Épreuve de mathématiques CRPE 2019 groupe 4.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Patrick CRPEiste pour la correction apportée.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

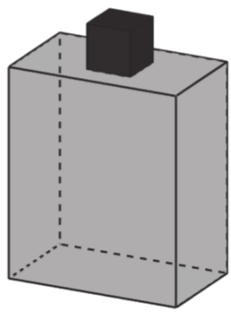
Partie A.

Une entreprise souhaite faire fabriquer des flacons pour commercialiser un nouveau parfum.

Elle hésite entre trois formes de flacons :
— un flacon de forme parallélépipédique,
— un flacon de forme cylindrique,
— un flacon de forme pyramidale.

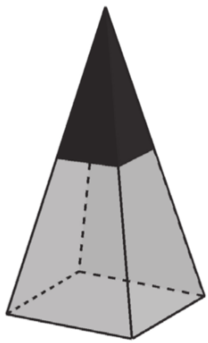
1. *Étude des volumes des différents flacons.*

   L'entreprise qui fabrique les flacons propose les modèles ci-dessous. On ne s'intéresse ici qu'au volume utile du flacon, c'est-à-dire sans tenir compte du goulot et du bouchon qui ne contiennent pas de parfum.



Longueur utile : 5 cm.
Largeur utile : 3 cm.
Hauteur utile : 6 cm.

Diamètre utile : 5 cm.
Hauteur utile : 6 cm.



Le flacon avec son bouchon est une pyramide régulière à base carrée de 5 cm de côté et de hauteur 11 cm.
Le bouchon est une pyramide réduction du flacon, c'est une pyramide régulière à base carrée de côté de longueur 2 cm.

On rappelle les formules suivantes :

$$\text{Volume d'un parallélépipède rectangle} = \textit{aire de la base} \times \textit{hauteur}$$

$$\text{Volume d'un cyclindre} = \textit{aire de la base} \times \textit{hauteur}$$

$$\text{Volume d'une pyramide} = \frac{\textit{Aire de la base} \times \textit{hauteur}}{3}$$

(a) Calculer le volume, en centimètre cube, du flacon de forme parallélépipédique.

Calculons le volume, $\mathscr{V}_1$, du parallélépipède.

En utilisant la formule rappelée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= (5\text{ cm}) \times (3\text{ cm}) \times (6\text{ cm})\\ &= 5 \times 3 \times 6\text{ cm} \times \text{cm} \times \text{cm}\\ &= 90\text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_1 = 90\text{ cm}^3.}$$

(b) Calculer le volume du flacon de forme cylindrique. Donner la valeur exacte, en centimètre cube, du volume de ce flacon puis la valeur arrondie à l'unité près de centimètre cube.

Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ du cylindre.

En utilisant la formule rappelée dans l'énoncé et celle de l'aire d'un disque (qui forme la base du cylindre) :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \left[\pi \cdot \left(\frac{5\text{ cm}}{2}\right)^2\right] \times (6\text{ cm})\\ &= \left[\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2\text{ cm}^2\right] \times (6\text{ cm})\\ &= \pi\frac{5^2}{2^2} \cdot 6\text{ cm}^2 \times \text{cm}\\ &= \frac{75}{2}\pi\text{ cm}^3\\ &\approx 117{,}8097\text{ cm}^3\end{aligned}$$

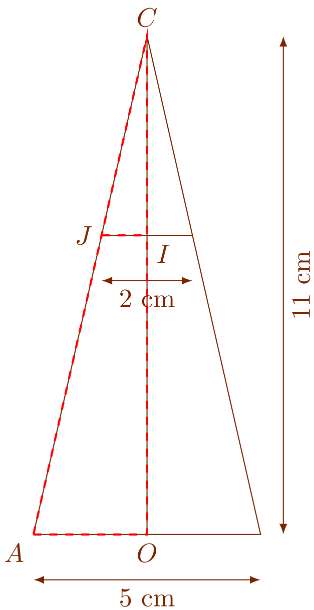
$$\boxed{\mathscr{V}_2 = \tfrac{75}{2}\pi\text{ cm}^3 \approx 118\text{ cm}^3 \text{ en arrondissant au centimètre cube.}}$$

(c) Vérifier que le volume utile du flacon de forme pyramidale est 85,8 cm^3.

Calculons le volume $\mathscr{V}_3$ de la pyramide.

Il ne faut pas oublier d'ôter le volume du bouchon qui est aussi une pyramide à base carrée.

