Épreuve de mathématiques CRPE 2019 groupe 5.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Partie A : boisson à base de sirop.

1. (a) Je fais le choix d'adopter tout de suite des outils algébriques pour résoudre le problème.

Déterminons le volume V_b de boisson obtenu.

Notons V_s le volume de sirop et V_e le volume d'eau.
Nous avons : $V_b = V_s + V_e$.
Or il faut 1 volume d'eau pour 7 volumes d'eau donc : $V_e = 7V_s$.
Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} V_b &= V_s + 7V_s \\ &= 8V_s \end{aligned}$$

Comme d'après l'énoncé $V_s = 5$ cL :

$$V_b = 8 \times 5 \text{ cL}$$

$$\boxed{V_b = 40 \text{ cL.}}$$

(b) Calculons le volume V_s de sirop nécessaire.

Nous avons déjà remarqué à la question précédente que :

$$V_b = 8V_s$$

Ce qui équivaut dans cette question à :

$$\begin{aligned} 24 \text{ cL} &= 8V_s \\ \frac{24 \text{ cL}}{8} &= \frac{8V_s}{8} \\ \frac{24}{8} \text{ cL} &= V_s \end{aligned}$$

$$V_s = 3 \text{ cL}.$$

2. Calculons le pourcentage, p_1, représenté par le sirop.

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{V_s}{V_b} \times 100 \\
&= \frac{V_s}{V_s + V_e} \times 100 \\
&= \frac{V_s}{V_s + 7V_s} \times 100 \\
&= \frac{V_s}{8V_s} \times 100 \\
&= \frac{1}{8} \times 100 \\
&= 12{,}5
\end{aligned}$$

Le sirop représente 12,5 % du mélange en volume.

Partie B : des verres cylindriques.

1. Calculons la contenance, V_1 du verre.

   Le verre est cylindrique et sa base est un disque. L'aire du disque formant la base est $\pi \left(\frac{6 \text{ cm}}{2}\right)^2 = 9\pi \text{ cm}^2$. Donc :

$$\begin{aligned}
V_1 &= (10{,}5 \text{ cm}) \times \left(9\pi \text{ cm}^2\right) \\
&= 10{,}5 \times 9\pi \text{ cm} \cdot \text{cm}^2 \\
&= 94{,}5\pi \text{ cm}^3 \\
&= 94{,}5\pi \text{ mL} \\
&= 94{,}5\pi \ \frac{1}{10}\text{cL} \\
&= 94{,}5\pi \times \frac{1}{10} \text{ cL} \\
&\approx 29{,}6880 \text{ cL}
\end{aligned}$$

$$V_1 \approx 29{,}7 \text{ cL}.$$

2. (a) Déterminons la hauteur h de la marque pour le sirop.

Il faut que la marque corresponde à un cylindre de volume de 3 cL donc, en reprenant le calcul de l'aire de la base effectué précédemment :

$$3 \text{ cL} = \left(9\pi \text{ cm}^2\right) \times h$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{3 \text{ cL}}{9\pi \text{ cm}^2} &= \frac{\left(9\pi \text{ cm}^2\right) \times h}{9\pi \text{ cm}^2} \\
\frac{3}{9\pi} \frac{\text{cL}}{\text{cm}^2} &= h \\
\frac{3}{9\pi} \frac{10 \text{ mL}}{\text{cm}^2} &= h \\
\frac{3}{9\pi} \frac{10 \text{ cm}^3}{\text{cm}^2} &= h \\
\frac{3}{9\pi} \times 10 \text{ cm} &= h
\end{aligned}$$

Donc :

$$h \approx 1{,}0610 \text{ cm}$$

La marque doit être placée à 1,06 cm de haut.

(b) Calculons le volume V_{b1} total de boisson.

Comme nous l'avions noté à la question A1.(a) : $V_{b1} = 8V_{s1}$ où V_{s1} désigne le volume en sirop.
Donc

$$V_{b1} = 8 \times 3 \text{ cL}$$

$$V_{b1} = 24 \text{ cL}.$$

Partie C : des verres coniques.

