \\ &\approx 61{,}4558 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\boxed{p \approx 61 \text{ km.}}$$

(b) Calculons l'aire $\mathscr{A}(ABC)$ du triangle ABC.

Puisque ABC est rectangle en A :

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times AC$$

Puisque ABC est isocèle en A :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(ABC) &= \frac{1}{2} \times AB^2 \\ &= \frac{1}{2} (18 \text{ km})^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 18^2 \text{ km}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ABC) = 162 \text{ km}^2.}$$

(c) Déterminons la densité de population d.

$$\begin{aligned} d &= \frac{6\,400 \text{ hab}}{162 \text{ km}^2} \\ &= \frac{6\,400}{162} \text{ hab} \cdot \text{km}^{-2} \\ &\approx 39{,}5061 \text{ hab} \cdot \text{km}^{-2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'île compte 40 habitants au km}^2.}$$

2. Calculons OM.

   * Les points S, R et O d'une part et les points S, H et M, d'autre part, sont alignés dans cet ordre donc nous avons une configuration de Thalès.
   * Les angles $\widehat{OMS}$ et $\widehat{RHS}$ sont droits donc $(OM) \parallel (RH)$

   Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SH}{SM} = \frac{RH}{OM}$$

   En procédant à un produit en croix nous en déduisons :

$$SH \times OM = RH \times SM$$

   Et donc successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{SH \times OM}{SH} &= \frac{RH \times SM}{SH} \\
OM &= \frac{RH \times (SH + HM)}{SH} \\
&= \frac{(1{,}8 \text{ m}) \times [(1{,}6 \text{ m}) + (2{,}9 \text{ m})]}{1{,}6 \text{ m}} \\
&= \frac{(1{,}8 \text{ m}) \times (4{,}5 \text{ m})}{1{,}6 \text{ m}} \\
&= \frac{1{,}8 \times 4{,}5}{1{,}6} \; \frac{\text{m}^2}{\text{m}} \\
&= 5{,}0625 \text{ m}
\end{aligned}$$

$$\boxed{OM \approx 5{,}1 \text{ m.}}$$

3. (a) Formule entrée en `D2` : `B2 + C2`.

   (b) Calculons la proportion, p_1, de moais non terminés.

   Il y a 61 + 38 = 99 moais inachevés.
   Il y a 168 + 107 = 275 moais au total.
   Donc

$$p_1 = \frac{99}{275} = 0,36$$

36 % des moais sont inachevés.

(c) Calculons la proportion, p_2, de moais couchés dans la carrière.

Il y a 44 + 4 = 48 moais couchés dans la carrière.
Il y a 107 moais au total dans la carrière.
Donc

$$p_2 = \frac{48}{107} \approx 0,44,86$$

44,86 % des moais de la carrière sont couchés.

(d) * Analyse : supposons qu'il soit possible de faire la répartition proposée par l'énoncé.

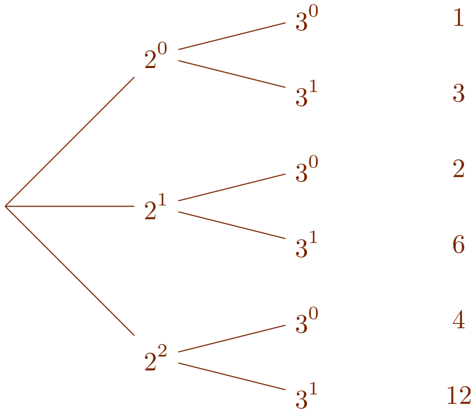
Notons n le nombre de groupe, m le nombre d'élèves dans un groupe et p le nombre de moais que photographiera chaque groupe.

Nous avons donc

$$\begin{cases} nm = 24 \\ np = 84 \end{cases}$$

Ainsi n est un diviseur commune de 224 et 84. Or nous avons les décompositions en facteurs premiers suivantes : $24 = 2^3 \times 3$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ donc n est un diviseur de $2^2 \times 3$.

Recherchons tous les diviseurs de $2^2 \times 3$ sous forme d'un arbre.



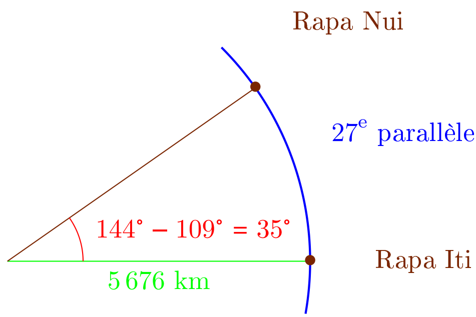
Puisque $m = \frac{24}{n}$ et $p = \frac{84}{2}$:

Nombre de groupes n	Nombre d'élèves m	Nombre de moais p
1	24	84
3	8	28
2	12	42
6	4	14
4	6	21
12	2	7

* synthèse. Il est aisé de vérifier que les répartitions indiquées dans le tableau ci-dessus sont réellement possibles.

4. Déterminons la distance d séparant Rapa Iti de Rapa Nui.

La situation peut être schématisée en dessinant un cercle pour le parallèle.



Ainsi la distance entre les deux îles représente une proportion de $\frac{35}{360}$ de la longueur du 27^e parallèle qui est un cercle.
Par conséquent

$$\begin{aligned} d &= \frac{35}{360} \times (2\pi 5676 \text{ km}) \\ &= \frac{35}{360} \times 2\pi 5676 \text{ km} \\ &\approx 3467{,}2711 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\boxed{d \approx 3467 \text{ km.}}$$

Partie B : le drapeau chilien.

1. * Déterminons la longueur de tissu bleu nécessaire.

   $90 = 6 \times 15$ donc sur une largeur de tissu il est possible de découper six carrés.
   Il faudra donc disposer $\frac{24}{6} = 4$ carrés sur la longueur. Ceci représente une longueur de 4×15 cm $= 60$ cm.

Il faudra découper une longueur de 0,60 m de tissu bleu.

   * Remarquons que la question de découper en petits carrés ou en rectangles la partie rouge du drapeau ne se pose pas puisque les 90 cm sont aussi bien divisible par 15 cm que par 30 cm.
   Puisqu'il y a deux fois plus de carrés blancs que de carrés bleu

il faudra découper 1,20 m de tissu blanc.

   * Puisqu'il y a trois fois plus de carrés rouges que de carrés bleu

il faudra découper 1,80 m de tissu rouge.

2. Déterminons le coût, c_D, de la fabrication des drapeaux.

   Il faut prendre en compte le coût du tissu :

$$\begin{aligned} c_T &= [(0{,}60 \text{ m}) + (1{,}20 \text{ m}) + (1{,}80 \text{ m})] \times (700 \text{ F/m}) \\ &= (3{,}60 \text{ m}) \times (700 \text{ F/m}) \\ &= 2\,520 \text{ F} \end{aligned}$$

Mais aussi le coût des étoiles :

$$\begin{aligned} c_E &= 24 \times 250 \text{ F} \\ &= 6\,000 \text{ F} \end{aligned}$$

Finalement le coût total est

$$\begin{aligned} c_D &= c_T + c_E \\ &= (2\,520 \text{ F}) + (6\,000 \text{ F}) \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{c_T = 8\,520 \text{ F.}}$$

Parie C : dans l'avion.

1. Exprimons un pied en millimètre.

   D'après l'énoncé :

$$35\,000 \text{ ft} = 10\,668 \text{ m}$$

   Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{35\,000 \text{ ft}}{35\,000} &= \frac{10\,668 \text{ m}}{35\,000} \\ \frac{35\,000}{35\,000} \text{ ft} &= \frac{10\,668}{35\,000} \text{ m} \\ 1 \text{ ft} &= 0{,}3048 \text{ m} \\ 1 \text{ ft} &= 0{,}3048 \times 1000 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$1 \text{ ft} = 304{,}8 \text{ mm}.$$

2. Déterminons l'heure d'arrivée.

   Nous connaissons la vitesse de l'avion et la distance qu'il doit parcourir, par conséquent la durée du trajet restant est

$$\begin{aligned}
d_r &= \frac{4\,018 \text{ km}}{853 \text{ km/h}} \\
&= \frac{4\,018}{853} \ \frac{\text{km}}{\text{km} \cdot \text{h}^{-1}} \\
&= \frac{4\,018}{853} \ \text{h} \\
&= \left(4 + \frac{606}{853}\right) \ \text{h} \\
&= (4 \text{ h}) + \left(\frac{606}{853} \times 60 \text{ min}\right) \\
&\approx (4 \text{ h}) + (43 \text{ min})
\end{aligned}$$

   Par conséquent l'heure à l'arrivée sera, en arrondissant à la minute :

$$\begin{aligned}
(15 \text{ h}) + (43 \text{ min}) + (4 \text{ h}) + (43 \text{ min}) &= [(15+4) \text{ h}] + [(43+43) \text{ min}] \\
&= (19 \text{ h}) + (86 \text{ min}) \\
&= (19 \text{ h}) + [(1 \times 60 + 26) \text{ min}] \\
&= (19 \text{ h}) + (1 \text{ h}) + (26 \text{ min})
\end{aligned}$$

   Finalement :

   Lorsqu'ils arriveront l'heure locale sera : 20 h et 26 min.

3. Contrairement à la question I.C.1, nous ne pouvons pas passer d'une unité à l'autre. En effet il n'y a pas proportionnalité entre les degrés Celsius et Fahrenheit. Le terme « degré » et le symbole °sont là pour nous en avertir. Il ne s'agit pas d'unités mais d'échelles de mesure. Autrement dit le zéro est choisi de façon arbitraire.

La seule unité (au sens du système international) de mesure de température est le kelvin noté K sans le °. Dans ce cas le zéro correspond au zéro absolu c'est-à-dire le niveau d'énergie (et donc d'agitation) minimal au niveau atomique.

(a) Nous pourrions nous contenter de vérifier que la valeur proposée pour b convient mais nous allons la déterminer comme si elle ne nous était pas donnée par l'énoncé.

Déterminons b.

Du fait de la définition de f donnée dans l'énoncé nous devons avoir :

$$f(-58) = -50$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{5}{9} \times (-58) + b &= -50 \\ -\frac{290}{9} + b &= -50 \\ -\frac{290}{9} + b + \frac{290}{9} &= -50 + \frac{290}{9} \end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{b = -\frac{160}{9}.}$$

(b) Interprétons la question posée par une équation.

Résolvons l'équation $f(t) = t$ d'inconnue t un nombre réel.

$$f(t) = t \iff \frac{5}{9}t - \frac{160}{9} = t$$

Nous reconnaissons une équation inéaire du premier degré que nous résoudrons donc en isolant l'inconnue :

$$\begin{aligned}
f(t) = t &\iff \frac{5}{9}t - \frac{160}{9} - t = t - t \\
&\iff \left(\frac{5}{9} - 1\right)t - \frac{160}{9} = 0 \\
&\iff -\frac{4}{9}t - \frac{160}{9} + \frac{160}{9} = 0 + \frac{160}{9} \\
&\iff -\frac{4}{9}t = \frac{160}{9} \\
&\iff \frac{-\frac{4}{9}t}{-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{160}{9}}{-\frac{4}{9}} \\
&\iff t = -\frac{160}{9} \times \frac{9}{4} \\
&\iff t = -40
\end{aligned}$$

Les deux échelles de mesure de température coïncident pour une température de $-40°$ (Celsius ou Fahrenheit).

(c) Nous pourrions choisir deux températures distinctes et vérifier qu'il n'y a pas proportionnalité entre les mesures en degrés Celsius et Fahrenheit de ces deux températures. Nous allons privilégier un argument classique en collège.

f est une fonction affine mais n'est pas une fonction linéaire ($b \neq 0$), elle ne modélise donc pas une situation de proportionnalité.