* Déterminons le volume $\mathscr{V}_4$ du bouchon.
  Considérons une vue en coupe du flacon.



Nous reconnaissons une configuration de Thalès qui nous permettra de trouver la hauteur du bouchon.
Les points O, I, C d'une part et A, J, C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
Par construction, $(IJ) \parallel (AO)$, donc, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{CI}{CO} = \frac{IJ}{AO}.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} CI &= \frac{IJ}{AO} \cdot CO \\ &= \frac{1 \text{ cm}}{2{,}5 \text{ cm}} \cdot (11 \text{ cm}) \\ &= 4{,}4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant utiliser la formule de l'énoncé pour une pyramide à base carrée.

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_4 &= \frac{(2 \text{ cm})^2 \times (4{,}4 \text{ cm})}{3} \\ &= \frac{2^2 \times 4{,}4}{3} \text{ cm}^2 \times \text{cm} \\ &= \frac{17{,}4}{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

* Calculons le volume $\mathscr{V}_5$ du flacon tout entier (bouchon inclus).

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_5 &= \frac{(5 \text{ cm})^2 \times (11 \text{ cm})}{3} \\ &= \frac{5^2 \times 11}{3} \text{ cm}^2 \times \text{cm} \\ &= \frac{275}{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Nous déduisons des points précédents le volume utile du flacon pyramidal

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_3 &= \mathscr{V}_5 - \mathscr{V}_4 \\ &= (\frac{275}{3} \text{ cm}^3) - (\frac{17{,}4}{3} \text{ cm}^3) \\ &= 85{,}8666\ldots \end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{\mathscr{V}_3 \approx 85{,}8 \text{ cm}^3.}$$

2. *Enquête auprès de clients.*
L'entreprise réalise un sondage auprès de clients afin de savoir quelle forme de flacon est préférée.
Un seul choix est possible parmi les trois formes proposées. Toutes les personnes interrogées ont donné une réponse parmi les trois formes proposées.

Les résultats du sondage sont donnés dans le tableau suivant :

Forme du flacon	parallélépipédique	cylindrique	pyramidale
Nombre de personnes l'ayant choisi	82	109	47

(a) Déterminer la proportion de personnes préférant le flacon cylindrique. Exprimer le résultat sous forme d'un pourcentage arrondi à l'unité.

Calculons la proportion p_1 de personnes préférant le flacon cylindrique.

109 personnes sur un total de $82 + 109 + 47 = 238$ personnes préfèrent le flacon cylindrique donc :

$$p_1 = \frac{109}{238} \approx 0{,}45798$$

En exprimant le résultat en pourcentage arrondi à l'unité

46 % des personnes préfèrent le flacon cylindrique.

(b) L'entreprise souhaite représenter les données du tableau à l'aide d'un diagramme circulaire pour une présentation à ses partenaires.
Déterminer la mesure de l'angle, arrondie au degré près, du secteur représentant le nombre de personnes ayant choisi le flacon de forme cylindrique.

Calculons la mesure de l'angle du camembert représentant les personnes ayant préféré la forme cylindrique.

Il s'agit d'une situation de proportionnalité.

Pourcentage de personnes	100	1	46
Angles	360	$\frac{360}{100} = 3{,}6$	$46 * 3{,}6 = 165{,}6$

L'angle du secteur mesurera 166°.

Partie B.

L'entreprise de parfum choisi les flacons de forme cylindriques.

1. *Conditionnement du parfum.*
   Le parfum est fabriqué dans des cuves contenant 50 litres de parfum puis conditionné dans des flacons. On considère que le volume d'un flacon cylindrique est de 118 cm^3.

   Combien de flacons pleins peut-on obtenir avec une cuve ?

   Nombre de flacons remplis avec une cuve.

$$\begin{aligned} 50 \text{ L} &= 50 \text{ dm}^3 \\ &= 50(10 \text{ cm})^3 \\ &= 50 \times 10^3 \text{ cm}^3 \\ &= 50\,000 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

   En procédant à une division euclidienne

$$50\,000 = 423 \times 118 + 86$$

   Par conséquent :

   il est possible de remplir 423 flacons avec une cuve.

2. *Étude du coût des flacons.*
   Deux entreprises sont mises en concurrence pour la fabrication des flacons.
   Entreprise 1 : chaque flacon est facturé 2,40 €, les frais de livraison sont gratuits.
   Entreprise 2 : chaque flacon est facturé 1,80 €, les frais de transport s'élèvent à 2 000 € pour toute commande de 1 à 10 000 flacons.

