Épreuve de mathématiques CRPE 2019 groupe 4.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Patrick CRPEiste pour la correction apportée.

I Première partie (13 points).

Partie A.

1. *Étude des volumes des différents flacons.*

   (a) Calculons le volume, $\mathscr{V}_1$, du parallélépipède.

   En utilisant la formule rappelée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= (5 \text{ cm}) \times (3 \text{ cm}) \times (6 \text{ cm})\\ &= 5 \times 3 \times 6 \text{ cm} \times \text{cm} \times \text{cm}\\ &= 90 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_1 = 90 \text{ cm}^3.}$$

   (b) Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ du cylindre.

   En utilisant la formule rappelée dans l'énoncé et celle de l'aire d'un disque (qui forme la base du cylindre) :

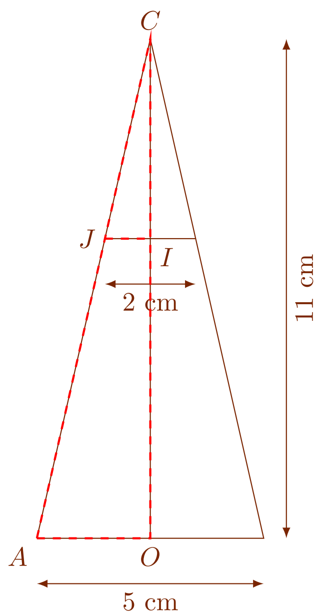
$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \left[\pi \cdot \left(\frac{5 \text{ cm}}{2}\right)^2\right] \times (6 \text{ cm})\\ &= \left[\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \text{ cm}^2\right] \times (6 \text{ cm})\\ &= \pi \frac{5^2}{2^2} \cdot 6 \text{ cm}^2 \times \text{cm}\\ &= \frac{75}{2}\pi \text{ cm}^3\\ &\approx 117{,}8097 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$\mathscr{V}_2 = \frac{75}{2}\pi \text{ cm}^3 \approx 118 \text{ cm}^3$ en arrondissant au centimètre cube.

(c) Calculons le volume $\mathscr{V}_3$ de la pyramide.

Il ne faut pas oublier d'ôter le volume du bouchon qui est aussi une pyramide à base carrée.

* Déterminons le volume $\mathscr{V}_4$ du bouchon.
  Considérons une vue en coupe du flacon.



Nous reconnaissons une configuration de Thalès qui nous permettra de trouver la hauteur du bouchon.

Les points O, I, C d'une part et A, J, C d'autre part sont alignés dans cet ordre.

Par construction, $(IJ) \parallel (AO)$, donc, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{CI}{CO} = \frac{IJ}{AO}.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} CI &= \frac{IJ}{AO} \cdot CO \\ &= \frac{1 \text{ cm}}{2{,}5 \text{ cm}} \cdot (11 \text{ cm}) \\ &= 4{,}4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant utiliser la formule de l'énoncé pour une pyramide à base carrée.

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_4 &= \frac{(2 \text{ cm})^2 \times (4{,}4 \text{ cm})}{3} \\ &= \frac{2^2 \times 4{,}4}{3} \text{ cm}^2 \times \text{cm} \\ &= \frac{17{,}4}{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

* Calculons le volume $\mathscr{V}_5$ du flacon tout entier (bouchon inclus).

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_5 &= \frac{(5 \text{ cm})^2 \times (11 \text{ cm})}{3} \\ &= \frac{5^2 \times 11}{3} \text{ cm}^2 \times \text{cm} \\ &= \frac{275}{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Nous déduisons des points précédents le volume utile du flacon pyramidal

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_3 &= \mathscr{V}_5 - \mathscr{V}_4 \\ &= (\frac{275}{3} \text{ cm}^3) - (\frac{17{,}4}{3} \text{ cm}^3) \\ &= 85{,}8666\ldots \end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{\mathscr{V}_3 \approx 85{,}8 \text{ cm}^3.}$$

2. *Enquête auprès de clients.*

   (a) Calculons la proportion p_1 de personnes préférant le flacon cylindrique.

   109 personnes sur un total de $82 + 109 + 47 = 238$ personnes préfèrent le flacon cylindrique donc :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{109}{238} \\ &\approx 0{,}45798 \end{aligned}$$

   En exprimant le résultat en pourcentage arrondi à l'unité

   46 % des personnes préfèrent le flacon cylindrique.

