Épreuve de mathématiques CRPE 2019 groupe 5.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Rappels des formules de volumes de solides usuels.
- Volume du parallélépipède rectangle : $V = longueur \times largeur \times hauteur$.
- Volume du prisme droit et du cylindre : $V = aire\ de\ la\ base \times hauteur$.
- Volume de la pyramide et du cône : $V = \dfrac{1}{3} \times aire\ de\ la\ base \times hauteur$.
- Volume de la boule : $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times rayon^3$.

Dans tout ce problème, on s'intéresse à une boisson réalisée à partir d'un sirop et d'eau. Pour réaliser cette boisson à partir de ce sirop, le fabriquant préconise de mélanger :

« 1 volume de sirop pour 7 volumes d'eau ».

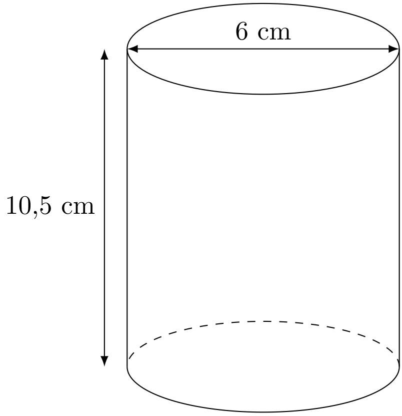
Partie A : boisson à base de sirop.

1. En suivant la préconisation ci-dessus pour réaliser la boisson :
   (a) Quel volume de boisson (sirop + eau) obtient-on avec 5 cL de sirop ?
   (b) Quel volume de sirop faut-il pour obtenir 24 cL de boisson ?
2. Avec cette préconisation, quel pourcentage du volume de la boisson le volume de sirop représente-t-il ?

Dans les parties B, C et D, les verres sont modélisés par des cylindres et des cônes.

Partie B : des verres cylindriques.

Vincent a des verres cylindriques dont les dimensions sont 6 cm pour le diamètre et 10,5 cm pour la hauteur.



1. Montrer que la contenance du verre est environ 29,7 cL.

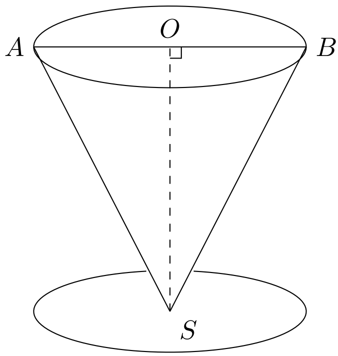
2. Vincent veut faire des marques sur ses verres afin d'aider ses enfants à réaliser une boisson composée de 3 cL de sirop.

   (a) À quelle hauteur, au millimètre près, doit-il positionner la marque correspondant au volume de sirop ?

   (b) S'il respecte la préconisation d'un volume de sirop pour sept volumes d'eau, à quelle hauteur, au millimètre près, doit-il positionner la marque correspondant au volume total de la boisson ?

Partie C : des verres coniques.

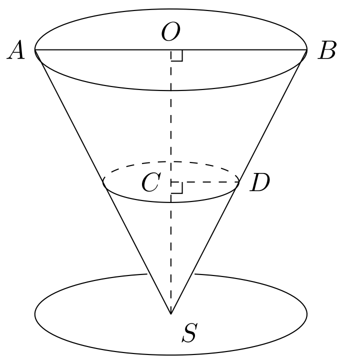
Pour l'anniversaire de ses enfants, Vincent n'a pas assez de verres cylindriques, il sort donc ses anciens verres coniques. Un exemplaire est représenté ci-dessous.
— $[AB]$ représente le diamètre de la base du cône, sa longueur est 12 cm ;
— O est le milieu de $[AB]$;
— La longueur du segment $[SB]$ est 10 cm.



1. Calculer la hauteur SO d'un verre.

2. Quel volume maximal de boisson, exprimé en centilitre et arrondi au dixième près, un verre peut-il contenir ?

3. Comme précédemment, Vincent veut marquer ses verres coniques de manière à réaliser des boissons à partir d'un volume donné de sirop. On a représenté sur le schéma ci-dessous le petit cône occupé par ce volume donné de sirop dans le fond du verre.