(a) Quel sera le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 1 ? Quel sera le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 2 ?

Déterminons le prix de 2 500 flacons.

* Entreprise 1.
  Chaque flacon étant facturé 2,40 € : $2\,500 \times 2{,}40 = 6\,000$ euro.
* Entreprise 2.
  Chaque flacon est facturé 1,80 € et les frais de transport s'élèvent à 2 000 € donc : $2\,500 \times 1{,}80 + 2\,000 = 6\,500$ €.

Le prix de 2 500 flacons est de 6 000 € pour l'entreprise 1 et 6 500 € pour l'entreprise 2.

(b) On appelle f la fonction affine telle que si x est le nombre de flacons commandés, x un nombre entier compris entre 1 et 10 000, alors $f(x)$ est le montant de la commande en euro, selon le tarif de l'entreprise 1. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

En reprenant le raisonnement de la question précédente en remplaçant 2 500 par x, nous obtenons :

$f(x) = 2{,}4x$ quelque soit x entier entre 1 et 10 000.

(c) On appelle g la fonction affine telle que si est le nombre de flacons commandés, x un nombre entier compris entre 1 et 10 000, alors $g(x)$ est le montant de la commande en euro, selon le tarif de l'entreprise 2. Donner l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

En reprenant le raisonnement de la question 2.(a), nous obtenons :

$g(x) = 1{,}8x + 2000$ quelque soit x entier entre 1 et 10 000.

(d) Tracer sur la copie les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthogonal.
Unités :

1 cm pour 500 unités sur l'axe des abscisses,

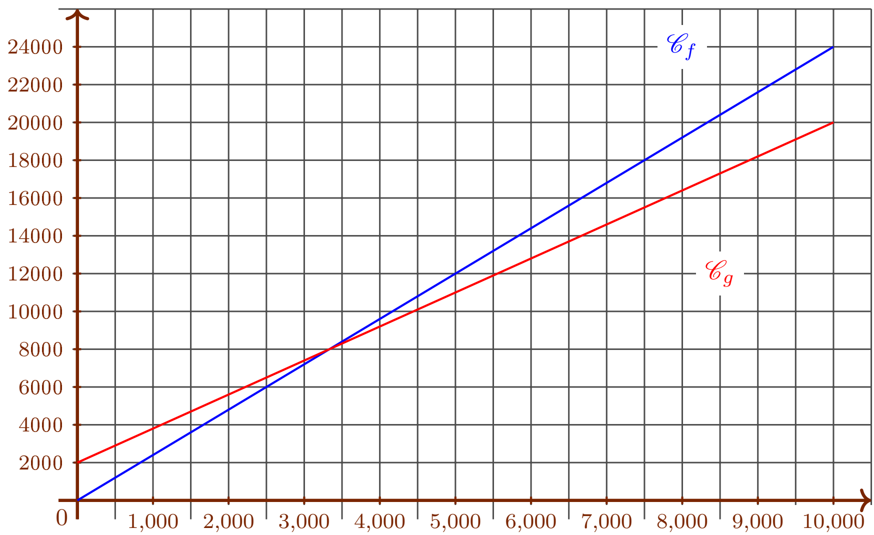
1 cm pour 2 000 unités sur l'axe des ordonnées.

Les fonctions f et g sont affines donc leurs coures représentatives sont des droites. Pour les tracer il suffi d'en connaître deux points.