   (b) Calculons la mesure de l'angle du camembert représentant les personnes ayant préféré la forme cylindrique.

   Il s'agit d'une situation de proportionnalité.

Pourcentage de personnes	100	1	46
Angles	360	$\frac{360}{100} = 3{,}6$	$46 * 3{,}6 = 165{,}6$

   L'angle du secteur mesurera 166°.

Partie B.

1. *Conditionnement du parfum.*

   Nombre de flacons remplis avec une cuve.

$$\begin{aligned} 50\text{ L} &= 50\text{ dm}^3 \\ &= 50(10\text{ cm})^3 \\ &= 50 \times 10^3\text{ cm}^3 \\ &= 50\,000\text{ cm}^3 \end{aligned}$$

   En procédant à une division euclidienne

$$50\,000 = 423 \times 118 + 86$$

Par conséquent :

il est possible de remplir 423 flacons avec une cuve.

2. *Étude du coût des flacons.*

   (a) Déterminons le prix de 2 500 flacons.

   * Entreprise 1.
     Chaque flacon étant facturé 2,40 € : $2\,500 \times 2{,}40 = 6\,000$ euro.
   * Entreprise 2.
     Chaque flacon est facturé 1,80 € et les frais de transport s'élèvent à 2 000 € donc : $2\,500 \times 1{,}80 + 2\,000 = 6\,500$ €.

   Le prix de 2 500 flacons est de 6 000 € pour l'entreprise 1 et 6 500 € pour l'entreprise 2.

   (b) En reprenant le raisonnement de la question précédente en remplaçant 2 500 par x, nous obtenons :

   $f(x) = 2{,}4x$ quelque soit x entier entre 1 et 10 000.

   (c) En reprenant le raisonnement de la question 2.(a), nous obtenons :

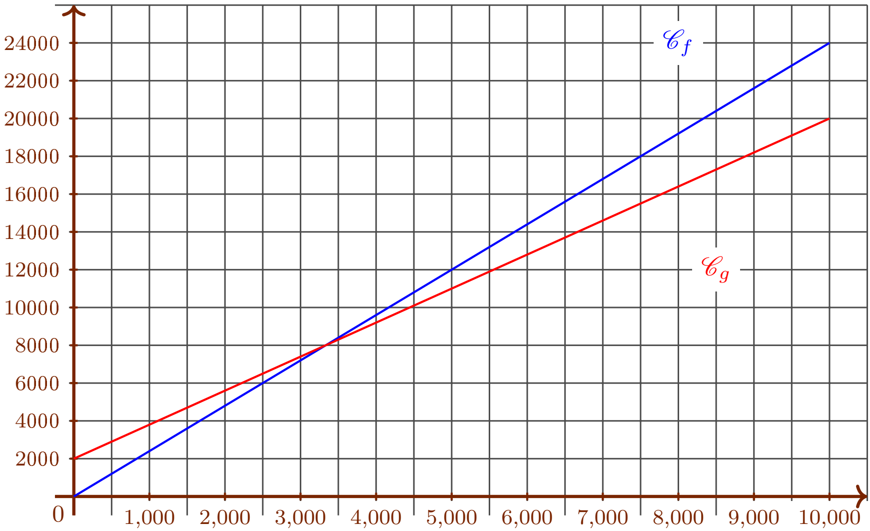
   $g(x) = 1{,}8x + 2000$ quelque soit x entier entre 1 et 10 000.

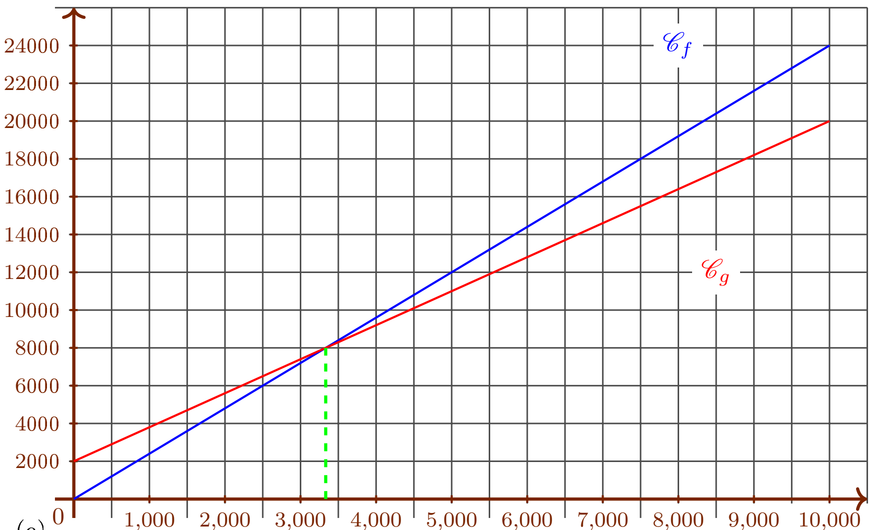
   (d) Les fonctions f et g sont affines donc leurs coures représentatives sont des droites. Pour les tracer il suffi d'en connaître deux points.