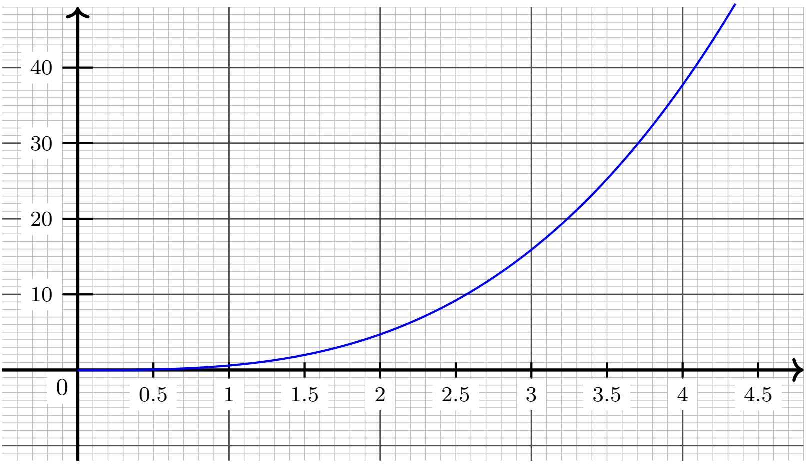


On note v le volume de ce petit cône, h la longueur SC et r la longueur CD.

(a) Exprimer r en fonction de h.

(b) Montrer que $v = \dfrac{3\pi}{16}h^3$.

(c) On donne ci-dessous, la représentation graphique de la fonction f qui à x associe $\frac{3\pi}{16}x^3$. Expliquer comment ce graphique permet d'obtenir une valeur approchée de la hauteur h en centimètres correspondant à un volume de 3 cL, et donner cette valeur.



(d) En déduire que la longueur DS qui permet de marquer le niveau du sirop sur le verre pour un volume de sirop de 3 cL, est environ 4,6 cm.

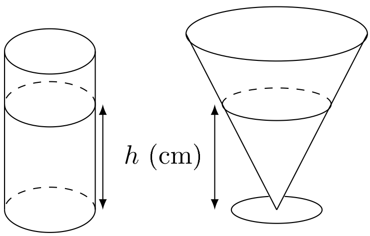
(e) Vincent affirme que pour respecter les préconisations d'un volume de sirop pour sept volumes d'eau dans un verre de ce type, il suffit que le niveau de la boisson soit deux fois plus haut que celui du sirop seul. Que penser de cette affirmation ?

(f) Où faut-il positionner sur le segment $[SB]$ la marque repérant le volume total de boisson ? Justifier la réponse.

Partie D : comparaison des deux verres.

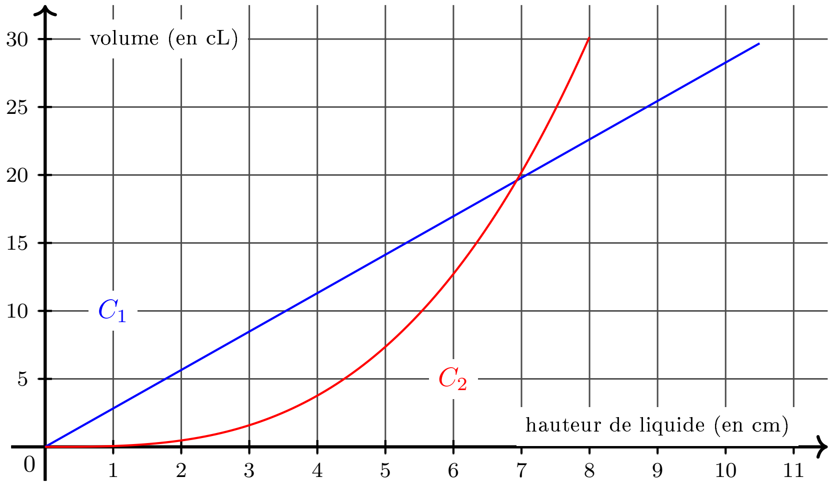
Dans cette partie, on s'intéresse au lien entre la hauteur de liquide versé et le volume contenu dans les verres précédemment étudiés.

On note h la hauteur de liquide versé.



Les dessins des verres ne sont pas à l'échelle.

On donne ci-dessous les représentations graphiques C_1 et C_2, des volumes de liquide, en centilitre, contenu dans chaque type de verre en fonction de la hauteur h de liquide, en centimètre.



1. Identifier à quel type de verre chaque courbe correspond. Justifier la réponse.

2. Les deux courbes se coupent en un point différent de l'origine du repère.
   Lire sur le graphique une valeur approchée des coordonnées de ce point puis interpréter ces coordonnées dans le contexte de l'exercice.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Pour chacune des affirmations suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse erronée n'enlève pas de point.

1. Un train circule à la vitesse de 175 km/h.

   Affirmation 1 : « Ce train est plus rapide qu'une balle de tennis qui traverse un terrain de tennis (23 m) en 0,46 seconde. »

2. Les 27 élèves d'une classe ont fait germer une graine chacun. Les hauteurs des pousses obtenues, arrondies au centimètre près, sont regroupées dans le tableau suivant.