Les mesures en degrés Celsius et Fahrenheit ne sont pas proportionnelles.

(d) Exprimons t_F en fonction de t_C.

Nous avons

$$f(t_F) = t_C$$

Autrement dit :

$$\frac{5}{9}t_F - \frac{160}{9} = t_C$$

Dans la précédente égalité nous allons isoler t_F comme si nous résolvions l'équation d'inconnue t_F.

$$\begin{aligned}
\frac{5}{9}t_F - \frac{160}{9} = t_C &\leftrightarrow \frac{5}{9}t_F - \frac{160}{9} + \frac{160}{9} = t_C + \frac{160}{9}\\
&\Leftrightarrow \frac{5}{9}t_F = t_C + \frac{160}{9}\\
&\Leftrightarrow \frac{9}{5}\times\frac{5}{9}t_F = \frac{9}{5}\times\left(t_C + \frac{160}{9}\right)\\
&\Leftrightarrow t_F = \frac{9}{5}t_C + \frac{9}{5}\times\frac{160}{9}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{t_F = \tfrac{9}{5}t_C + 32.}$$

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. (a) Calculons l'aire, $\mathscr{A}_1$, de la base du cône.

La base du cône est un disque de diamètre 5 cm donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_1 &= \pi\left(\frac{5\text{ cm}}{2}\right)^2\\
&= \pi \times 2{,}5^2\text{ cm}^2\\
&= \frac{25}{4}\pi\text{ cm}^2\\
&\approx 19{,}634954\text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Arrondir au millimètre carré signifie ici arrondir à la seconde décimale car $1\text{ cm}^2 = 100\text{ mm}^2$.

$$\boxed{\mathscr{A}_1 \approx 19{,}63\text{ cm}^2.}$$

(b) Déterminons le volume, $\mathscr{V}_1$, du cône du haut.

En utilisant la formule rappelée dans l'énoncé et en utilisant les calculs de la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1 &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{25}{4}\pi \text{ cm}^2\right) \times (12 \text{ cm}) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{25}{4}\pi \times 12 \text{ cm}^3 \\ &\approx 78{,}53981 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Arrondir au millimètre cube signifie ici arrondir à la troisième décimale.

$$\boxed{\mathscr{V}_1 \approx 78{,}540 \text{ cm}^3.}$$

2. (a) Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ du volume du cône de sable.

Puisque le cône de sable est une réduction à $\frac{1}{2}$ du cône du haut

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \mathscr{V}_1 \\ &\approx \frac{1}{2^3} \times 78{,}540 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

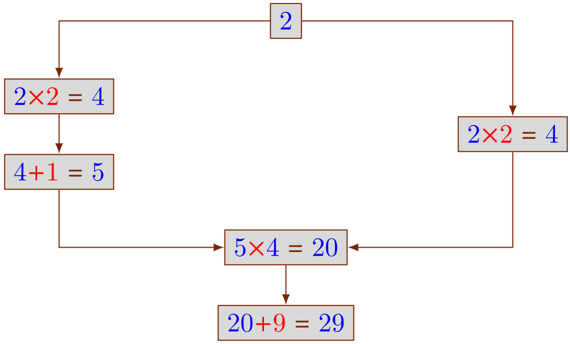
$$\boxed{\mathscr{V} \approx 9{,}844 \text{ cm}^3.}$$

(b) Déterminons le temps mis pour arriver à la position représentée.

D'après la question précédente $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ du volume de départ reste dans le sablier autrement dit $\frac{7}{8}$ du sable s'est déjà écoulé.
Puisque le volume de sable et le temps écoulés sont proportionnels cela signifie qu'il s'est déjà écoulé $\frac{7}{8} \times 4 \text{ min} = 3{,}5 \text{ min}$.
Autrement dit :

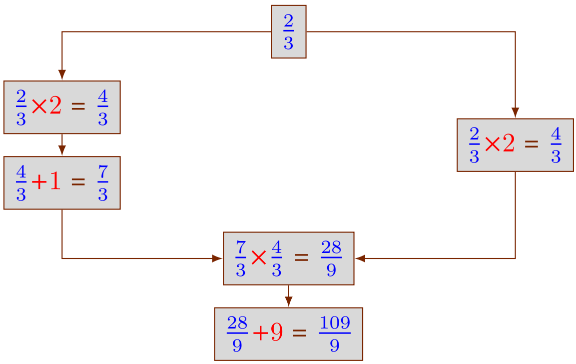
la position représentée est atteinte au bout de trois minutes et trente secondes.

Exercice 2.



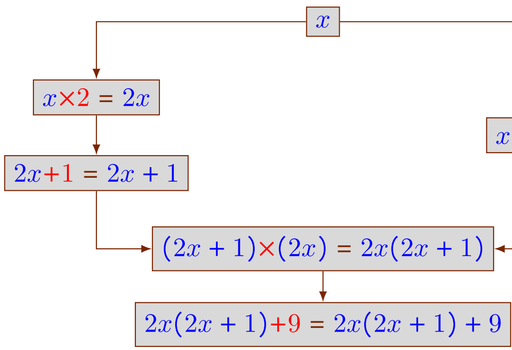
1. (a)

Si l'on entre 2 le programme renvoie 29.



(b)

Si l'on entre $\frac{2}{3}$ alors le programme renvoie $\frac{109}{9}$.



(c)

Si l'on entre x alors le programme renvoie $2x(2x + 1) + 9$.

2. (a) Construisons le tableau des variables de ce programme avec 2 en entrée.

Instruction	réponse	résultat
1	2	
2	2	$2 + 3 = 5$
3	2	$5 \times 5 = 25$

En faisant tourner ce programme avec 2 en entrée nous obtenons 25 en sortie.

(b) Construisons le tableau des variables de ce programme avec 1,5 en entrée.

Instruction	réponse	résultat
1	1,5	
2	2	$1,5 + 3 = 4,5$
3	2	$4,5 \times 4,5 = 20,25$

En faisant tourner ce programme avec 1,5 en entrée nous obtenons 20,25 en sortie.

(c) Construisons le tableau des variables de ce programme avec x en entrée.

Instruction	réponse	résultat
1	x	
2	2	$x + 3 = x + 3$
3	2	$(x + 3) \times (x + 3) = (x + 3)^2$

En faisant tourner ce programme avec 2 en entrée nous obtenons 25 en sortie.

3. Ces deux programmes renvoie la même réponse en entrant x si et seulement si : $2x(2x + 1) + 9 = (x + 3)^2$.

Résolvons cette équation.

$$2x(2x+1)+9=(x+3)^2$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}2x\times 2x+2x\times 1+9 &= x^2+2\times x\times 3+3^2\\ 4x^2+2x+9 &= x^2+6x+9\end{aligned}$$

Il ne s'agit *a priori* pas d'une équation linéaire nous allons donc essayer de nous ramener à une équation produit-nul :

$$\begin{aligned}4x^2+2x+9-(x^2+6x+9) &= x^2+6x+9-(x^2+6x+9)\\ 4x^2+2x+9-(x^2+6x+9) &= 0\\ 4x^2+2x+9-x^2-6x-9 &= 0\\ 3x^2-4x &= 0\\ 3x\times x-6x &= 0\\ (3x-4)x &= 0\\ 3x-4=0 &\quad \text{ou} \quad x=0\\ 3x=4 &\quad \text{ou} \quad x=0\\ x=\frac{4}{3} &\quad \text{ou} \quad x=0\end{aligned}$$

Les deux programmes renvoient la même valeur lorsqu'on choisi en entrée $\frac{4}{3}$ ou 0.

Exercice 3.

1. (a) La note minimale est 5 et l'étendue est 14 donc la note maximale est $5+14=19$.

L'affirmation est fausse.

(b) $\frac{5+19}{2} = 12$ donc enlever ces deux notes ne modifiera pas la moyenne. Détaillons cela.

Calculons la moyenne $\overline{x}$ obtenue en enlevant la meilleur et la moins bonne note.

Puisque la moyenne des 24 élèves est 12, que la moins bonne note est 5 t la meilleur 19, nous avons

$$\frac{22\overline{x} + 5 + 19}{24} = 12$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
24\times\frac{22\overline{x} + 24}{24} &= 24\times 12 \\
22\overline{x} + 24 &= 288 \\
22\overline{x} + 24 - 24 &= 288 - 24 \\
22\overline{x} &= 264 \\
\frac{22\overline{x}}{22} &= \frac{264}{22} \\
\overline{x} &= 12
\end{aligned}$$

L'affirmation est fausse.

(c) La médiane est de 11 donc la moitié des élèves ont eu une note supérieure ou égale à 11.

L'affirmation est fausse.

2. Comme précédemment il faut faire une moyenne des moyennes.

Calculons la moyenne $\overline{x}_B$ de la classe B.

$$\begin{aligned}
x_B &= \frac{16 \times 11{,}7 + 11 \times 10{,}3}{16 + 11} \\
&\approx 11{,}129
\end{aligned}$$

$$\overline{x}_B \approx 11{,}1.$$

3. Là encore c'est une moyenne de moyennes.

   Calculons la moyenne $\overline{x}_C$ de la classe C.

   Nous savons que

$$\frac{24 \times 12 + 32 \times \overline{x}_C}{24 + 32} = 11{,}2$$

   Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{288 + 32\overline{x}_C}{56} &= 11{,}2 \\
56\times\frac{288 + 32\overline{x}_C}{56} &= 56\times 11{,}2 \\
288 + 32\overline{x}_C &= 627{,}2288 + 32\overline{x}_C - 288 \qquad = 627{,}2 - 288 \\
32\overline{x}_C &= 339{,}2 \\
\frac{32\overline{x}_C}{32} &= \frac{339{,}2}{32}
\end{aligned}$$

$$\overline{x}_C = 10{,}6.$$

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1. (a)

   (b)

2.

3.

Situation 2.

1.

2.

3.

Situation 3.

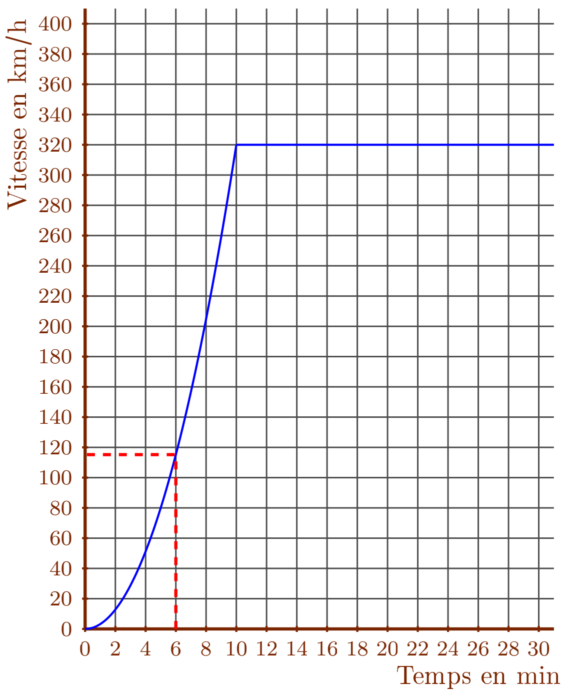
1.
2.
3.
4.
5. (a)
   (b)
6.

Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 5.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

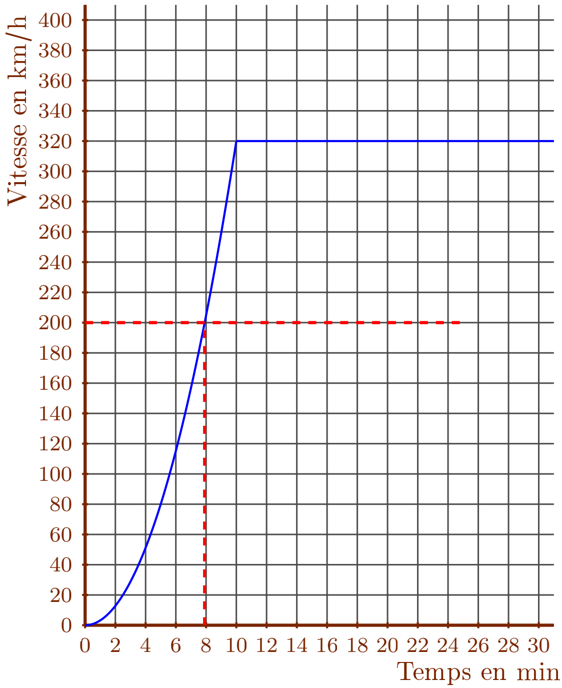
Partie A : vitesse d'un train.



1. (a)

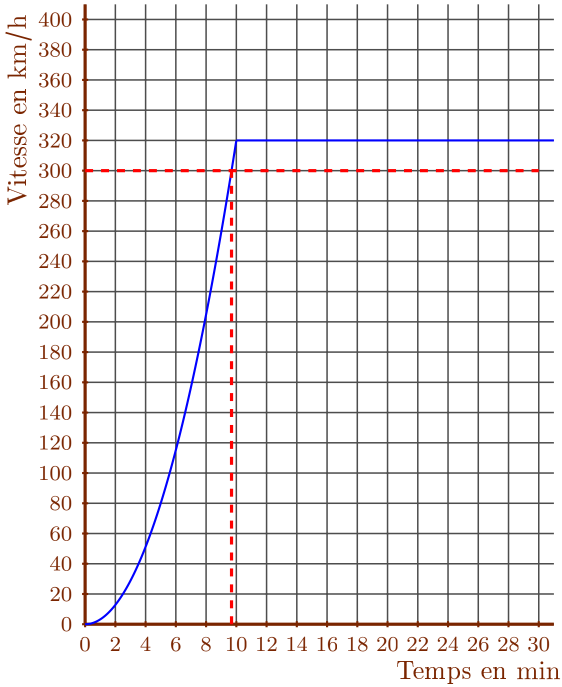
Par lecture graphique $v(6) \approx 116\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

$v(6) \approx 120\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ autrement dit 6 minutes après son départ le train roule à 120 km/h.



(b)

Le train atteint une vitesse de 200 km/h au bout de 8 minutes.



(c)

$$9 \leqslant t_0 \leqslant 10.$$

2. Déterminons la distance $d(15; 20)$ parcourue par le train entre la quinzième et la vingtième minute.

   Entre la quinzième et la vingtième minute le train se déplace à une vitesse constante de 320 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Par conséquent la distance parcourue est

$$
\begin{aligned}
d(15;20) &= v(15) \times [(20 \text{ min}) - (15 \text{ min})] \\
&= \left(320 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}\right)(5 \text{ min}) \\
&= 320 \times 5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{min} \\
&= 1600 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \frac{1}{60} \text{ h} \\
&= 1600 \times \frac{1}{60} \text{ km} \\
&= \frac{80}{3} \text{ km} \\
&= 26{,}666\ldots \text{ km}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{d(15;20) \approx 27 \text{ km.}}$$

3. (a) La fonction v est continue (autrement dit sa courbe représentative est une ligne d'un seul tenant, sans interruption) et croissante. Nous pourrions même préciser : strictement croissante pour t entre 0 et 10.

   Or d'après le tableau $v(9) \leqslant 300 \leqslant v(10)$ donc nous retrouvons bien :

   $$\boxed{9 \leqslant t_0 \leqslant 10.}$$

   (b) Donnons un encadrement d'amplitude 0,1 de t_0.

   Puisque v est continue et croissante, et comme $v(9{,}6) \leqslant 300 \leqslant v(9{,}7)$

   $$\boxed{9{,}6 \leqslant t_0 \leqslant 9{,}7.}$$

4. (a) Calculons $v(6)$.

   $$v(6) = 3{,}2 \times 6^2$$

   $$\boxed{v(6) = 115{,}2.}$$

(b) Formule entrée en B2 :

$$= 3{,}2 * B1 \wedge 2$$

(c) Déterminons t_0.

$$v(t_0) = 300$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 3{,}2t_0^2 &= 300 \\ \frac{3{,}2t_0^2}{3{,}2} &= \frac{300}{3{,}2} \\ t_0^2 &= 93{,}75 \\ t_0 = \sqrt{93{,}75} \quad \text{ou} \quad t_0 &= -\sqrt{93{,}75} \end{aligned}$$

Or t_0 mesure le temps écoulé et est donc une grandeur positive, nécessairement

$$t_0 = \sqrt{93{,}75}.$$

Une rédaction plus rigoureuse algébriquement utilise une identité remarquable :

$$v(t_0) = 300$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 3{,}2t_0^2 &= 300 \\ \frac{3{,}2t_0^2}{3{,}2} &= \frac{300}{3{,}2} \\ t_0^2 &= 93{,}75 \\ t_0^2 - 93{,}75 &= 93{,}75 - 93{,}75 \\ t_0^2 - \sqrt{93{,}75}^2 &= 0 \\ \left(t_0 - \sqrt{93{,}75}\right)\left(t_0 + \sqrt{93{,}75}\right) &= 0 \\ t_0 = \sqrt{93{,}75} \quad \text{ou} \quad t_0 &= -\sqrt{93{,}75} \end{aligned}$$

Exprimons t_0 en minutes et secondes.

$$\begin{aligned}\sqrt{93{,}75}\text{ min} &\approx 9{,}682\text{min}\\ &\approx (9\text{ min}) + (0{,}682\text{ min})\\ &\approx (9\text{ min}) + (0{,}682\times 60\text{ s})\\ &\approx (9\text{ min}) + (40{,}92\text{ s})\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{(9\text{ min}) + (40\text{ s}) \leqslant t_0 \leqslant (9\text{ min}) + (41\text{ s}).}$$

5. (a) Si le nombre 6 est entré le programme renvoie 320.

   (b) Si le nombre 15 est entré le programme renvoie 720.

   (c) La fonction v est définie par morceaux d'abord pour $t \in [0; 10]$ puis pour $t \in [10; +\infty[$. Sur $[0; 10]$ v est (la restriction d') une fonction polynomiale de degré deux puis sur $[10; +\infty[$ elle est constante égale à 320.

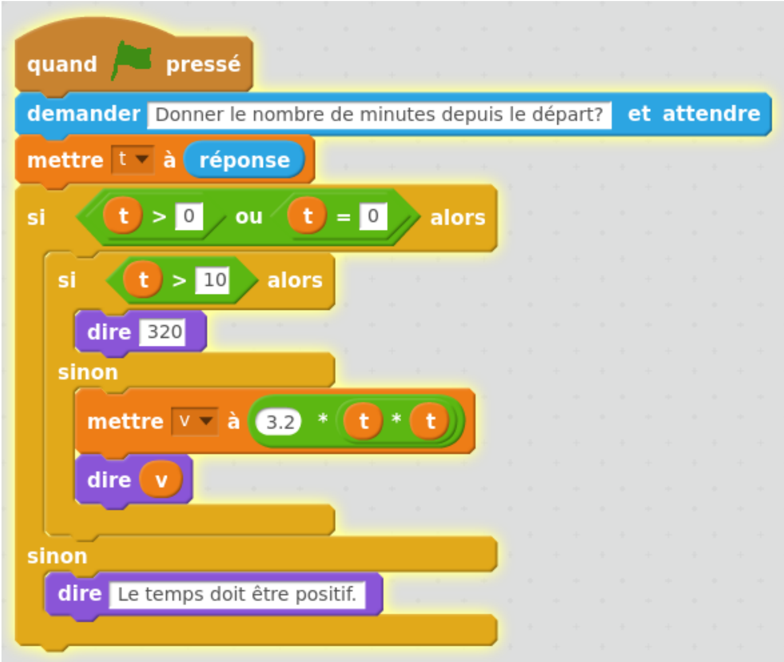
   L'élève a interverti les formules qui s'appliquent sur $[0; 10]$ et sur $[10; +\infty[$.

   (d) Il suffit de modifier la condition dans l'instruction conditionnelle « si ». Autrement dit il faut remplacer

par


.

Nous obtenons alors le programme :



Partie B : traverses de chemin de fer.

1. Dans cet exercice j'utiliserai les notations canadiennes francophones des pouces et pieds c'est-à-dire respectivement po et pi.

   Exprimons e en centimètres.

   D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} e &= (4 \text{ pi}) + (8{,}5 \text{ po}) \\ &= (4 \times 12 \text{ po}) + (8{,}5 \text{ po}) \\ &= 56{,}5 \text{ po} \\ &= 56{,}5 \times 2{,}54 \text{ cm} \\ &= 143{,}51 \text{ cm} \end{aligned}$$

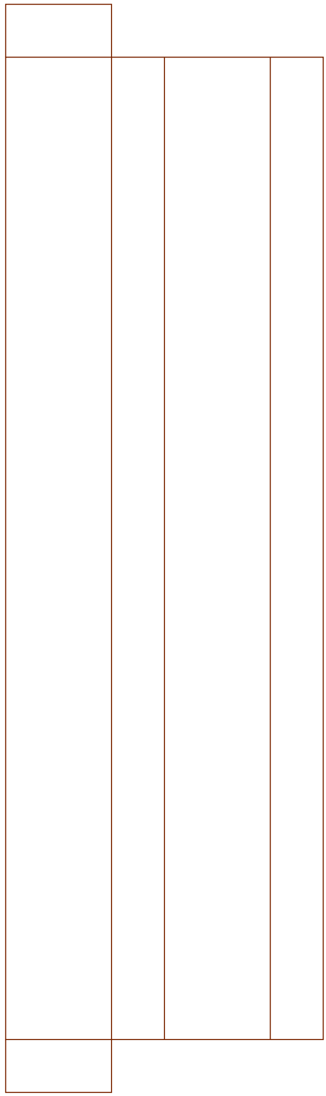
$$\boxed{e \approx 143{,}5 \text{ cm.}}$$

2. (a) Dessinons un patron d'une traverse à l'échelle 1/20.

Remarquons : 2,60 m = 2,60×100 cm = 260 cm.

Taille réelle	1	14 cm	28 cm	260 cm
À l'échelle	$\frac{1}{20}$ = 0,05	0,7 cm	1,4 cm	13 cm

Par exemple : $\frac{1}{20} \times (14 \text{ cm}) = 0{,}7$ cm.
Nous en déduisons le patron à l'échelle 1/20 :



(b) Déterminons la masse m_1 d'une traverse.

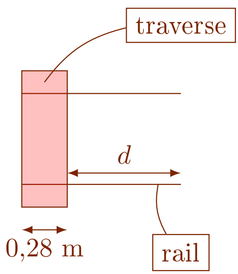
En utilisant la densité du chêne qui constitue la traverse qui a la forme d'un parallélépipède rectangle :

$$\begin{aligned} m_1 &= \left(690 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}\right) \times (14 \text{ cm}) \times (28 \text{ cm}) \times (2{,}60 \text{ m}) \\ &= 690 \times 14 \times 28 \times 2{,}60 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{m}^{-3} \\ &= 703\,248 \text{ kg} \cdot \left(\frac{1}{100} \text{ m}\right)^2 \cdot \text{m}^{-2} \\ &= 703\,248 \times \frac{1}{100^2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^{-2} \\ &= 70{,}3248 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\boxed{m_1 \approx 70 \text{ kg.}}$$

3. (a) Déterminons d par une mise en équation.