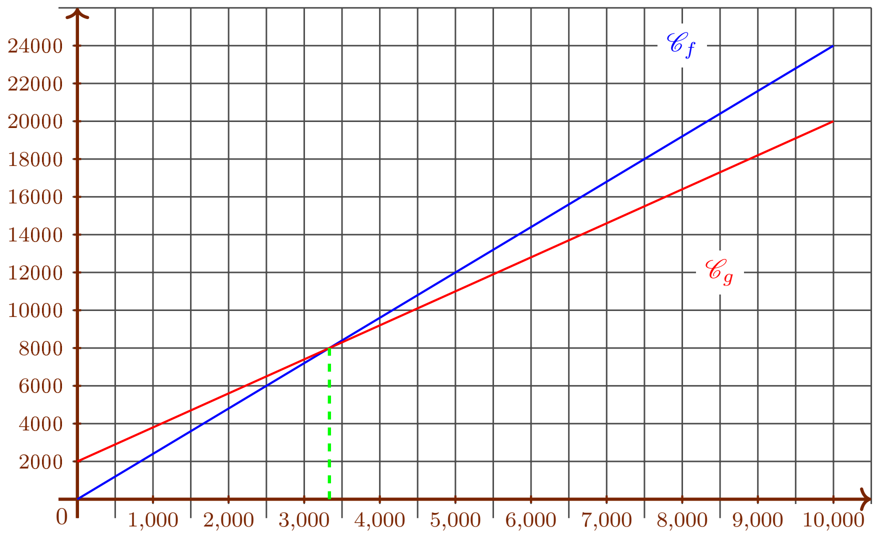
$$f(0) = 0$$
$$f(10000) = 24000$$
$$g(0) = 2000$$
$$g(10000) = 20000$$

Ainsi la courbe représentative, $\mathscr{C}_f$ (respectivement $\mathscr{C}_g$) de f (resp. g), est une droite passant par les points de coordonnées $(0; 0)$ et $(10000; 24000)$ (resp. $(0; 2000)$ et $(10000; 20000)$).

Le graphique est fait à l'échelle 1/2 par rapport à la demande de l'énoncé afin de tenir sur la feuille.



(e) Déterminer graphiquement à partir de combien de flacons commandés l'entreprise 2 devient la plus avantageuse.



L'entreprise 2 devient plus avantageuse à partir de 3 300 flacons produits.

(f) Retrouver par le calcul à partir de combien de flacons commandés l'entreprise 2 devient la plus avantageuse.

Dire que l'entreprise 2 devient plus avantageuse signifie que l'on a $f(x) \geqslant g(x)$.

Résolvons l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ pour $x \in [0; 10000]$.

Il s'agit d'une inéquation linéaire du premier degré nous allons la résoudre en isolant l'inconnue x.

Soit $x \in [0; 10000]$.

$$\begin{aligned}
f(x) \geqslant g(x) &\Leftrightarrow 2{,}4x \geqslant 1{,}8x + 2000\\
&\Leftrightarrow 2{,}4x - 1{,}8x \geqslant 1{,}8x + 2000 - 1{,}8x\\
&\Leftrightarrow (2{,}4 - 1{,}8)x \geqslant 2000\\
&\Leftrightarrow 0{,}6x \geqslant 2000\\
&\Leftrightarrow \frac{0{,}6x}{0{,}6} \geqslant \frac{2000}{0{,}6}\\
&\Leftrightarrow x \geqslant \frac{10000}{3}\\
&\Leftrightarrow x \geqslant 3333{,}333\ldots
\end{aligned}$$

L'entreprise 2 devient plus avantageuse à partir de 3 334 flacons commandés.

(g) Calculer le montant d'une commande de 7 500 flacons dans l'entreprise la plus avantageuse.

Calculons le coût pour 7 500 flacons.

D'après la question précédente, dans ce cas c'est l'entreprise 2 la plus avantageuse et le montant de la commande est alors de

$$\begin{aligned}
g(7500) &= 1{,}8 \times 7500 + 2000\\
&= 15500
\end{aligned}$$

Un commande de 7 500 flacons coûte 15 500 €.

Partie C.

L'entreprise envisage d'emballer chaque flacon dans une boîte en aluminium, cylindrique de hauteur 7,6 cm et de diamètre 5,6 cm.

1. *Patron de la boîte sans couvercle.*
   Construire un patron de la boîte avec un fond mais sans couvercle. Justifier la construction, en précisant les calculs effectués.

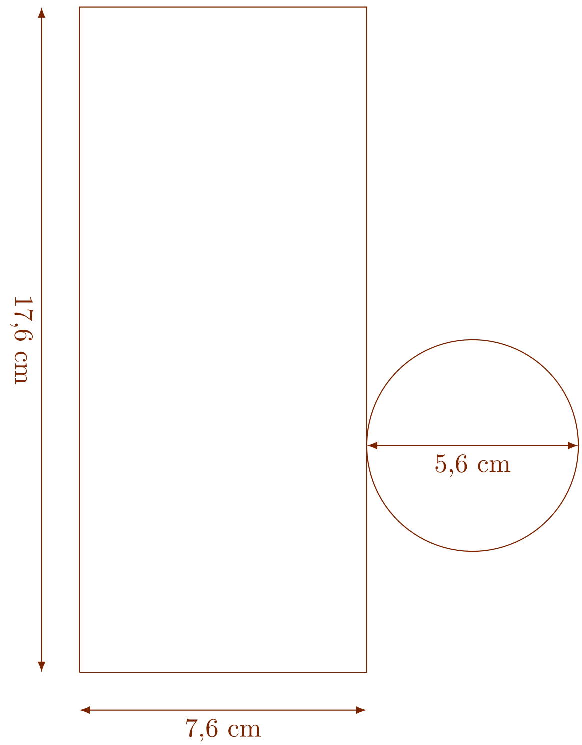
Calculons la longueur, l, du périmètre du disque formant le le fond de la boîte.