Hauteur en cm	1	3	7	10	11	13	15	19	20
Effectif	1	3	6	2	3	3	5	2	2

Les élèves ont déterminé la moyenne et la médiane de cette série. Un nouvel élève arrive avec sa pousse. On intègre la hauteur de sa pousse, arrondie au centimètre, dans la série.

Affirmation 2 : « Quelle que soit la hauteur de sa pousse, arrondie au centimètre près, la médiane de la nouvelle série est la même que précédemment. »

Affirmation 3 : « L'information "L'ajout de la hauteur de la nouvelle pousse, arrondie au centimètre, dans la série fait augmenter la moyenne de 0,25 cm" permet de retrouver la hauteur, arrondie au centimètre près, de la pousse ajoutée. »

3. La division euclidienne d'un nombre entier A par 9 a pour reste 7. La division euclidienne d'un nombre entier B par 6 a pour reste 5. A est supérieur à B.

Affirmation 4 : « Le reste dans la division euclidienne de $(A - B)$ par 3 est donc 2. »

Exercice 2.

Une urne contient deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher.

- Rob tire une boule au hasard, note sa couleur, **la remet dans l'urne**, tire une seconde boule au hasard et note sa couleur.
- Sam tire une boule au hasard, note sa couleur, et **sans la remettre dans l'urne** en tire une seconde au hasard, puis note sa couleur.

1. En notant B_1 et B_2 les deux boules blanches, et N la boule noire, établir pour chacune des deux situations la liste de tous les couples de tirages possibles.

2. Dorine affirme que la probabilité est la même pour les deux garçons d'obtenir une boule blanche lors de leur second tirage.
A-t-elle raison ? Justifier la réponse.

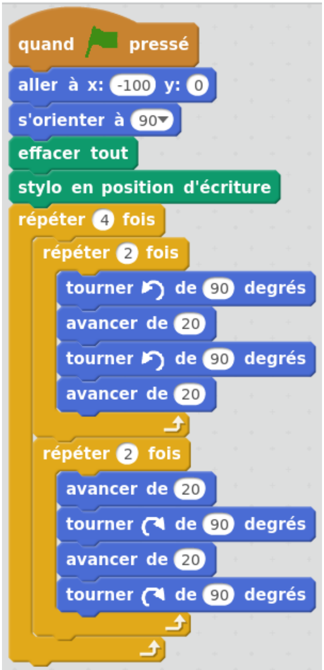
Exercice 3.

On considère les programmes et les tracés ci-dessous.
Les longueurs sont données en pixels.

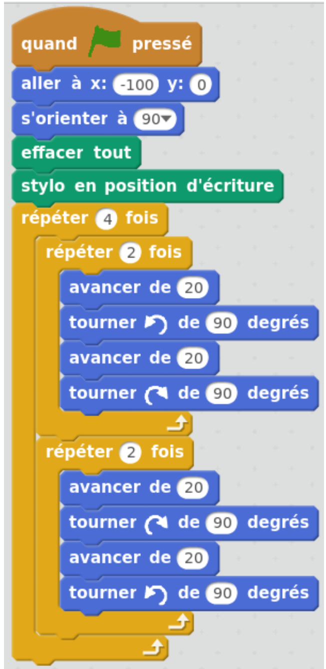
On rappelle que l'instruction : s'orienter à 90 signifie que le lutin s'oriente vers la droite.

Programme 1

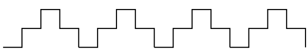
Programme 2



Programme 3



Tracé 1.

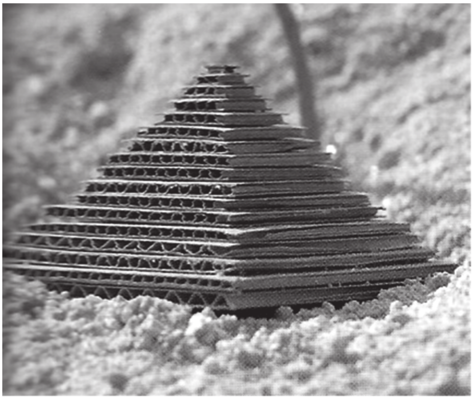


Tracé 2.

1. Sans justifier, associer à chacun de ces tracés le programme correspondant.
2. On considère maintenant celui des trois programmes qui ne correspond à aucun des deux tracés précédents.
   Sans justifier, représenter le tracé obtenu lorsqu'on lance ce programme.
   On prendra pour unité graphique le millimètre (1 millimètre par pixel).

Exercice 4.