Voici l'agencement (ou le motif pour reprendre la terminologie des frises et des pavages) qui doit être reproduit 1 520 fois par kilomètre :



Nous avons donc

$$1\,520 \times [(0{,}28 \text{ m}) + d] = 1 \text{ km}$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
1\,520 \times [(0{,}28 \text{ m}) + d] &= 1 \times 1\,000 \text{ m} \\
\frac{1\,520 \times [(0{,}28 \text{ m}) + d]}{1\,520} &= \frac{1\,000 \text{ m}}{1\,520} \\
(0{,}28 \text{ m}) + d &= \frac{25}{38} \text{ m} \\
(0{,}28 \text{ m}) + d - (0{,}28 \text{ m}) &= \left(\frac{25}{38} \text{ m}\right) - (0{,}28 \text{ m}) \\
d &= \left(\frac{25}{38} - 0{,}28\right) \text{ m}
\end{aligned}$$

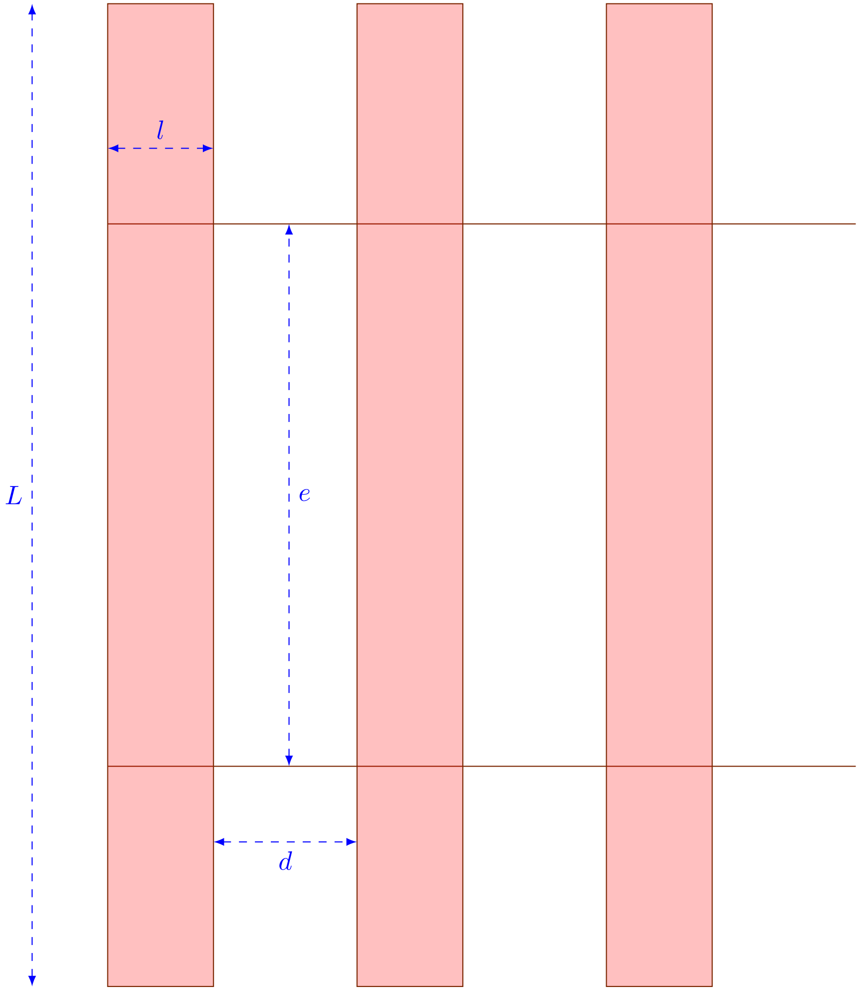
$$\boxed{d \approx 0{,}38 \text{ m.}}$$

(b) Dessinons les trois traverses à l'échelle 1/20.

Remarquons : 0,38 m = 0,38×100 cm = 38 cm.
En notant l et L respectivement les largeurs et longueurs des traverses :

Dénomination	d	l	L	e
Taille réelle	38 cm	28 cm	260 cm	143,5 cm
À l'échelle	1,9 cm	1,4 cm	13 cm	7,175 cm

Ce schéma est à l'échelle 1/20.



II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. En tapant la division sur la calculatrice nous voyons que $\frac{27}{45} = 0{,}6$. Il s'agit donc bien d'un nombre décimal.
   Nous avons plusieurs possibilité pour démontrer que l'affirmation est juste.
   Nous pouvons montrer que

— $\frac{27}{45}$ admet une écriture décimale ne comportant que de zéros à partir d'un certain rang
— dans la forme irréductible de $\frac{27}{45}$ son dénominateur n'a que 2 ou 5 comme facteurs premiers (et éventuellement 1 si le nombre donné avait été un entier).
— $\frac{27}{45}$ égale une fraction dont le dénominateur est un multiple de 10.

Je vais le faire de la première façon.

Démontrons que $\frac{27}{45}$ est un nombre décimal.

Procédons à la division posée en potence de 27 par 45

$$\begin{array}{r|l} 27 & 45 \\ \cline{2-2} -\ \ 0 & 0{,}6 \\ \cline{1-1} 270 & \\ -270 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc $\frac{27}{45}$ admet une écriture décimale n'admettant que des zéros à partir d'un certain rang autrement dit $\frac{27}{45}$ est un nombre décimal.

L'affirmation 1 est vraie.

2. Un résultat général qui semble difficile à démontrer. En testant quelques valeurs nous voyons que cela ne fonctionne pas.
Pour démontrer qu'une règle générale (propriété universelle) est fausse il suffit de trouver un cas pour lequel çà ne fonctionne pas.

Exhibons un contre-exemple.

$a = 1$ et $b = 0{,}1$ sont des nombres décimaux et $\frac{a}{b} = \frac{1}{0{,}1} = 10$. Donc dans ce cas $a < \frac{a}{b}$.

L'affirmation 2 est fausse.

3. Quelques essais semblent confirmer la proposition. Essayons de démontrer ce résultat général.

Démontrons que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

Le résultat doit être démontrer pour n'importe quelle série de trois entiers consécutifs. Nous choisissons donc un entier quelconque mais sans lui donnée une valeur particulière pour que notre raisonnement garde sa valeur générale.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Alors n, $n+1$ et $n+2$ sont trois entiers consécutifs.
Nous avons

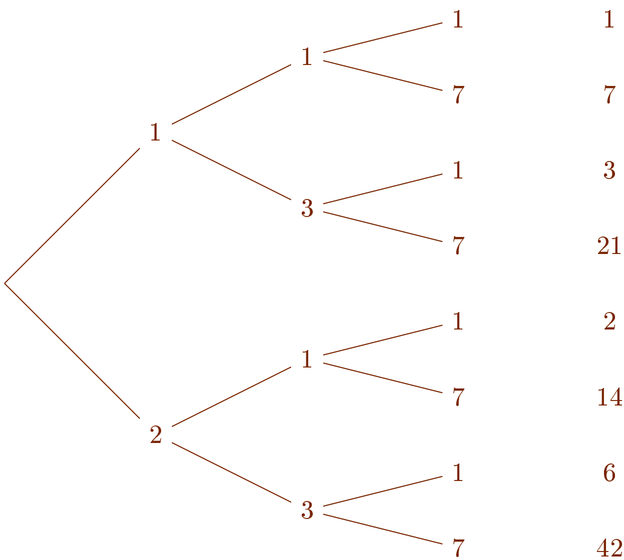
$$\begin{aligned} n + (n+1) + (n+2) &= n + n + 1 + n + 2 \\ &= 3n + 3 \\ &= 3n + 3\times 1 \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

Donc la somme des trois entiers consécutifs est bien un multiple de trois. De plus ce résultat est bien général puisqu'il est vrai quelque soit la valeur choisie pour n.

L'affirmation 3 est vraie.

4. Déterminons tous les diviseurs (positifs) de 42.

Remarquons tout d'abord que la décomposition de 42 en facteurs premiers est : $42 = 2 \times 3 \times 7$.
Présentons le diviseurs sous forme d'arbre :



Nous voyons que 42 possède exactement 8 diviseurs positifs.

L'affirmation 4 est fausse.

Exercice 2.

1. Démontrons que (ST) et $(S'T')$ ne sont pas parallèles.

   * Configuration de Thalès.
     Les points R, S, S' d'une part et R, T et T' d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèse.
     D'une part :

$$\begin{aligned}\frac{RS}{RS'} &= \frac{RS}{RS+SS'}\\ &= \frac{10}{10+4}\\ &= \frac{5}{7}\end{aligned}$$

   d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{RT}{RT'} &= \frac{RT}{RT+TT'}\\ &= \frac{10{,}5}{10{,}5+4}\\ &= \frac{3\times 7}{29}\end{aligned}$$

   donc, d'après l'irréductible des fractions : $\frac{RS}{RS'} \neq \frac{RT}{RT'}$.

   Des deux points précédentes nous déduisons, d'après la contraposée du théorème de Thalès que

   (ST) et $(S'T')$ sont sécantes.

2. En reprenant le contexte de la correction de la question précédente, il y aura parallélisme si et seulement si, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{RS}{RS'} = \frac{RT}{RT'}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{10}{10+4} = \frac{10{,}5}{10{,}5+TT'}$$
$$\frac{5}{7} = \frac{10{,}5}{10{,}5+TT'}$$

en procédant à un produit en croix :

$$5(10{,}5+TT') = 7\times 10{,}5$$
$$\frac{5(10{,}5+TT')}{5} = \frac{73{,}5}{5}$$
$$10{,}5+TT' = 14{,}7$$
$$10{,}5+TT'-10{,}5 = 14{,}7-10{,}5$$
$$TT' = 4{,}2$$

(ST) et $(S'T')$ seront parallèles si et seulement si $TT' = 4{,}2$ cm.

Exercice 3.

1. (a) Démontrons le critère de divisibilité par 4 proposé.

Supposons que $b\times 10+c$ est divisible par 4.
Autrement dit : il existe un entier naturel q tel que $b\times 10+c = 4q$.
Alors

$$\begin{aligned} N &= a\times 100 + b\times 10 + c \\ &= 100a + 10b + c \\ &= 100a + 4q \\ &= 4\times 25a = 4\times q \\ &= 4\times(25a+q) \end{aligned}$$

Ainsi N est bien divisible par 4.

Si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est divisible par 4 alors N est divisible par 4

(b) Le ton de la question est beaucoup moins péremptoire qu'à la question précédente ce qui nous incite à rechercher un contre-exemple.

Démontrons que cette règle ne fonctionne pas pour la divisibilité par 8.

Posons $N = 308$.

Nous avons bien

— $100 \leqslant N \leqslant 999$

— $N > 10$,

— le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités, à savoir 08, est divisible par 8,

et pourtant la décomposition en facteurs premiers de 308 étant $2^2 \times 7 \times 11$, nous pouvons affirmer que 308 ,est pas divisible par $8 = 2^3$.

Cette règle ne fonctionne pas pour le divisibilité par 8.

2. Démontrons que si $a + b + c$ est divisible par 9 alors N l'est aussi.

Supposons donc que $a + b + c$ est démontrons qu'alors, nécessairement, N est aussi divisible par 9. Ainsi nous savons qu'il existe un entier naturel q tel que $a + b + c = 9$.

Suivons à l'aveugle les consignes de l'énoncé :

$$\begin{aligned} N - (a + b + c) &= 100a + 10b + c - a - b - c \\ &= 100a - 1a + 10b - 1b + c - c \\ &= 99a + 9b \\ &= 9 \times 11a + 9 \times b \\ &= 9(11a + b) \end{aligned}$$

par conséquent :

$$N = (a + b + c) + 9(11a + b)$$

Or par hypothèse $a + b + c = 9q$ donc

$$\begin{aligned} N &= 9q + 9(11a + b) \\ &= 9\left[q + (11a + b)\right] \end{aligned}$$

Tous les nombres intervenant dans cette écriture étant des entiers cela signifie que N est divisible par 9.