$$\begin{aligned} l &= 2\pi \frac{5{,}6 \text{ cm}}{2} \\ &= 5{,}6\pi \text{ cm} \\ &\approx 17{,}59291 \end{aligned}$$

En choisissant d'arrondir au dixième comme les données de l'énoncé nous obtenons que

le périmètre du fond de la boîte mesure $l = 17{,}6$ cm.

Nous pouvons maintenant tracer le patron de la boîte. Le tracer est ici effectué à l'échelle 1/2.



2. *Masse de la boîte sans couvercle.*

On appelle masse surfacique d'une feuille le quotient de sa masse par son aire.

Le patron de la boîte avec un fond mais sans couvercle sera découpé dans une feuille d'aluminium dont la masse surfacique est 810 g/m^2.

(a) Calculer l'aire, en cm^2, du patron de la boîte avec un fond mais sans couvercle.

Donner la valeur exacte de l'aire de ce patron puis sa valeur arrondie à l'unité près.

Calculons l'aire $\mathscr{A}_1$ du patron.

Le patron étant composé d'un rectangle de dimensions 7,6 cm et 5,6π cm et d'un disque de rayon $\frac{5{,}6}{2}$ cm nous en déduisons l'aire du patron :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1 &= (7{,}6 \text{ cm}) \times (5{,}6\pi \text{ cm}) + \pi\left(\frac{5{,}6}{2} \text{ cm}\right)^2 \\ &= 7{,}6 \times 5{,}6\pi + \left(\frac{5{,}6}{2}\right)^2 \pi \text{ cm}^2 \\ &= 50{,}4\pi \text{ cm}^2 \\ &\approx 158{,}3362 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = 50{,}4\pi \text{ cm}^2 \approx 158 \text{ cm}^2.}$$

(b) Calculer la masse de la boîte avec un fond mais sans couvercle arrondie au gramme près.

calculons la masse de la boîte.

Nous connaissons la surface et la masse surfacique nous en déduisons la masse :

$$
\begin{aligned}
m &= (50{,}4\pi\ \mathrm{cm}^2)(810\ \mathrm{g}\cdot\mathrm{m}^{-2})\\
&= \left(50{,}4\pi\left(\frac{1}{100}\ \mathrm{m}\right)^2\right)(810\ \mathrm{g}\cdot\mathrm{m}^{-2})\\
&= \left(50{,}4\pi\times\frac{1}{100^2}\ \mathrm{m}^2\right)(810\ \mathrm{g}\cdot\mathrm{m}^{-2})\\
&= 50{,}4\pi\times\frac{1}{100^2}\times 810\ \mathrm{m}^2\times\mathrm{g}\cdot\mathrm{m}^{-2}\\
&= 4{,}0824\pi\ \mathrm{g}\\
&\approx 12{,}825\ \mathrm{g}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{m \approx 13\ \mathrm{g}.}$$

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

Des paysagistes veulent réaliser un parterre triangulaire avec des tulipes blanches et rouges.

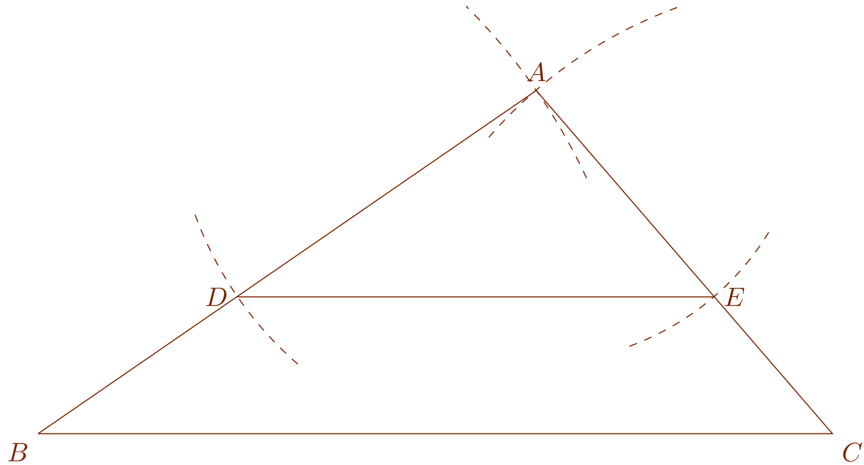
Ils placent trois piquets A, B et C tels que :