$$f(0) = 0$$
$$f(10000) = 24000$$
$$g(0) = 2000$$
$$g(10000) = 20000$$

Ainsi la courbe représentative, $\mathscr{C}_f$ (respectivement $\mathscr{C}_g$) de f (resp. g), est une droite passant par les points de coordonnées $(0; 0)$ et $(10000; 24000)$ (resp. $(0; 2000)$ et $(10000; 20000)$).

Le graphique est fait à l'échelle 1/2 par rapport à la demande de l'énoncé afin de tenir sur la feuille.





(e)

L'entreprise 2 devient plus avantageuse à partir de 3 300 flacons produits.

(f) Dire que l'entreprise 2 devient plus avantageuse signifie que l'on a $f(x) \geqslant g(x)$.

Résolvons l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ pour $x \in [0; 10000]$.

Il s'agit d'une inéquation linéaire du premier degré nous allons la résoudre en isolant l'inconnue x.

Soit $x \in [0; 10000]$.

$$\begin{aligned}
f(x) \geqslant g(x) &\Leftrightarrow 2{,}4x \geqslant 1{,}8x + 2000 \\
&\Leftrightarrow 2{,}4x - 1{,}8x \geqslant 1{,}8x + 2000 - 1{,}8x \\
&\Leftrightarrow (2{,}4 - 1{,}8)x \geqslant 2000 \\
&\Leftrightarrow 0{,}6x \geqslant 2000 \\
&\Leftrightarrow \frac{0{,}6x}{0{,}6} \geqslant \frac{2000}{0{,}6} \\
&\Leftrightarrow x \geqslant \frac{10000}{3} \\
&\Leftrightarrow x \geqslant 3333{,}333\ldots
\end{aligned}$$

L'entreprise 2 devient plus avantageuse à partir de 3 334 flacons commandés.

(g) Calculons le coût pour 7 500 flacons.

D'après la question précédente, dans ce cas c'est l'entreprise 2 la plus avantageuse et le montant de la commande est alors de

$$\begin{aligned}
g(7500) &= 1{,}8 \times 7500 + 2000 \\
&= 15500
\end{aligned}$$

Un commande de 7 500 flacons coûte 15 500 €.

Partie C.

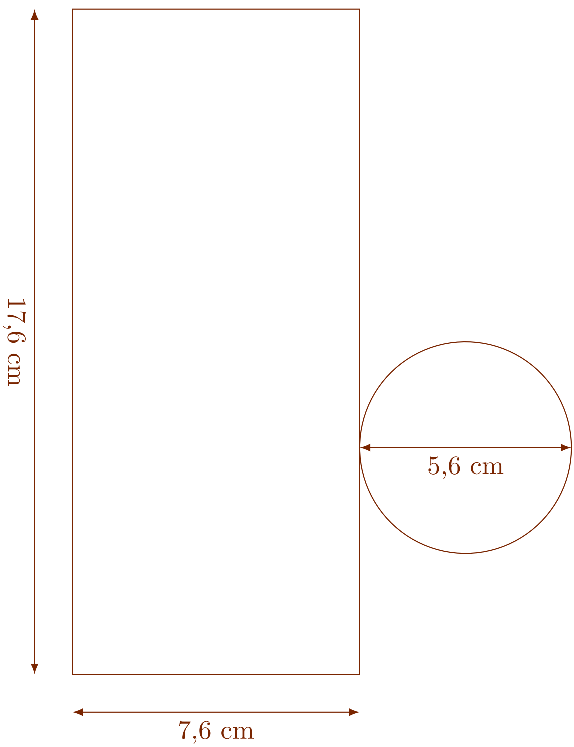
1. *Patron de la boîte sans couvercle.*
   Calculons la longueur, l, du périmètre du disque formant le le fond de la boîte.

$$\begin{aligned} l &= 2\pi \frac{5{,}6 \text{ cm}}{2} \\ &= 5{,}6\pi \text{ cm} \\ &\approx 17{,}59291 \end{aligned}$$

En choisissant d'arrondir au dixième comme les données de l'énoncé nous obtenons que

$$\boxed{\text{le périmètre du fond de la boîte mesure } l = 17{,}6 \text{ cm.}}$$

Nous pouvons maintenant tracer le patron de la boîte. Le tracer est ici effectué à l'échelle 1/2.