1. Calculons SO.

   SOB est rectangle en O donc, d'après le théorème de Pythagore

   $$SB^2 = SO^2 + OB^2.$$

   Cette égalité équivaut successivement à

   $$\begin{aligned} 10^2 &= SO^2 + \left(\frac{AB}{23}\right)^2 \\ 100 &= SO^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 \\ 100 &= SO^2 + 36 \\ 100 - 36 &= SO^2 + 36 - 36 \\ 64 &= SO^2 \end{aligned}$$

   Puisque SO est une longueur c'est un nombre positif et nous en déduisons :

   $$SO = \sqrt{64}$$

   $$\boxed{SO = 8 \text{ cm.}}$$

2. Calculons le volume V_2 maximal d'un verre.

   Il s'agit d'un cône donc son volume est

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{1}{3} \times SO \times \left(\pi \times OB^2\right) \\
&= \frac{1}{3} \times SO \times \pi \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3} \times (8 \text{ cm}) \times \pi \times \left(\frac{12 \text{ cm}}{2}\right)^2 \\
&= 96\pi \text{ cm}^3 \\
&= 96\pi \text{ mL} \\
&= 96\pi \ \frac{1}{10} \text{ cL} \\
&= \frac{48}{5}\pi \text{ cL} \\
&\approx 30{,}159 \text{ cL}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{V_2 \approx 30{,}2 \text{ cL en arrondissant aux dixième près.}}$$

3. (a) Exprimons r en fonction de h.

   * Configuration de Thalès. Les points C, D, B d'une part et S, C, O d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèse. De $(CD) \perp (SO)$ et $(OB) \perp (SO)$ nous déduisons $(CD) \parallel (OB)$.

   Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{SC}{SO} = \frac{CD}{OB}.$$

   Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{SC}{SO} \times OB &= \frac{CD}{OB} \times OB \\
\frac{h}{SO} \cdot \frac{AB}{2} &= CD
\end{aligned}$$

Par conséquent, avec des longueurs exprimées en centimètres :

$$\begin{aligned} CD &= \frac{h}{8 \text{ cm}} \cdot \frac{12 \text{ cm}}{2} \\ &= \frac{3}{4}h \end{aligned}$$

$$\boxed{r = \tfrac{3}{4}h.}$$

(b) Exprimons v en fonction de h.

est un cône donc son volume est

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{3} \times SC \times \left(\pi CD^2\right) \\ &= \frac{1}{3} \times h \times \left(\pi r^2\right) \\ &= \frac{1}{3} \times h \times \pi \left(\frac{3}{4}h\right)^2 \end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{v = \tfrac{3}{16}\pi h^3.}$$

(c) Remarquons tout d'abord que 3 cL = 30 mL = 30 cm^3.
La représentation graphique indique le volume en fonction de la hauteur du liquide donc pour retrouver la hauteur il faut rechercher un antécédent de 30 par f.

Pour que le volume soit de 3 cL il faut que $h = 3{,}7$ cm.

(d) Calculons DS.

Le triangle SCD est rectangle en C donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$DS^2 = DC^2 + CS^2.$$

Autrement dit en reprenant les notations de l'énoncé :

$$DS^2 = r^2 + h^2$$

Nous en déduisons, d'après la question C.3.(a) à :

$$\begin{aligned} DS^2 &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 + h^2 \\ &= \frac{9}{16}h^2 + h^2 \\ &= \frac{25}{16}h^2 \end{aligned}$$

DS est une longueur donc un nombre positif, d'où :

$$\begin{aligned} DS &= \sqrt{\frac{25}{16}h^2} \\ &= \sqrt{\frac{25}{16}} \times \sqrt{h^2} \\ &= \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} \times |h| \\ &= \frac{5}{4}h \quad \text{car } h \geqslant 0 \end{aligned}$$

Puisque par lecture graphique nous avons obtenu $h = 3{,}7$ cm :

$$\begin{aligned} DS &= \frac{5}{4} \times 3{,}7 \text{ cm} \\ &= 4{,}625 \text{ cm} \end{aligned}$$

> Pour que le volume soit de 3 cL il faut que $DS \approx 4{,}6$ cm.

(e) Déterminons la proportion, p_2, de sirop du mélange en utilisant le procédé de Vincent.

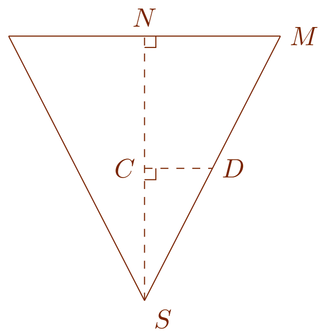
Notons h_s la hauteur remplie de sirop.
Puisque la boisson est complétée jusqu'à un hauteur de $2h_s$ avec de l'eau :

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{\frac{3}{16}\pi h_s^3}{\frac{3}{16}\pi\left(2h_s\right)^3} \\ &= \frac{\frac{3}{16}\pi h_s^3}{\frac{3}{16}\pi 2^3 h_s^3} \\ &= \frac{\frac{3}{16}\pi h_s^3}{\frac{3}{16}\pi h_s^3 \times 8} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Nous retrouvons le rapport 1 pour 8 entre le volume de sirop et le volume total de boisson.