- A et B sont distants de 8 m ;
- A et C sont distants de 6 m ;
- B et C sont distants de 10,5 m ;

puis ils tirent des cordes d'un piquet à l'autre.

Ils décident de séparer ce parterre en deux parties. Le long de la corde reliant les piquets A et B, ils placent un piquet D distant de A de 4,8 m. Le long de la corde reliant les piquets A et C, ils placent un piquet E distant de A de 3,6 m. Puis ils tirent une corde entre D et E.

1. Construire une figure qui représente la situation en prenant pour échelle 1 cm pour 1 m.



La corde qui relie les piquets D et E délimite la zone dans laquelle seront plantées des tulipes rouges de celle dans laquelle seront plantées des tulipes blanches.

2. Pour des questions esthétiques, les paysagistes souhaitent que la corde qui relie les piquets D et E soit parallèle à la corde qui relie les piquets B et C. Cette situation est-elle vérifiée ? Justifier votre réponse.

   Après une rapide recherche au brouillon nous remarquons, avec le théorème de Thalès, qu'effectivement les cordes sont parallèles. Et nous pouvons donc énoncé notre objectif.

   Démontrons avec la réciproque du théorème de Thalès : $(BD) \parallel (DE)$.

   * Configuration de Thalès.
     Les points B, D, A d'une part et C, E, A d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèse de la réciproque du théorème de Thalès.
     D'une part $\frac{AD}{AB} = \frac{4{,}8}{8} = 0{,}6$ et d'autre part $\frac{AE}{AC} = \frac{3{,}6}{6} = 0{,}6$, donc $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

   Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

   $$\boxed{(DE) \parallel (BC).}$$

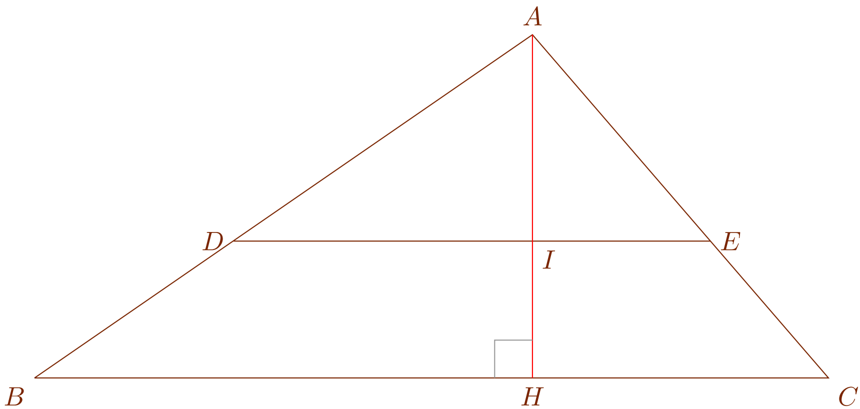
3. Calculer la distance entre les piquets D et E.

4. Déterminer si l'aire de la zone dans laquelle seront plantées des tulipes rouges est égale à celle de la zone dans laquelle seront plantées des tulipes blanches.

Nous aurions *a priori* l'idée d'utiliser la formule usuelle faisant intervenir la hauteur du triangle. Mais ici nous ne connaissons pas les longueurs des hauteurs. Le triangle ABC semble rectangle en A, ce qui signifierai que deux de ses hauteurs se confondent avec les côtés de l'angle droit. Malheureusement une rapide utilisation de la contraposée du théorème de Pythagore montre que ce triangle n'est pas rectangle en A.
Nous sommes donc renvoyés aux premières questions et devons considérer l'agrandissement des longueurs mis en évidence par le théorème de Thalès.

Démontrons que les deux surfaces délimitées n'ont pas même aire.