Si la somme des chiffres de N est divisible par 9 alors N est divisible par 9.

Exercice 4.

1. Schématisons la situation avec un tableau double entrée que nous remplirons du maximum des chiffres affichés par les deux dés.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Modélisons maintenant l'expérience aléatoire.

Notons Ω l'ensemble des couples d'entiers compris entre 1 et 6 représentant toutes les issues possibles lors du lancé des deux dés.

Les dés étant équilibrés il est naturel de munir Ω de l'équiprobabilité : tous les couples de nombres ont la même probabilité d'être obtenus.

La présentation la plus élégante des différents événements intervenant dans l'exercice consisterai à introduire la variable aléatoire X indiquant le maximum des deux faces. je fais un choix différent.

Notons A l'événement obtenir un maximum égale à 2.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Il y a équiprobabilité (entre les couples), A est réalisé (d'après le tableau) par 3 issues et l'univers Ω comporte (toujours d'après le tableau) 36 issues donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{36}.$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{12}.$$

2. Notons B l'événement obtenir un maximum de 6.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Il y a équiprobabilité, B est réalisé (d'après le tableau) par 11 issues et l'univers Ω comporte 36 issues donc :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{11}{36}.$$

3. Notons C l'événement obtenir un maximum qui soit inférieur ou égale à 3. Autrement dit 1, 2 ou 3.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Les issues qui nous intéressent forment un carré de trois cases de côté dans le tableau. Il y a donc $3 \times 3 = 9$ issues.

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

Il y a équiprobabilité, C est réalisé (d'après le tableau) par 9 issues et l'univers Ω comporte 36 issues donc :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{9}{36}.$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}.$$

4. Notons D_n l'événement obtenir un maximum qui soit inférieur ou égale à n. En raisonnant comme à la question précédente nous remarquons que les issues qui nous intéressent dessinent un carré de n cases de côté dans le tableau. Il y a donc $n \times n = n^2$ issues.

   Calculons $\mathbb{P}(D_n)$.

   Il y a équiprobabilité, D_n est réalisé (d'après le tableau) par n^2 issues et l'univers Ω comporte 36 issues donc :

$$\mathbb{P}(D_n) = \frac{n^2}{36}.$$

5. Nous remarquons sur le tableau que, par exemple, la probabilité d'obtenir 3 est $\mathbb{P}(D_3) - \mathbb{P}(D_2)$.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

   C'est l'idée qui est ici généralisée.

   Notons E_n l'événement obtenir n pour n entier compris entre 1 et 6.

   Exprimons $\mathbb{P}(E_n)$ en fonction de n.

   Raisonnons par disjonction des cas.

   * Si $n = 1$ alors $\frac{2n-1}{36} = \frac{1}{36}$. Nous obtenons bien $\mathbb{P}(E_1)$.
   * Si $2 \leqslant n \leqslant 6$ alors en raisonnant sur les carrés dans le tableaux nous avons

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(D_n) - \mathbb{P}(D_{n-1})$$

Et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n) &= \frac{n^2}{36} - \frac{(n-1)^2}{36}\\ &= \frac{n^2-(n-1)^2}{36}\\ &= \frac{n^2-(n^2-2\times n\times 1+1^2)}{36}\\ &= \frac{n^2-(n^2-2n+1)}{36}\\ &= \frac{n^2-n^2+2n-1}{36}\\ &= \frac{2n-1}{36}\end{aligned}$$

Dans tous les cas nous avons bien :

$$\boxed{\mathbb{P}(E_n) = \frac{2n-1}{36} \text{ pour tout } n \in [\![1;6]\!].}$$

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3. (a)
   (b)

Situation 2.

1.
2.

Situation 3.

1.
2.
3.

Situation 4.

1.

2.

Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 6.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à M. Meynier, Mme Ducournau, M. Bouvillon et Mme Champagnat pour toutes les corrections apportées.

I Première partie (13 points).

Partie A : étude d'une première disposition.

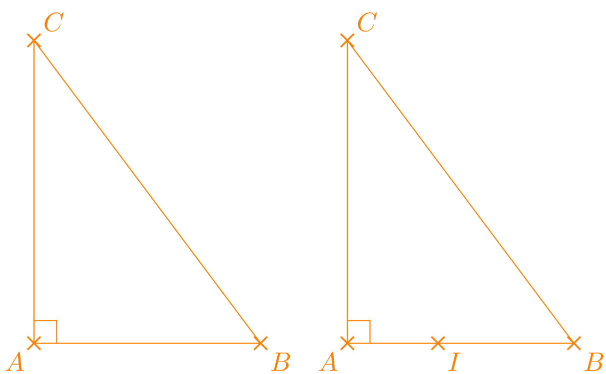
1. Justifions que $AIKJ$ est un rectangle.

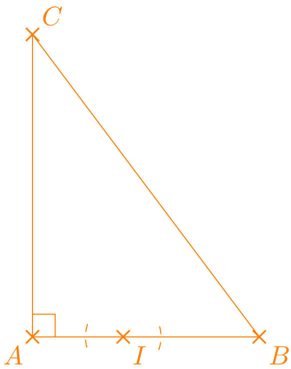
   Nous admettrons que le quadrilatère $AIKJ$ est convexe.

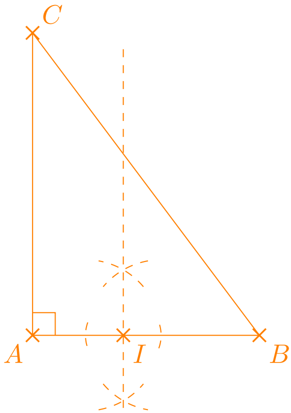
   ABC est rectangle en A donc $\widehat{IAJ}$ est droit.
   (KI) est perpendiculaire à (AB) donc $\widehat{KIA}$ est droit.
   (KJ) est perpendiculaire à (AC) donc $\widehat{AJK}$ est droit.
   Le quadrilatère convexe) $AIKJ$ ayant trois angles droits nous pouvons affirmer :

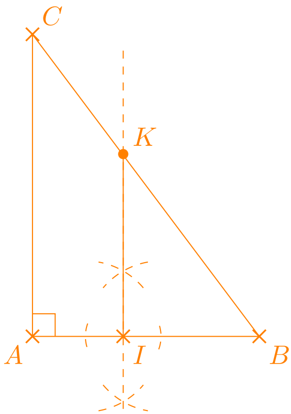
   $\boxed{AIKJ \text{ est un rectangle.}}$

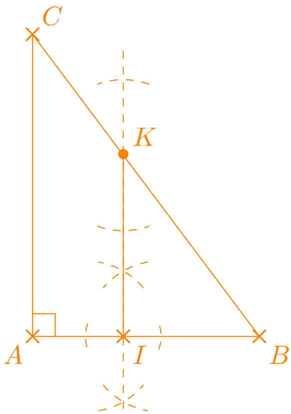
2. (a) Voici une construction à la règle non graduée (hormis pour le point I) et au compas.

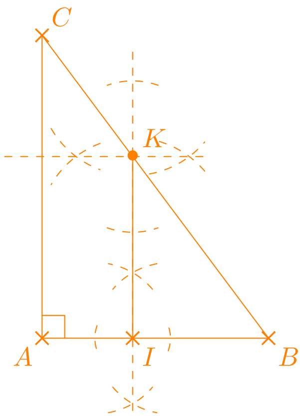


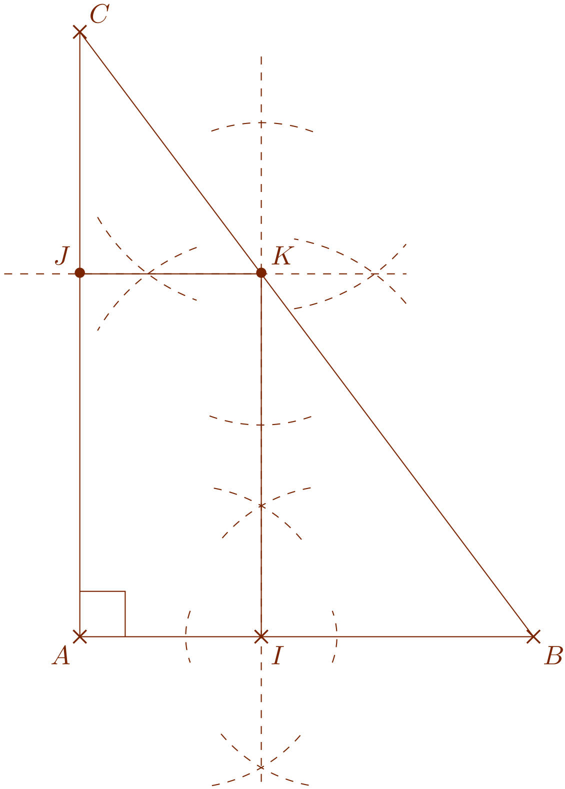

C
A
I
B


C
A
I
B


C
K
A
I
B


C
K
A
I
B


C
K
A
I
B



(b) Déterminons IK.

* Configuration de Thalès.
  Les points B, I, A d'une part et B, K ,C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* Hypothèse du théorème.
  $(IK) \parallel (AC)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BI}{BA} = \frac{IK}{AC}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\frac{AB - AI}{AB} = \frac{IK}{AC}$$

Les longueurs étant toutes exprimées en centimètres :

$$\frac{6-2{,}4}{6} = \frac{IK}{8}$$
$$\frac{3.6}{6} = \frac{IK}{8}$$
$$\frac{3.6}{6}\times 8 = \frac{IK}{8}\times 8$$
$$4{,}8 = IK$$

$$\boxed{IK = 4{,}8 \text{ cm.}}$$

(c) Calculons l'aire $\mathscr{A}(AIKJ)$ du rectangle $AIKJ$.

$$\mathscr{A}(AIKJ) = AI \times KJ$$
$$(2{,}4 \text{ cm}) \times (4{,}8 \text{ cm})$$
$$= 2{,}4 \times 4{,}8 \text{ cm} \cdot \text{cm}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(AIKJ) = 11{,}52 \text{ cm}^2.}$$

3. (a) Exprimons BI.

$I \in [AB]$, $AB = 6$ cm et $AI = x$ (avec x exprimé en centimètres) donc en centimètres :

$$BI = AB - AI$$

$$\boxed{BI = 6 - x.}$$

(b) Déterminons IK.

En utilisant le théorème de Thalès comme à la question 2.(b) nous obtenons :

$$\frac{BI}{BA} = \frac{IK}{AC}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{AB - AI}{AB} &= \frac{IK}{AC} \\
\frac{6 - x}{6} &= \frac{IK}{8} \\
\frac{6 - x}{6} \times 8 &= \frac{IK}{8} \times 8 \\
\left(\frac{6}{6} - \frac{x}{6}\right) \times 8 &= IK \\
\left(1 - \frac{1}{6}x\right) 8 &= IK \\
1 \times 8 - \frac{1}{6}x \times 8 &= IK \\
8 - \frac{8}{6}x &= IK \\
8 - \frac{4 \times 2}{3 \times 2}x &= IK
\end{aligned}$$

$$\boxed{IK = 8 - \tfrac{4}{3}x.}$$

(c) Exprimons l'aire $\mathscr{A}(AIKJ)$ du rectangle $AIKJ$ en fonction de x.

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(AIKJ) &= AI \times IK \\
&= x \times \left(8 - \frac{4}{3}x\right)
\end{aligned}$$

Nous pourrions nous contenter de cette expression factorisée qui répond à la question. Habituellement les expressions polynomiales, afin d'être aisément identifiables, se présentent sous forme développée, ordonnée et réduite.

$$\boxed{\mathscr{A}(AIKJ) = -\tfrac{4}{3}x^2 + 8x.}$$

(d) Traduisons l'énoncé par une équation.