L'affirmation de Vincent est vraie.

(f) D'après la question précédente il faut que le niveau, la hauteur, de boisson soit deux fois plus haut que celui de sirop. Il faut donc que la boisson atteigne une hauteur de $2h$.
Schématisons la partie du verre remplie de boisson de la façon suivante :



Nous avons donc : $SN = 2SC = 2h$.

Déterminons SM.

EN utilisant le théorème de Thalès comme à la question 3.(a) nous obtenons :

$$\frac{SC}{SN} = \frac{SD}{SM}.$$

Donc : $\frac{SD}{SM} = \frac{1}{2}$.
D'où (avec un produit en croix par exemple) : $SM = 2SD \approx 2 \times 4{,}6$ cm.

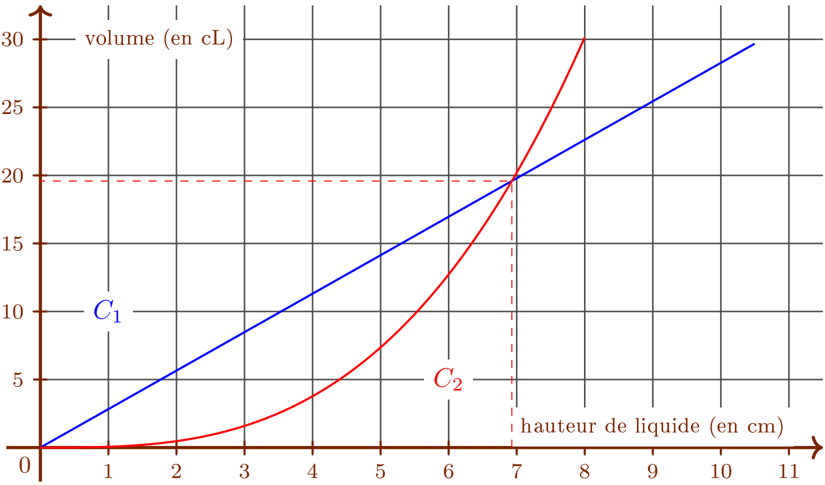
La marque doit être faite à 9,2 cm de S sur $[SB]$.

Partie D : comparaison des deux verres.

1. Identifions les courbes.

   L'une des courbes est une droite il s'agit donc de la courbe représentative d'une fonction affine. Nous devons donc regarder les expressions algébriques des volumes des verres en fonction de h.
   Nous avons vu, à la question I.C.3.(b), que le volume du verre conique en fonction de la hauteur est $v = \frac{3}{16}\pi h^3$. Il ne s'agit pas d'une fonction affine.

Le volume du verre conique est représenté par la courbe C_2 et celui du verre cylindrique par la courbe C_1.



2.

Le point d'intersection a pour coordonnées (6,9; 19).

Les volumes des deux verres sont égaux lorsque $h = 6{,}9$ cm et le volume est alors de 19 cL.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Exprimons la vitesse, v, de la balle en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

$$\begin{aligned} v &= \frac{23 \text{ m}}{0{,}46 \text{ s}} \\ &= \frac{23}{0{,}46} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= \frac{23}{0{,}46} \ \frac{\frac{1}{1000} \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} \\ &= \frac{23}{0{,}46} \cdot \frac{3600}{1000} \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \end{aligned}$$

L'affirmation est fausse.

2. * Déterminons les médianes Me_1 et Me_2 de la série avant et après rajout de la pousse.

Initialement :

Hauteur en cm	1	3	7	10	11	13	15	19	20
Effectif	1	3	6	2	3	3	5	2	2
E.C.C.	1	4	10	12	15	18	23	25	27

. La série est ordonnée de façon croissante.

. $\frac{N}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5$. La série est impaire donc la médiane est la quatorzième valeur de la série ordonnée.

. Donc $Me_1 = 11$ cm.

Après rajout d'une pousse la série sera paire et Me_2 sera la moyenne de la quatorzième et de la quinzième valeurs. D'après le précédent tableau, que la pousse mesure moins ou plus que 11 cm, les quatorzième et quinzième valeurs seront 11 cm. La médiane sera inchangée.

L'affirmation 2 est vraie.

* Déterminons la hauteur h en centimètres de la pousse à ajouter pour que la moyenne $\overline{x}$, augmente de 0,25 cm.