2. *Masse de la boîte sans couvercle.*

   (a) Calculons l'aire $\mathscr{A}_1$ du patron.

   Le patron étant composé d'un rectangle de dimensions 7,6 cm et 5,6π cm et d'un disque de rayon $\frac{5,6}{2}$ cm nous en déduisons l'aire du patron :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_1 &= (7{,}6 \text{ cm}) \times (5{,}6\pi \text{ cm}) + \pi \left(\frac{5{,}6}{2} \text{ cm}\right)^2 \\
&= 7{,}6 \times 5{,}6\pi + \left(\frac{5{,}6}{2}\right)^2 \pi \text{ cm}^2 \\
&= 50{,}4\pi \text{ cm}^2 \\
&\approx 158{,}3362 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = 50{,}4\pi \text{ cm}^2 \approx 158 \text{ cm}^2.}$$

   (b) calculons la masse de la boîte.

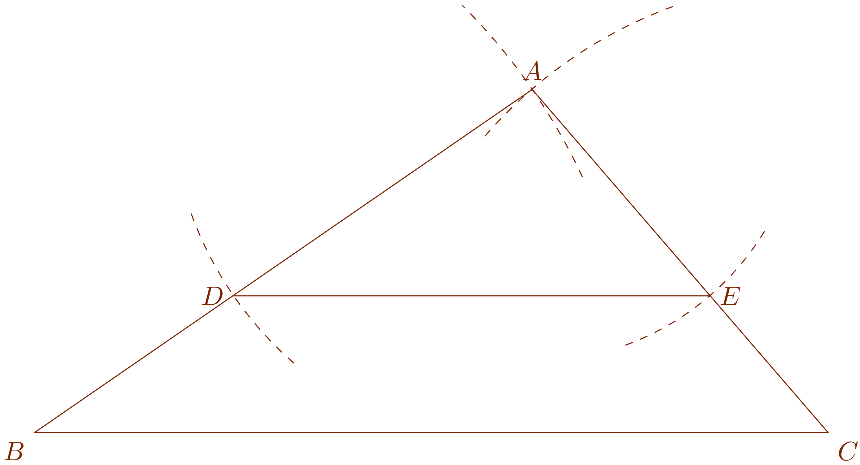
   Nous connaissons la surface et la masse surfacique nous en déduisons la masse :

$$\begin{aligned}
m &= (50{,}4\pi \text{ cm}^2)(810 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}) \\
&= \left(50{,}4\pi \left(\frac{1}{100} \text{ m}\right)^2\right)(810 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}) \\
&= \left(50{,}4\pi \times \frac{1}{100^2} \text{ m}^2\right)(810 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}) \\
&= 50{,}4\pi \times \frac{1}{100^2} \times 810 \text{ m}^2 \times \text{g} \cdot \text{m}^{-2} \\
&= 4{,}0824\pi \text{ g} \\
&\approx 12{,}825 \text{ g}
\end{aligned}$$

$$\boxed{m \approx 13 \text{ g.}}$$

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. 

2. Après une rapide recherche au brouillon nous remarquons, avec le théorème de Thalès, qu'effectivement les cordes sont parallèles. Et nous pouvons donc énoncé notre objectif.

   Démontrons avec la réciproque du théorème de Thalès : $(BD) \parallel (DE)$.

   * Configuration de Thalès.
     Les points B, D, A d'une part et C, E, A d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèse de la réciproque du théorème de Thalès.
     D'une part $\frac{AD}{AB} = \frac{4{,}8}{8} = 0{,}6$ et d'autre part $\frac{AE}{AC} = \frac{3{,}6}{6} = 0{,}6$, donc $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

   Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

   $$\boxed{(DE) \parallel (BC).}$$

3.