Déterminons pour quelles valeurs de x nous avons $AI = IK$.

$$AI = IK$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
x &= 8 - \frac{4}{3}x \\
x + \frac{4}{3}x &= 8 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}x \\
\left(1\frac{4}{3}\right)x &= 8 \\
\frac{7}{3}x &= 8 \\
\frac{7}{3}x \times \frac{3}{7} &= 8 \times \frac{3}{7} \\
x &= \frac{24}{7}
\end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant \frac{24}{7} \leqslant 6$ nous pouvons conclure.

$AIKJ$ est un carré si et seulement si $AI = \frac{24}{7}$ cm.

Partie B : étude d'une seconde disposition.

1. Justifions que $IPQR$ est un rectangle.

   * R est le point du segment $[AC]$ tel que (RI) est parallèle à (BC) donc $IPQR$ est un trapèze de bases $[IR]$ et PQ.
   * P est le point du segment $[BC]$ tel que (PI) est perpendiculaire à (BC) donc $\widehat{QPI}$ est droit.

     Q est le point du segment $[BC]$ tel que (RQ) est perpendiculaire à (BC) donc $\widehat{RQP}$ est droit.

   $IPQR$ est un trapèze dont les deux angles d'une base sont droits donc

   $IPQR$ est un rectangle.

2. Calculons BC.

   ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore

   $$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

   Autrement dit, BC, AB et AC étant exprimés en centimètre :

   $$\begin{aligned} BC^2 &= 8^2 + 6^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

   BC étant une longueur c'est un nombre positif donc :

   $$BC = \sqrt{100}$$

   $$\boxed{BC = 10 \text{ cm.}}$$

3. (a) Justifions l'égalité proposée.

   La formule usuelle de calcul de l'aire d'un triangle parle de « la base » et de « la hauteur ». Il s'agit d'une incorrection car en plus de l'aspect imprécis du terme base, n'importe quel côté du triangle peut être choisi comme base. Pour répondre à cette question nous allons exprimer l'aire du triangle de deux façons différentes en choisissant deux « bases » différentes.

   * Puisque H est le pied de la hauteur issue de A l'aire, $\mathscr{A}(ABC)$, de ABC est donnée par : $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AH \times BC$.
   * Puisque ABC est rectangle en A, $[AB]$ est la hauteur issue de B de ABC et donc : $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times AC$.

   En égalant les deux formules trouvées pour $\mathscr{A}(ABC)$:

   $$\frac{1}{2} \times AH \times BC = \frac{1}{2} \times AB \times AC.$$

   De façon générale : $\frac{1}{b} \times a = \frac{1 \times a}{b} = \frac{a}{b}$.
   Nous pouvons donc écrire la précédente formule de la façon suivante :

   $$\boxed{\frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2}.}$$

(b) Déterminons AH.

L'égalité obtenue à la question précédente équivaut successivement :

$$\begin{aligned}
2\times \times AH \times BC &= 2\times\frac{1}{2} \times AB \times AC \\
AH \times BC &= AB \times AC \\
\frac{AH \times BC}{BC} &= \frac{AB \times AC}{BC} \quad \text{car } BC \neq 0 \\
AH &= \frac{AB \times AC}{BC} \\
AH &= \frac{6 \times 8}{10}
\end{aligned}$$

$$\boxed{AH = 4{,}8 \text{ cm.}}$$

4. (a) Justifions que $(IP) \parallel (AH)$.

Par construction $(IP) \perp (BC)$ et, puisque H est le pied de la hauteur issue de A dans ABC, $(AH) \perp (BC)$, donc

$$\boxed{(AH) \parallel (IP).}$$

(b) Exprimons IP en fonction de x.

* Configuration de Thalès.
  Les points B, I, A d'une part et B, P ,H d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* Hypothèse du théorème.
  $(IP) \parallel (AH)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BI}{BA} = \frac{IP}{AH}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\frac{AB - AI}{AB} = \frac{IP}{AH}$$

Les longueurs étant toutes exprimées en centimètres :

$$\begin{aligned}\frac{6-x}{6} &= \frac{IP}{4{,}8}\\ \frac{6-x}{6}\times 4{,}8 &= \frac{IP}{4{,}8}\times 4{,}8\\ (6-x)\frac{4{,}8}{6} &= IP\\ (6-x)\times 0{,}8 &= IP\\ 6\times 0{,}8 - x\times 0{,}8 &= IP\end{aligned}$$

$$\boxed{IP = 4{,}8 - 0{,}8x.}$$

5. (a) Justifions que $\frac{IR}{BC} = \frac{AI}{AB}$.

   * Configuration de Thalès.
     Les points A, I, B d'une part et A, R ,C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèse du théorème.
     Puisque $IPQR$ est un rectangle $(IR) \parallel (BC)$.

   Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\boxed{\frac{IR}{BC} = \frac{AI}{AB}.}$$

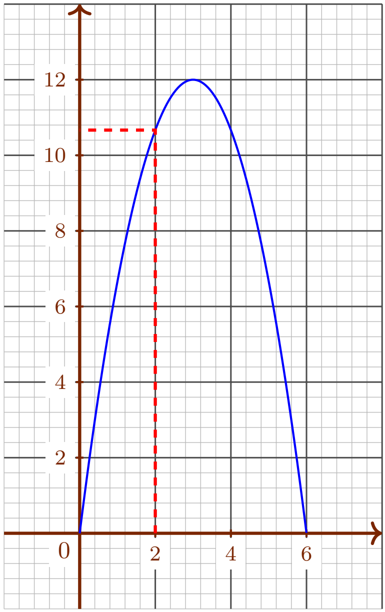
   (b) Exprimons IR en fonction de x.

   L'égalité démontrée à la question précédente équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{IR}{10} &= \frac{x}{6}\\ \frac{IR}{10}\times 10 &= \frac{x}{6}\times 10\\ IR &= \frac{10}{6}x\\ IR &= \frac{2\times 5}{2\times 3}x\end{aligned}$$

$$IR = \frac{5}{3}x.$$

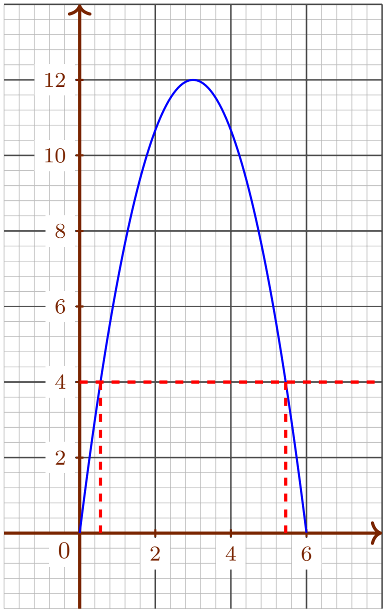
Partie C.



1. (a)

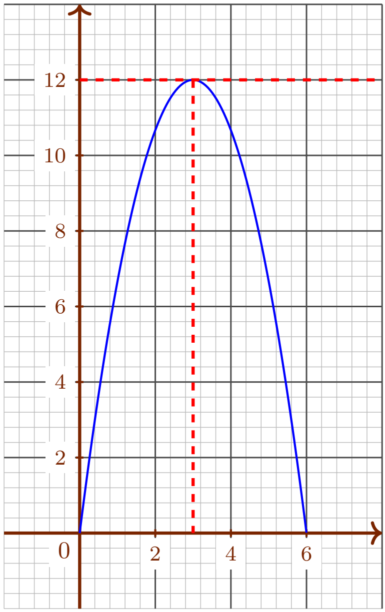
Si $AI = 2$ cm alors l'aire de $AIKJ$ est de 10,8 cm^2.

(b)



L'aire de $AIKJ$ est de 4 cm^2 lorsque AI = 0,5 cm ou AI = 5,5 cm.

(c)



L'aire de $AIKJ$ est maximale lorsque $AI = 3$ cm.

2. Comparons les aires de $AIKJ$ et $IPQR$.

Nous avons établi à la question A.3.(c) que $\mathscr{A}(AIKJ) = -\frac{4}{3}x^2 + 8x$.

D'autre part l'aire du rectangle $IPQR$ est

$$\mathscr{A}(IPQR) = IP \times IR$$

D'après les questions B.4.(a) et B.5.(b) :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(IPQR) &= (4{,}8 - 0{,}8x) \times \left(\frac{5}{3}x\right) \\ &= 4{,}8 \times \frac{5}{3}x - 0{,}8x \times \frac{5}{3}x \\ &= 8x - \frac{4}{3}x^2\end{aligned}$$

Ainsi trouver les valeurs de x pour lesquelles les aires seraient égales équivaut à résoudre l'équation $-\frac{4}{3}x^2 + 8x = 8x - \frac{4}{3}x^2$.

Cette équation est évidemment vraie quelque soit la valeur de x choisie.

Quelque soit la position du point I choisie, les aires des deux rectangles sont égales.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. (a) Déterminons l'aire totale A_1 de papier nécessaire pour produire carte et enveloppe.

   L'aire du carré $ABCD$ est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= (20\ \text{cm})^2\\ &= 20^2\ \text{cm}^2\\ &= 400\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

   Donc, d'après les formules données :

$$\begin{aligned}A_1 &= 2{,}2 \times \mathscr{A}(ABCD) + 1{,}8 \times \mathscr{A}(ABCD)\\ &= 2{,}2 \times \left(400\ \text{cm}^2\right) + 1{,}8 \times \left(400\ \text{cm}^2\right)\\ &= (2{,}2 \times 400 + 1{,}8 \times 400)\ \ \text{cm}^2\end{aligned}$$

   Finalement

$$A_1 = 1\,600\ \text{cm}^2.$$

   (b) Déterminons la masse, P_1, de l'enveloppe et de la lettre.

   Puisqu'ils sont façonnés avec le papier « super luxe » :

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left(150 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}\right)\times A_1 \\
&= \left(150 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}\right)\times\left(1\,600 \text{ cm}^2\right) \\
&= 150\times 1\,600 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{cm}^2 \\
&= 240\,000 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\left(\frac{1}{100}\text{ m}\right)^2 \\
&= 240\,000\times\left(\frac{1}{100}\right)^2 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{m}^2 \\
&= 24 \text{ g}
\end{aligned}$$

Déterminons le tarif, T_1, de l'affranchissement.

La missive pesant entre 20 g et 100 g si le tarif « lettre verte » s'applique alors il faudra payer, d'après le document 2 :

$$\boxed{T_1 = 1{,}76 \text{ €}.}$$

2. (a) Exprimons la masse, P_2, de la missive.

En procédant comme à la question précédente, nous obtenons l'aire A_2, en mètre carré, de l'enveloppe :

$$\begin{aligned}
A_2 &= 2{,}2\times\left(\frac{1}{100}x\right)^2 \\
&= 2{,}2\times\left(\frac{1}{100}\right)^2 x^2 \\
&= \frac{2{,}2}{10\,000}x^2
\end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit d'un papier « luxe » la masse, exprimée en gramme, de l'enveloppe est

$$\begin{aligned}
m_2 &= 120\times A_2 \\
&= \frac{264}{10000}x^2
\end{aligned}$$

Puis l'aire de la carte :

$$\begin{aligned}A_3 &= 1{,}8 \times \left(\frac{1}{100}x\right)^2\\ &= 1{,}8 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 x^2\\ &= \frac{1{,}8}{10\,000}x^2\end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit d'un papier cartonné la masse, exprimée en gramme, de la carte est

$$\begin{aligned}m_3 &= 350 \times A_3\\ &= \frac{630}{10000}x^2\end{aligned}$$

La masse de l'ensemble enveloppe et carte est donc

$$\begin{aligned}P_2 &= m_2 + m_3\\ &= \frac{264}{10\,000}x^2 + \frac{630}{10000}x^2\\ &= \frac{894}{10000}x^2\end{aligned}$$

Enfin

La masse en gramme est $P_2 = 0{,}0894x^2$.