Nous savons que :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_rx_r}{n_1+n_2+\cdots+n_r}\\ &= \frac{1\times 1+3\times 3+\cdots+2\times 20}{2+3+\cdots+2}\\ &= 11\end{aligned}$$

Nous voulons avoir :

$$\overline{x}+0{,}25 = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_rx_r+h}{n_1+n_2+\cdots+n_r+1}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}11+0{,}25 &= \frac{297+h}{28}\\ 28\times 11{,}25 &= 28\times\frac{297+h}{28}\\ 315 &= 297+h\\ 315-297 &= 297+h-297\\ 18 &= h\end{aligned}$$

Nous avons bien retrouvé la hauteur de la plante ajoutée.

L'affirmation 3 est vraie.

3. La division euclidienne de A par 9 a pour reste 7 si et seulement si il existe un entier q_1 tel que : $A = 9\times q_1+7$.
   De même la division euclidienne de B par 6 a pour reste 5 si et seulement si il existe un entier q_2 tel que : $B = 6\times q_2+5$.
   Par conséquent

$$\begin{aligned}A-B &= 9q_1+7-(6\times q_2+5)\\ &= 9q_1-6q_2+7-5\\ &= 3\times 3q_1-3\times 2q_2+2\\ &= 3\,(3q_1-2q_2)+2\end{aligned}$$

En notant $q_3 = 3q_1-2q_2$. Puisque q_3 est un entier, que nous avons

$$\begin{cases} A-B = 3q_3+2 \\ 0\leqslant 2<3 \end{cases},$$

nous pouvons affirmer que le reste de la division euclidienne de $A - B$ par 3 est 2.

L'affirmation 4 est vraie.

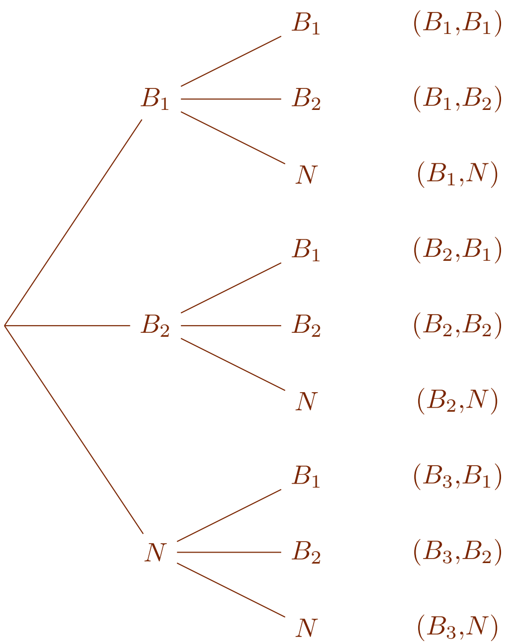
L'hypothèse « A supérieur à B » si elle est rassurante (nous restons avec des entiers naturels et non des entiers relatifs) n'est cependant pas indispensable.

Exercice 2.

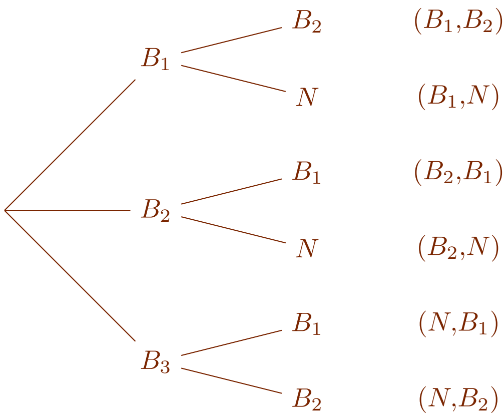
1. En numérotant les boules blanches, et donc en les distinguant l'énoncé incite à modéliser la situation par l'équiprobabilité. Et ce d'autant plus qu'il s'agit de faire du dénombrement dans la première question plutôt que des probabilités.

   Représentons chaque situation par un arbre.

   * Le tirage avec remise de Rob.



   * Le tirage sans remise de Sam.



2. Notons A l'événement « Obtenir une boule blanche au second tirage ».

   Déterminons $\mathbb{P}(A)$ dans chacun des deux cas.

   * Le tirage avec remise de Rob.
     $A = \{(B_1,B_1);\ (B_1,B_2);\ (B_2,B_1);\ (B_2,B_1);\ (N,B_1);\ (N,B_1)\}$.
     Les boules étant indiscernables au toucher nous pouvons modéliser la situation par l'équiprobabilité : tous les couples ont la même probabilité d'être obtenus.
     Or A est réalisé par 6 issues et l'univers comporte 9 issue donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{6}{9}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

   * Le tirage sans remise de Sam.
     $A = \{(B_1,B_2);\ (B_2,B_1);\ (N,B_1);\ (N,B_2)\}$.
     Les boules étant indiscernables au toucher nous pouvons modéliser la situation par l'équiprobabilité : tous les couples ont la même probabilité d'être obtenus.
     Or A est réalisé par 4 issues et l'univers comporte 6 issue donc

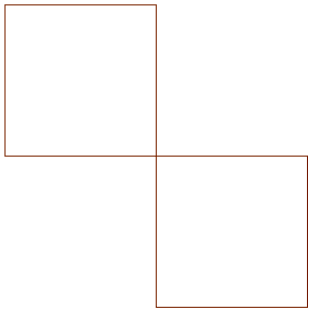
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{4}{6}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

La probabilité est la même pour les deux garçons d'obtenir une boule blanche au second tirage.