Un objet pyramidal est construit par superposition de plaques de carton de 5 mm d'épaisseur, comme le montre l'exemple ci-dessous.



On modélise chaque plaque par un parallélépipède rectangle.

- Les dimensions de la première plaque sont : 12 cm, 12 cm et 5 mm.
- Les dimensions de la plaque suivante sont : 11,5 cm, 11,5 cm et 5 mm.
- Pour chacune des autres plaques, les grandes arêtes mesurent 5 mm de moins que celles de la plaque sur laquelle elle est posée.
- La dernière plaque est alors un cube de 5 mm d'arête.

1. Quelle est la hauteur totale de l'objet ? Justifier votre réponse.

2. Pour calculer le volume de cet objet, on a construit la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D
1			Volume de la plaque (en cm^3)	
2	1	12	72	72
3	2	11,5	66,125	138,125
4	3	11	60,5	198,625
5	4	10,5	55,125	253,75
6	5	10	50	303,75
7	6	9,5	45,125	348,875
8	7	9	40,5	389,375
9	8	8,5	36,125	425,5
10	9	8	32	457,5
11	10	7,5	28,125	485,625

(a) Proposer un intitulé pour chacune des colonnes `A`, `B` et `D` qui apparaîtrait respectivement dans les cellules `A1`, `B1` et `D1`.

(b) Proposer une formule qui a pu être saisie dans la cellule `C2` et étirée vers le bas jusqu'à la cellule `C25`.

(c) Sans justifier, donner la proposition ci-dessous qui a pu être saisie dans la cellule `D3` et étirée jusqu'en `D25`.

Proposition 1	= C2 + C3
Proposition 2	= C2 + C3
Proposition 3	= D2 + C3
Proposition 4	= 72 + C3

(d) À quoi correspond la valeur 612,5 située dans la cellule `D25` ?

3. Une plaque d'un mètre carré de ce carton pèse 850 g.
Déterminer la masse volumique de ce carton en kg/m^3. En déduire la masse, en gramme, de l'objet pyramidal.

III Troisième partie (14 points).

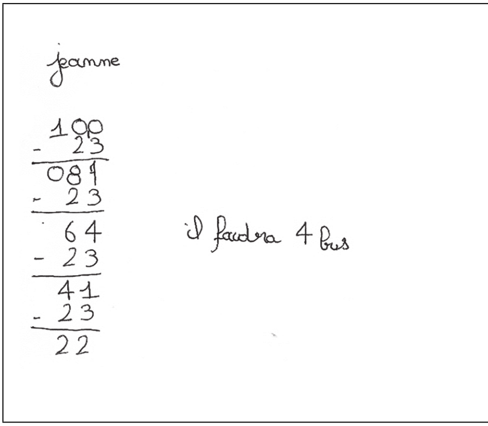
Cette partie est composée de quatre situations indépendantes.

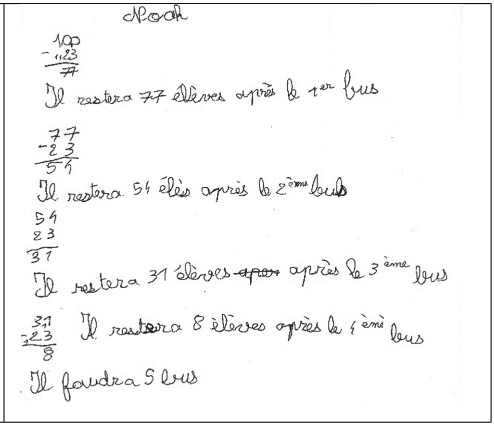
Situation 1.

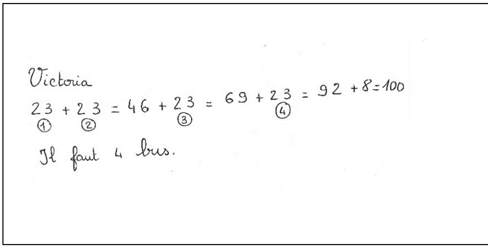
Voici un problème proposé à des élèves de CE1 :

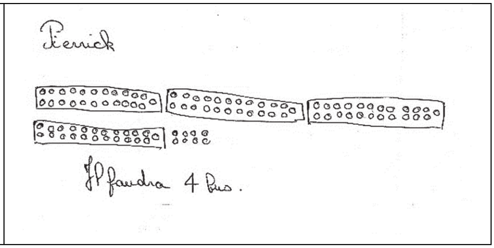
> À la fin de l'année, toute l'école prend le bus pour aller visiter le zoo de la Barben.
> Il y a 100 élèves dans cette école.
> Chaque bus peut emmener 23 élèves.
> Combien faut-il de bus pour emmener tous les enfants de l'école ?