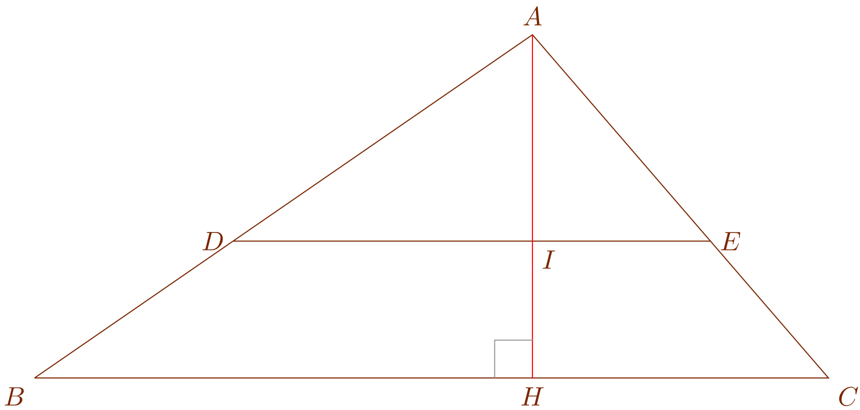
4. Nous aurions *a priori* l'idée d'utiliser la formule usuelle faisant intervenir la hauteur du triangle. Mais ici nous ne connaissons pas les longueurs des hauteurs. Le triangle ABC semble rectangle en A, ce qui signifierai que deux de ses hauteurs se confondent avec les côtés de l'angle droit. Malheureusement

une rapide utilisation de la contraposée du théorème de Pythagore montre que ce triangle n'est pas rectangle en A.

Nous sommes donc renvoyés aux premières questions et devons considérer l'agrandissement des longueurs mis en évidence par le théorème de Thalès.

Démontrons que les deux surfaces délimitées n'ont pas même aire.

Il est clair que les distances étant multipliées par 0,6 les surfaces seront multipliées par $0{,}6^2 = 0{,}36$ et non pas $\frac{1}{2}$. Les surfaces ne seront pas égales. Détaillons ce résultat.



Notons H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC et I le point d'intersection de (DE) et (AH). Puisque $(DE) \parallel (BC)$, I est aussi le pied de la hauteur de ADE issue de A.

* Configuration de Thalès.

  Les points B, D, A d'une part et H, I, A d'autre part sont alignés dans cet ordre.

* Hypothèse du théorème de Thalès.

  D'après la question précédente $(DI) \parallel (BH)$.

Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès, que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AI}{AH}.$$

Autrement dit $AI = 0{,}6AH$.

Calculons l'aire de ADI.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ADI) &= \frac{1}{2}AI \times DE\\ &= \frac{1}{2}(0{,}6AH) \times (0{,}6BC)\\ &= 0{,}6^2 \times \frac{1}{2}AH \times BC\\ &= 0{,}6^2\mathscr{A}(ABC)\\ &= 0{,}36\mathscr{A}(ABC)\end{aligned}$$

Puisque $\mathscr{A}(ADI) \neq \frac{1}{2}\mathscr{A}(ABC)$ nous pouvons affirmer

les deux aires de plantations ont des superficies distinctes.

Exercice 2.

1. Les dés étant équilibrés nous pouvons modéliser par une équiprobabilité d'obtenir les chiffres des différentes faces.

   Cependant puisqu'il s'agit de lancer deux dés les issues de l'expérience seront les deux résultats obtenus.

   Notons Ω l'ensemble des couples d'entiers entre 1 et 6 muni de la loi d'équiprobabilité (tous les couples ont la même probabilité d'être choisis).

   Une façon de représenter cet univers est d'utiliser un tableau double entrée. Chaque issue de l'expérience est représentée par une case du tableau.

	1	2	3	4	5	6
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	$(2;5)$	$(2;6)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	$(3;5)$	$(3;6)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	$(4;5)$	$(4;6)$
5	$(5;1)$	$(5;2)$	$(5;3)$	$(5;4)$	$(5;5)$	$(5;6)$
6	$(6;1)$	$(6;2)$	$(6;3)$	$(6;4)$	$(6;5)$	$(6;6)$

   Si maintenant nous considérons les sommes obtenues nous obtenons :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(a) L'affirmation de Karim semble *a priori* inexacte car il semble considérer qu'il y a équiprobabilité entre les sommes obtenues ce qui n'est pas le cas.