Exercice 3.

1. Le tracé 1 correspond au programme 3.
Le tracé 2 correspond au programme 1.

2. Tracé 3 correspondant au programme 2 à l'échelle demandée.



Exercice 4.

1. Déterminons la hauteur totale de l'objet.

Notons, pour n un entier naturel non nul, u_n la longueur, en centimètre, de l'arête de la n-ième plaque empilée.
À chaque étape la longueur de l'arête est diminuée de 0,5 cm donc : $u_{n+1} = u_n - 0{,}5$. Nous reconnaissons une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 12$ et de raison $r = -0{,}5$ donc : $u_n = 12 - 0{,}5(n-1)$. Autrement dit $u_n = 12{,}5 - 0{,}5n$.
Nous pouvons également raisonner de proche en proche : $u_1 = 12$, $u_2 = 12 - 0{,}5$, $u_3 = 12 - 0{,}5 - 0{,}5 = 12 - 0{,}5 \times 2$, ...
Il faut arrêter de rajouter des plaques lorsque l'arête mesure 0,5 cm donc lorsque :

$$u_n = 0{,}5$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
12{,}5 - 0{,}5n &= 0{,}5 \\
12{,}5 - 0{,}5n - 12 &= 0{,}5 - 12{,}5 \\
-0{,}5n &= -12 \\
\frac{-0{,}5n}{-0{,}5} &= \frac{-12}{-0{,}5} \\
n &= 24
\end{aligned}$$

Ainsi la pyramide sera composée de 24 plaques empilées. Sa hauteur sera donc de :

$$\begin{aligned}
h &= 24 \times 0{,}5 \\
&= 12
\end{aligned}$$

L'objet mesure 12 cm de haut.

2. (a) `A` : numéro de la plaque.
`B` : longueur de la plus grande arête de la plaque.
`D` : volume de l'objet obtenu après avoir empilé autant de plaque que l'indique le numéro de la colonne `A`.

(b) À chaque étape il s'agit de calculer le volume d'un parallélépipède rectangle donc la formule que nous pouvons entrer en `C2` :

= `B2` ∗ `B2` ∗ 0,5

(c) La proposition 3 convient.

(d) En `D2` est indiqué le volume de la première plaque. En `D3` est indiqué le volume du solide formé des deux premières plaques. De proche en proche nous obtenons ainsi qu'en `D25` est indiqué le volume du solide formé de 24 plaques empilées. Autrement dit :

$$\text{le volume du solide est de } 612{,}5 \text{ cm}^3.$$

3. Déterminons la masse volumique, ν, du carton.

Puisque le carton présente un épaisseur de 0,5 cm sa masse volumique est

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{850 \text{ g}}{(1 \text{ m})\,(1 \text{ m})\,(0{,}5 \text{ cm})} \\
&= \frac{850 \ \frac{1}{1000} \text{ kg}}{(1 \text{ m})\,(1 \text{ m})\left(0{,}5 \ \frac{1}{100} \text{ m}\right)} \\
&= \frac{0{,}850 \text{ kg}}{0{,}005 \text{ m}^3} \\
&= \frac{0{,}850}{0{,}005} \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}
\end{aligned}$$

$$\nu = 170 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Déterminons la masse, m, de l'objet.

Puisque l'objet a un volume de 612,5 cm^3 sa masse est :

$$\begin{aligned}
m &= \left(612{,}5 \text{ cm}^3\right) \nu \\
&= \left(612{,}5 \times \frac{1}{(100)^3} \text{ m}^3\right) \left(170 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}\right) \\
&= 612{,}5 \times \frac{1}{(100)^3} \times 170 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \\
&= 0{,}104125 \text{ kg} \\
&= 0{,}104125 \times 1000 \text{ g}
\end{aligned}$$

Donc

$$m = 104{,}125 \text{ g}.$$

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.

Situation 2.

1.
2. (a)
   (b)

Situation 3.

1.
2.

Situation 4.

1.
2.