Productions d'élèves :









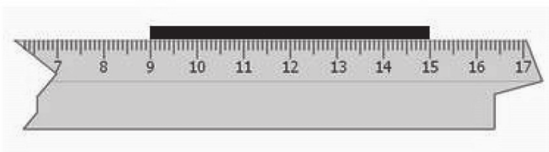
1. Pour chacune de ces productions, expliciter les procédures mises en œuvre ainsi que les réussites et les erreurs éventuelles.

2. Citer deux autres procédures que pourraient utiliser des élèves de cycle 3 auxquels on proposerait ce problème.

Situation 2.

L'exercice ci-dessous a été donné dans le cadre d'une évaluation pour des élèves de CE2.

Consigne : La bande noire a été mesurée à l'aide d'un double décimètre cassé.
Complète la phrase:



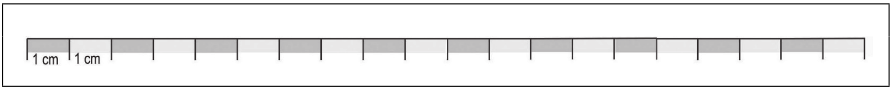
La bande noire mesure ………………..….

L'élève A a répondu que la bande mesure 15 cm.
L'élève B a répondu que la bande mesure 7 cm.

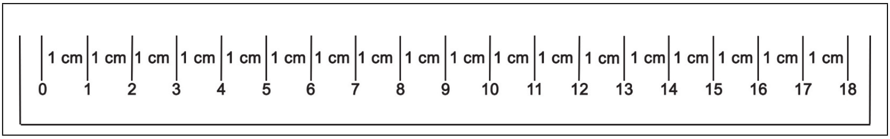
1. Formuler des hypothèses permettant d'expliquer les erreurs des élèves A et B.

2. (a) Au cycle 2, des élèves ont utilisé les instruments ci-dessous pour mesurer des bandes de papier. Expliciter leur intérêt dans les premiers apprentissages sur les mesures de longueurs.

   Instrument A.



   Instrument B.



   (b) Donner une difficulté que peuvent rencontrer les élèves en passant du maniement de l'instrument A au maniement de l'instrument B.

Situation 3.

Le problème suivant a été proposé par un professeur à ses élèves de CM2.

« Un professeur a acheté 15 cahiers pour 30,60 €. Son collègue qui dispose d'un budget de 40 € veut en acheter 20. Aura-t-il assez pour payer ? »

Les productions de trois élèves sont présentées ci-après.

1. Décrire et analyser les procédures de résolution mises en œuvre par Ambre, Anaé et Mahé en identifiant les réussites et les erreurs éventuelles.

2. Décrire une autre procédure, utilisable par un élève de CM2, qui permet de résoudre le problème.

Production d'Ambre

Il faut encore 5 pour avoir 20.
Il doit payer en tous 35,60.
Il a asser.

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 5 \\ \hline 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30,60 \\ +\ 5\ \ \ \cancel{5} \\ \hline 35,60 \end{array}$$

Production d'Anaé

$3 \times 5 = 15$

$$\begin{array}{r|l} 30,60 & 5 \\ -30,00 & \hline 6,12 \\ 00,60 & \\ -00,50 & \\ 00,10 & \\ -00,10 & \\ 00,00 & \end{array}$$

5 ça coûte 6,12€.

$5 \times 4 = 20$

$$\begin{array}{r} 6,12 \\ \times\ 4 \\ \hline 24,48 \end{array}$$

20 cahiers coûtes 24,48€.
Le prof a assez d'argent en poche.

Production de Mahé

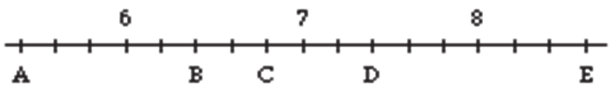
$30,60 \div 15 = 2,4$

$2,4 \times 20 = 40,80$

Le prie pour vingt c'est 40,80.
Il lui manque 80 centimes.

Situation 4.

Un enseignant de CM1 donne à ses élèves l'exercice suivant :



A :
B :
C :

D :
E :

1. Expliciter les savoirs mathématiques mobilisés dans cette situation.

2. Analyser les erreurs des deux élèves dont les copies sont reproduites ci-dessous :

A : ? B : 6+ deux quarts C : 6+ quatre quarts D : 7+ deusc quarts

E : 8+ trois quarts

Copie d'Agnès

A : 5,7 B : 6,2 C : 6,4 D : 7,2 E : 8,3

Copie de Nassim