(b) De nombreux arguments sont sans doute acceptables pour justifier notre réponse.
La masse est fonction de l'aire du carré, or si la longueur du côté du carré est multipliée par a alors sa surface est multipliée par a^2.
Nous pourrions choisir deux longueurs distinctes de coté de carré et vérifier qu'il n'y a pas proportionnalité pour ces valeurs particulières.
Je fais ici le choix d'un argument sur la nature des fonctions.

La masse de papier en fonction de la longueur x obtenue à la question précédente est une fonction polynomiale de degré deux. Ce n'est donc pas une fonction linéaire qui correspondrait à une situation de proportionnalité.

La masse de papier n'est pas proportionnelle à AB.

Exercice 2.

1. (a) Pour que le quadrilatère tracé soit un losange il faut que tous ses côtés aient la même longueur. Or le premier côté avait pour longueur 50 donc, nécessairement

   en A il faut écrire 50.

   (b) Dans un parallélogramme, donc *a fortiori*, dans un losange la somme des mesures de angles consécutifs est 180°. Nous devons donc avoir

$$40 + B = 180$$

   Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 40 + B - 40 &= 180 - 40 \\ B &= 140 \end{aligned}$$

   $B = 140$.

   (c) Les quatre blocs d'instructions en bleu sont des blocs de mouvement qui tracent (« avancer ») deux côtés du quadrilatère. Il suffit donc d'effectuer une nouvelle fois ce bloc de 4 instructions.

   La plus petite valeur possible pour C est 2.

2.

Figure	1	2	3
Script	B	C	A

Exercice 3.

1. * Déterminons l'étendue e.

   Pour déterminer l'étendue et la médiane nous aurons besoin d'ordonner la série. Ce n'est pas indispensable, mais pour faciliter la lisibilité de cette série nous allons également la regroupée par modalités, c'est-à-dire, dénombrer les valeurs identiques.

Nombre affiché	6	8	10	11	12	14	16	17	20	25	30
Effectif	4	1	2	2	2	2	2	1	1	2	1

$$\begin{aligned} e &= max - min \\ &= 30 - 6 \end{aligned}$$

$$e = 24.$$

* Déterminons la médiane, Me, de la série.

Complétons le précédent tableau avec les effectifs cumulés croissants :

Nombre affiché	6	8	10	11	12	14	16	17	20	25	30
Effectif	4	1	2	2	2	2	2	1	1	2	1
E.C.C.	4	5	7	9	11	13	15	16	17	19	20

- Ordre. La série des nombres inscrits sur les boules est rangée dans l'ordre croissant.
- Position de la médiane. L'effectif total est $N = 20$. $\frac{N}{2} = \frac{20}{2} = 10$. Donc Me est (série paire) entre la dixième et la onzième valeurs.
- Calcul de la médiane.

$$Me = \frac{12 + 12}{2}$$

$$Me = 12.$$

- Calculons la moyenne $\overline{x}$ de la série.

  Puisque nous avons regrouper la série par modalités nous allons calculer la moyenne avec la formule de moyenne pondérée.

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{4 \times 6 + 1 \times 8 + \cdots + 1 \times 30}{4 + 1 + \cdots + 1} \end{aligned}$$

$$\overline{x} = 13{,}75.$$

2. (a) Choisissons une modélisation, *i.e.* un univers et une loi de probabilité, qui soit cohérente avec la situation.

Notons Ω l'ensemble de toutes les boules. Munissons Ω de la loi d'équiprobabilité : toutes les boules ont donc la même probabilité d'être tirées.

Notons E_1 l'événement « tirer un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

Il y a équiprobabilité, d'après le tableau que nous avons construit à la question précédente E_1 est réalisé par $4 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 15$ issues (il y a 15 boules portant des nombres pairs), Ω contient 20 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1) &= \frac{15}{20}\\ &= \frac{3 \times 5}{4 \times 5}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \frac{3}{4}.}$$

(b) La description de l'événement contient le connecteur logique « ou » qui en termes ensembliste se traduit par la réunion. Nous devons donc considérer toutes les boules comportant un numéro pair mais aussi celles comportant un numéro impair et une voyelle.

Notons E_2 l'événement « tirer une voyelle ou un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(E_2)$.

Il y a équiprobabilité, en dénombrant dans la liste des boules nous voyons que E_2 est réalisé par 16 issues (il y a 15 boules portant des nombres pairs et la boule portant U et 17), Ω contient 20 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_2) &= \frac{16}{20}\\ &= \frac{4 \times 4}{5 \times 4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_2) = \frac{4}{5}.}$$

(c) La description de l'événement contient le connecteur logique « et » qui en termes ensembliste se traduit par l'intersection. Nous devons donc considérer toutes les boules comportant un numéro pair et (en même temps) une voyelle.

Notons E_3 l'événement « tirer une voyelle et un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(E_3)$.

Il y a équiprobabilité, en dénombrant dans la liste des boules nous voyons que E_3 est réalisé par 8 issues (toutes les boules avec des voyelles sauf celle avec U et 17), Ω contient 20 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_3) &= \frac{8}{20} \\ &= \frac{2 \times 4}{5 \times 4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_3) = \frac{2}{5}.}$$

3. Choisissons une nouvelle modélisation pour décrire cette situation.
Notons Ω' l'ensemble de toutes les boules restant dans l'urne après le tirage des lettres M, A, T, H. Munissons Ω' de la loi d'équiprobabilité : toutes les boules (restantes) ont donc la même probabilité d'être tirées.
Les boules M, A, T et H ayant déjà été tirées il reste :

I 14	V 25	E 6	L 8	E 6	S 16	
		E 6	M 10		T 11	I 14
U 17	E 6	S 16	V 25	A 12	Q 30	

Notons E_4 l'événement « obtenir S au cinquième tirage ».

Calculons $\mathbb{P}(E_4)$.

Il y a équiprobabilité, E_4 est réalisé par 2 issues (il y a deux boules portant la lettre S), Ω' contient 16 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_4) &= \frac{2}{16}\\ &= \frac{1\times 1}{8\times 2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_4) = \frac{1}{8}.}$$

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3.
4.

Situation 2.

1.
2. (a)
   (b)
3. (a)
   (b)

Situation 3.

1. (a)
   (b)
   (c)
2.

Épreuve de mathématiques CRPE 2020 groupe 7.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci M. Meynier pour les corrections apportées.

I Première partie (13 points).

Partie A : dimensions de formats.

1. Déterminons l'aire $\mathscr{A}_0$ de la feuille de format A0.

   Puisqu'il s'agit d'un rectangle dont nous connaissons les dimensions :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_0 &= (841 \text{ mm}) \times (1189 \text{ mm})\\ &= 841 \times 1189 \text{ mm} \cdot \text{mm}\\ &= 999\,949 \text{ mm}^2\\ &= 999\,949 \left(\frac{1}{1\,000} \text{ m}\right)^2\\ &= 999\,949 \left(\frac{1}{1\,000}\right)^2 \text{ m}^2\\ &= 0{,}999\,949 \text{ m}^2\end{aligned}$$

   Et puisque $1 \text{ dm}^2 = 1 \left(\frac{1}{10} \text{ m}\right)^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \text{ m}^2 = 0{,}01 \text{ m}^2$,

   $$\boxed{\mathscr{A}_0 \approx 1{,}00 \text{ m}^2.}$$

2. Puisque la feuille A4 s'obtient en découpant la feuille A3 suivant la longueur, sa longueur est la moitié de celle de la feuille A3 : $\frac{420 \text{ mm}}{2} = 210 \text{ mm} = 21 \text{ cm}$. Et la longueur de la feuille A4 est alors la largeur de la feuille A3, c'est-à-dire $297 \text{ mm} = 29{,}7 \text{ cm}$.

   > La feuille de format A4 a pour dimensions, en centimètres, $21 \times 29{,}7$.

3. Le format A4 en millimètre est, d'après la question précédente 210×297. Or $\frac{297}{2} = 148{,}5$ donc

   > les dimensions du format A5 en millimètre sont $148{,}5 \times 210$.

Partie B : étude de deux cylindres de révolution.

1. (a) Remarquons que la figure est trompeuse puisque les longueurs et largeurs de $ABCD$ semblent inversées.

Calculons le rayon R_1 de la base de $\mathbf{C}_1$.

Le périmètre du disque formant la base de $\mathbf{C}_1$ est donné par :

$$2\pi R_1 = AD$$

La feuille étant au format A3, et puisque $AB = 42$ cm (hauteur d'après l'énoncé) :

$$2\pi R_1 = 297 \text{ mm}$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{2\pi R_1}{2\pi} &= \frac{297 \text{ mm}}{2\pi} \\ R_1 &= \frac{297}{2\pi} \text{ mm} \\ R_1 &\approx 47{,}2690 \text{ mm}\end{aligned}$$

$$\boxed{R_1 \approx 47 \text{ mm.}}$$

(b) Puisque aucune unité pour le volume n'est exigée calculons en centimètre cube et arrondissons le résultat à l'unité.

Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ de $\mathbf{C}_1$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{297}{2\pi} \text{ mm} \\ &= \frac{297}{2\pi} \times \left(\frac{1}{10} \text{ cm}\right) \\ &= \frac{297}{20\pi} \text{ cm}\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer le volume du cylindre.

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_1 &= \pi \times R_1^2 \times AB \\
&= \pi \times \left(\frac{297}{20\pi}\ \text{cm}\right)^2 \times (420\ \text{mm}) \\
&= \pi \times \left(\frac{297}{20\pi}\ \text{cm}\right)^2 \times (42\ \text{cm}) \\
&= \pi \times \left(\frac{297}{20\pi}\right)^2 \times 42\ \text{cm}^2 \cdot \text{cm} \\
&\approx 2948{,}168\ \text{cm}^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_1 \approx 2\,948\ \text{cm}^3.}$$

2. (a) Calculons le rayon R_2 de la base de $\mathbf{C}_2$.

Le périmètre du disque formant la base de $\mathbf{C}_2$ est donné par :

$$2\pi R_2 = AB$$

D'après l'énoncé $AB = 42$ cm :

$$2\pi R_2 = 420\ \text{mm}$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi R_2}{2\pi} &= \frac{420\ \text{mm}}{2\pi} \\
R_2 &= \frac{420}{2\pi}\ \text{mm} \\
R_2 &\approx 66{,}8450\ \text{mm}
\end{aligned}$$

$$\boxed{R_2 \approx 67\ \text{mm}.}$$

(b) Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ de $\mathbf{C}_2$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{420}{2\pi} \text{ mm} \\ &= \frac{210}{\pi} \times \left(\frac{1}{10} \text{ cm} \right) \\ &= \frac{21}{\pi} \text{ cm} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer le volume du cylindre dont la hauteur est $AD = 29{,}7$ cm.

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_2 &= \pi \times R_2^2 \times AD \\ &= \pi \times \left(\frac{21}{\pi} \text{ cm} \right)^2 \times (29{,}7 \text{ cm}) \\ &= \pi \times \left(\frac{21}{\pi} \right)^2 \times 29{,}7 \text{ cm}^2 \cdot \text{cm} \\ &\approx 4169{,}127 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_2 \approx 4\,169 \text{ cm}^3.}$$

3. D'après les questions précédentes

$$\boxed{\text{le cylindre } \mathbf{C}_2 \text{ a un plus grand volume.}}$$

Partie C : la pesée.