Notons A l'événement « obtenir une somme qui soit paire ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

A est réalisé si on obtient 2 ou 4 ou 6 ou 8 ou 10 ou 12. A est donc réalisé par $1+3+5+5+3+1=18$. Considérez les diagonales de nombres paires dans le tableau précédent. Or l'univers comporte 36 issues et il y a équiprobabilité donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{18}{36}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Obtenir un nombre pair ou un nombre impair sont deux événements équiprobables.

(b) Notons B l'événement « obtenir une somme qui soit un multiple de 3 ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Nous remarquons que dans le précédent tableau, chaque ligne comporte 2 multiples de 3. Ainsi il y a équiprobabilité, B est réalisé par 12 issues, l'univers contient 36 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{12}{36}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $\mathbb{P}(B)=\frac{1}{3}$.

2. Modélisons comme précédemment. Les produits obtenus avec les résultats de deux dés peuvent donc être représentés dans le tableau :

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24

(a) Notons C l'événement « obtenir un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

Il y a équiprobabilité, d'après le précédent tableau, C est réalisé par 18 issues et l'univers comporte 24 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \frac{18}{24}\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{P}(C) \neq \frac{1}{2}$

obtenir un nombre pair et obtenir un nombre impair ne sont pas équiprobables.

(b) Notons D l'événement « obtenir un multiple de 3 ».

Calculons $\mathbb{P}(D)$.

Il y a équiprobabilité, d'après le précédent tableau, D est réalisé par 12 issues et l'univers comporte 24 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \frac{12}{24}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir un multiple de trois est maintenant de $\frac{1}{2}$.

Exercice 3.

1. (a) $5 \times 4 + 7 = 27$.

   En entrant 5 le programme renvoie 27.

   (b) $\frac{7}{10} \times 4 + 7 = 9{,}8$.

   En entrant $\frac{7}{10}$ le programme renvoie 9,8.

2. Déterminons le nombre à entrer en raisonnant par analyse-synthèse.

   * Analyse.
   Supposons qu'il existe un nombre x qui entré dans le programme renvoie 0,69.
   Autrement dit :

   $$x \times 9 - 3 = 0{,}69$$

   ce qui équivaut successivement à

   $$\begin{aligned} 9x - 3 + 3 &= 0{,}69 + 3 \\ 9x &= 3{,}69 \\ \frac{9x}{9} &= \frac{3{,}69}{9} \\ x &= 0{,}41 \end{aligned}$$

   Donc s'il existe un tel nombre x ce ne peut être que 0,41.
   * Synthèse.
   Nous vérifions que, puisque $0{,}41 \times 9 + 3 = 0{,}69$, donc 0,41 convient.

   Pour que le programme affiche 0,69 il faut entrer le nombre 0,41.

3. Montrons que si le nombre entré est pair alors le programme renvoie un multiple de 6.

   Soit n un entier.
   Déterminons ce que renvoie le programme si nous entrons $2n + 1$ un nombre impair).

$$\begin{aligned}(2n+1)\times 9-3 &= (2n)\times 9+1\times 9-3\\ &= 18n+9-3\\ &= 18n+6\\ &= 6\times 2n+6\times 1\\ &= 6(2n+1)\end{aligned}$$

Donc

> le programme renvoie un multiple de 6 si le nombre de départ est impair.

4. Déterminons les nombres qui renvoie le même résultat avec les deux programmes en raisonnant par analyse synthèse.

   * Supposons qu'il existe un nombre x pour lequel les programmes renvoient le même résultat. Autrement dit :

   $$4x+7=9x-3$$

   Il s'agit d'une équation linéaire du premier degré que nous allons résoudre en isolant l'inconnue en travaillant par équivalences.

   $$\begin{aligned}4x+7-9x &= 9x-3-9x\\ -5x+7 &= -3\\ -5x+7-7 &= -3-7\\ -5x &= -10\\ \frac{-5x}{-5} &= \frac{-10}{-5}\\ x &= 2\end{aligned}$$

   Donc s'il y a une solution au problème ce ne peut être que 2.

   * Il est aisé de vérifier que si le nombre choisi est 2 les deux programmes renvoient bien le même nombre 15.

> Il existe un unique nombre pour lequel les deux programmes affichent le même résultat, il s'agit de 2.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3.
4.
5.

Situation 2.

1.
2. (a)

   (b)

Situation 3.

1.
2.
3.
4.