1. Déterminons l'aire, $\mathscr{A}_4$, d'une feuille au format A4.

   D'après la question A.2 :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_4 &= (21 \text{ cm})(29{,}7 \text{ cm}) \\ &= 21 \times 29{,}7 \text{ cm} \cdot \text{cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_4 = 623{,}7 \text{ cm}^2.}$$

2. La masse d'une feuille est de

$$\begin{aligned}
m_4 &= \mathscr{A}_4 \times \left(80 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}\right) \\
&= \left(623{,}7 \text{ cm}^2\right) \times \left(80 \text{ g} \cdot (100 \text{ cm})^{-2}\right) \\
&= \left(623{,}7 \text{ cm}^2\right) \times \left(80 \text{ g} \cdot \left(\frac{1}{100^2} \text{ cm}^{-2}\right)\right) \\
&= 623{,}7 \times 80 \times \frac{1}{100^2} \text{ cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{cm}^{-2} \\
&= 4{,}9896 \text{ g}
\end{aligned}$$

Nous en déduisons la masse des 500 feuilles :

$$\begin{aligned}
m_5 &= 500 \times m_4 \\
&= 500 \times 4{,}9896 \text{ g} \\
&= 2494{,}8 \text{ g}
\end{aligned}$$

$$\boxed{m_5 \approx 2495 \text{ g.}}$$

3. Estimons le nombre n_4 de feuilles restantes dans le paquet.

$$\begin{aligned}
n_4 &= \frac{1920 \text{ g}}{m_4} \\
&\approx \frac{1920 \text{ g}}{5 \text{ g}} \\
&\approx \frac{1920}{5} \frac{\text{g}}{\text{g}} \\
&\approx 384
\end{aligned}$$

Il reste, approximativement, 384 feuilles dans le paquet.

Partie D : calculs de dimensions de format.

1. La largeur de la feuille plus petite s'obtient en divisant la longueur de la plus grande par 2 donc,

en C4, il faut saisir : = D3/2

La longueur de la feuille plus petite égale la largeur de la plus grande donc,

en D4, il faut saisir : = C3

2. Puisque le rapport est le quotient entre la longueur et la largeur de la feuille :

en E3 il faut saisir : = D3/C3

3. Imaginons choisie une feuille A dont la largeur est ℓ et la longueur L de sorte que $\frac{L}{\ell} = \sqrt{2}$.

Démontrons que la feuille A' obtenu en coupant A au milieu de sa longueur a aussi pour rapport $\sqrt{2}$.

Notons ℓ' et L' respectivement les largeur et longueur de A'.
Nous avons donc : $\ell' = \frac{L}{2}$ et $L' = \ell$.
Par conséquent

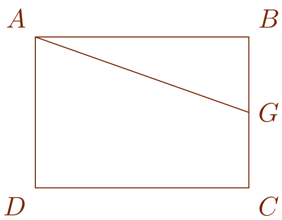
$$\begin{aligned}\frac{L'}{\ell'} &= \frac{\ell}{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{\frac{\ell}{1}}{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{\ell}{1} \times \frac{2}{L} \\ &= \frac{2\ell}{L} \\ &= 2\frac{\ell}{L}\end{aligned}$$

Or $\frac{L}{\ell} = \sqrt{2}$ donc $\frac{\ell}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et

$$\begin{aligned}\frac{L'}{\ell'} &= 2\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Si A a pour rapport $\sqrt{2}$ alors A' a aussi pour rapport $\sqrt{2}$.

Partie E : un angle droit.

1. 

Calculons AG.

ABG est rectangle en B, donc, d'après le théorème de Pythagore

$$AG^2 = AB^2 + BG^2.$$

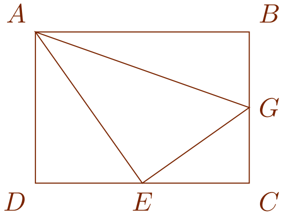
Donc :

$$\begin{aligned} AG^2 &= \sqrt{2}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 2 + \frac{1^2}{2^2} \\ &= 2 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{8}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Puisque AG est une longueur c'est un nombre positif donc

$$\begin{aligned} AG &= \sqrt{\frac{9}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} \end{aligned}$$

$AG = \frac{3}{2}$.

2. 

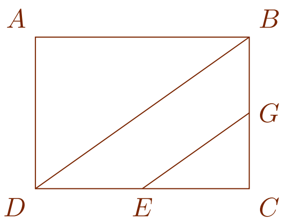
Démontrons que AEG et rectangle en E.

En procédant comme à la question précédente :
— puisque ADE est rectangle en D, $AE^2 = \frac{3}{2}$,
— puisque ECG est rectangle en C, $EG = \frac{3}{4}$.
Ainsi

$$\begin{aligned} AE^2 + EG^2 &= \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Or nous avions établi que $AG^2 = \frac{9}{4}$, donc $AE^2 + EG^2 = AG^2$.
Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore que

$$\boxed{AEG \text{ est rectangle en } E.}$$

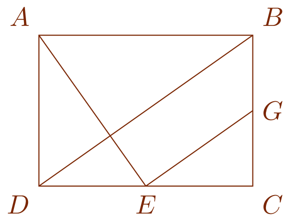
3. 

Démontrons que $(BD) \parallel (EG)$.

* Configuration de Thalès. Les points D, E, C d'une part et B, G, C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* Hypothèse de la réciproque du théorème de Thalès.
  E (resp. G) étant le milieu de $[DC]$ (resp. $[BC]$) nous avons $\frac{CE}{CD} = \frac{CG}{CB} = \frac{1}{2}$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$(BD) \parallel (EG).$$

4. 

D'après la question 2 : $(AE) \perp (EG)$,
et d'après la question précédente : $(BD) \parallel (EG)$,
donc $(AE) \perp (BD)$.

Comme de plus, par construction le point d'intersection de (AE) et (BD) est F nous pouvons conclure

(BD) et (AE) se coupent perpendiculairement en F.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. (a) La face 1 est celle du E et la 2 celle du O.

   (b) La face 1 est celle du T et la 2 celle du O.

2. Il est possible de remplacer le 1 et le 2 de deux façons :

première possibilité

1	$\bullet$
2	$\square$

seconde possibilité

1	$\oplus$
2	$\times$

Exercice 2.

Lien pour télécharger le programme Scratch.

1. Construisons le tableau d'état des variables de ce programme.

	réponse	R	Q	R < 7
demander	17			
mettre Q à 0	17		0	
mettre R à réponse	17	17	0	
répéter jusqu'à R < 7	17	17	0	0 (faux)
mettre Q à Q + 1	17	17	1	0 (faux)
mettre R à R - 7	17	10	1	0 (faux)
répéter jusqu'à R < 7	17	10	1	0 (faux)
mettre Q à Q + 1	17	10	2	0 (faux)
mettre R à R - 7	17	3	2	0 (faux)
répéter jusqu'à R < 7	17	3	2	1 (vrai)

Si l'utilisateur choisi 17, alors le programme renvoie $R = 3$ et $Q = 2$.

2. Q est un compteur de passage dans la boucle et à chaque passage dans la boucle R est diminué de 7. Autrement dit il s'agit de déterminer combien de fois il est possible de mettre 7 dans R.
Plus simplement

Q est le quotient de la valeur choisie par l'utilisateur dans la division euclidienne par 7, et R son reste.

3. Procédons à la division euclidienne de 2020 par 7.

$$\begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,0 & 7 \\ \cline{2-2} 6\,2 & 2\,8\,8 \\ 6\,0 & \\ 4 & \end{array}$$

Donc

$$2020 = 288 \times 7 + 4.$$

Si l'utilisateur choisi 2020, alors le programme renvoie $R = 4$ et $Q = 288$.

Exercice 3.

1. (a) Chacun des trois côtés de la figure 0 est séparé en quatre côtés donc un total de 3×4 côtés

   la figure 1 compte 12 côtés.

   De nouveau chacun des côtés de la figure 1 est partagé en 4 nouveaux côtés.

   La figure 2 compte 48 côtés.

   (b) Nous avons remarqué que le nombre de côtés est multiplié par 4 donc

   la figure 3 compte 192 côtés.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Notons N_k le nombre de côté de la figure k quelque soit k entier naturel.

   Exprimons N_n en fonction de n.

Nous avons remarqué que pour passer passer d'une étape à la suivante le nombre de côtés est multiplié par 4, par conséquent (N_n) est une suite géométrique de terme initial $N_0 = 3$ et de raison $q = 4$.
Nous en déduisons la formule explicite :

$$N_n = N_0 \times q^n.$$

En tenant compte des données numériques :

$$N_n = 3 \times 4^n.$$

Ainsi, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $N_n = 3 \times 4^n$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Chaque côté de la figure n est partagé en trois segment de même longueur donc : $L_{n+1} = \frac{1}{3} \times L_n$.
En particulier : $L_1 = \frac{1}{3} \times L_0 = \frac{1}{3} \times 1$.

$$L_1 = \frac{1}{3}.$$

De même : $L_2 = \frac{1}{3}L_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^2}$.

$$L_2 = \frac{1}{9}.$$

$\frac{1}{9}$ est bien la forme irréductible car les numérateurs et dénominateurs de $\frac{1}{3^2}$ correspondent à des décompositions en facteurs premiers et que plus aucune simplification n'est possible.

De même

$$L_3 = \frac{1}{27}.$$

(b) Nous avons remarqué à la question précédente la formule de récurrence

$$L_{n+1} = \frac{1}{3}L_n$$

quelque soit $n \in \mathbb{N}$, qui est la formule de récurrence définissant une suite géométrique.

Nous en déduisons que (L_n) est une suite géométrique de terme initial $L_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.
Par conséquent une formule explicite de (L_n) est

$$\boxed{L_n = \frac{1}{3^n} \text{ quelque soit } n \in \mathbb{N}.}$$

3. (a) Nous remarquons que, quelque soit l'entier naturel n, $P_n = N_n \times L_n$.
Donc

$$\boxed{P_1 = 4,\ P_2 = \frac{16}{3} \text{ et } P_3 = \frac{64}{9}.}$$

(b) Soit n$\in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P_n &= N_n \times L_n \\ &= 3 \times 4^n \times \frac{1}{3^n} \\ &= 4^n \times \frac{3}{3^n} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n = \frac{4^n}{3^{n-1}}.}$$

4. Démontrons l'existence du n cherché.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$: $P_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Par conséquent (P_n) est une suite arithmétique de terme initial $P_0 = 3$ et de raison $q = \frac{4}{3}$.
Puisque $q > 1$ nous en déduisons que (P_n) diverge vers $+\infty$.
En particulier

$$\boxed{\text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } P_n \geqslant 100\,000.}$$

Dans un démarche plus constructiviste nous pouvons essayer de déterminer un rang $n \in \mathbb{N}$ qui convienne.

1 km = 100 000 cm.

Cherchons n tel que $P_n \geqslant 100\,000$.

La méthode la plus propre pour trouver le rang n pour lequel la valeur souhaitée est atteinte nécessite la fonction logarithme qui est dorénavant au programme de terminale. Nous allons adopter une résolution algorithmique.

* Première méthode.
  En entrant la fonction $x \mapsto \frac{4^x}{3^{n-1}}$ dans la calculatrice nous obtenons ensuite un tableau de valeur. En faisant défiler les valeurs nous voyons que $P_{36} \approx 94\,388$ et $P_{37} \approx 125\,850$.
* Deuxième méthode.
  Nous pouvons aussi faire un algorithme. Par exemple en Python :

```
def seuil():
P=3
n=0
while P<100000:
n=n+1
P=4**n/3**(n-1)
return(n)
```

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

Situation 2.

Situation 3.

1.
2.

Situation 4.

1.
2. (a)
   (b)