Il est clair que les distances étant multipliées par 0,6 les surfaces seront multipliées par $0{,}6^2 = 0{,}36$ et non pas $\frac{1}{2}$. Les surfaces ne seront pas égales. Détaillons ce résultat.



Notons H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC et I le point d'intersection de (DE) et (AH). Puisque $(DE) \parallel (BC)$, I est aussi le pied de la hauteur de ADE issue de A.

* Configuration de Thalès.
 Les points B, D, A d'une part et H, I, A d'autre part sont alignés dans cet ordre.

* Hypothèse du théorème de Thalès.
 D'après la question précédente $(DI) \parallel (BH)$.

Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès, que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AI}{AH}.$$

Autrement dit $AI = 0{,}6AH$.

Calculons l'aire de ADI.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ADI) &= \frac{1}{2}AI \times DE \\ &= \frac{1}{2}(0{,}6AH) \times (0{,}6BC) \\ &= 0{,}6^2 \times \frac{1}{2}AH \times BC \\ &= 0{,}6^2\mathscr{A}(ABC) \\ &= 0{,}36\mathscr{A}(ABC)\end{aligned}$$

Puisque $\mathscr{A}(ADI) \neq \frac{1}{2}\mathscr{A}(ABC)$ nous pouvons affirmer

les deux aires de plantations ont des superficies distinctes.

Exercice 2.

Dans tout l'exercice, les dés sont équilibrés.

Un dé cubique possède six faces numérotées de 1 à 6. Lorsqu'on le lance, le nombre comptant pour le score est celui affiché par la face du dessus.

Un dé tétraédrique possède quatre faces numérotées de 1 à 4. Lorsqu'on le lance, le nombre comptant pour le score est celui affiché par la face cachée.

1. Karim et Brigitte s'amusent à lancer simultanément deux dés cubiques. Le score est obtenu en ajoutant les nombres donnés par les deux dés.

   Les dés étant équilibrés nous pouvons modéliser par une équiprobabilité d'obtenir les chiffres des différentes faces.

   Cependant puisqu'il s'agit de lancer deux dés les issues de l'expérience seront les deux résultats obtenus.

   Notons Ω l'ensemble des couples d'entiers entre 1 et 6 muni de la loi d'équiprobabilité (tous les couples ont la même probabilité d'être choisis).

   Une façon de représenter cet univers est d'utiliser un tableau double entrée. Chaque issue de l'expérience est représentée par une case du tableau.

	1	2	3	4	5	6
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	$(2;5)$	$(2;6)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	$(3;5)$	$(3;6)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	$(4;5)$	$(4;6)$
5	$(5;1)$	$(5;2)$	$(5;3)$	$(5;4)$	$(5;5)$	$(5;6)$
6	$(6;1)$	$(6;2)$	$(6;3)$	$(6;4)$	$(6;5)$	$(6;6)$

Si maintenant nous considérons les sommes obtenues nous obtenons :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(a) Karim dit : « Les scores possibles sont 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. On a donc plus de chances d'obtenir un score pair ! ».
Karim a-t-il raison ? Justifier.

L'affirmation de Karim semble *a priori* inexacte car il semble considérer qu'il y a équiprobabilité entre les sommes obtenues ce qui n'est pas le cas.

Notons A l'événement « obtenir une somme qui soit paire ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

A est réalisé si on obtient 2 ou 4 ou 6 ou 8 ou 10 ou 12. A est donc réalisé par $1+3+5+5+3+1=18$. Considérez les diagonales de nombres paires dans le tableau précédent. Or l'univers comporte 36 issues et il y a équiprobabilité donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{18}{36}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Obtenir un nombre pair ou un nombre impair sont deux événements équiprobables.

(b) Brigitte dit : « On a une chance sur trois d'obtenir un score multiple de 3. »
Brigitte a-t-elle raison ? Justifier.

Notons B l'événement « obtenir une somme qui soit un multiple de 3 ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Nous remarquons que dans le précédent tableau, chaque ligne comporte 2 multiples de 3. Ainsi il y a équiprobabilité, B est réalisé par 12 issues, l'univers contient 36 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{12}{36}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.

2. Karim et Brigitte s'amusent maintenant à lancer simultanément un dé cubique et un dé tétraédrique. Le score est obtenu en multipliant les nombres donnés par les deux dés.

Modélisons comme précédemment. Les produits obtenus avec les résultats de deux dés peuvent donc être représentés dans le tableau :

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24

(a) Avec cette nouvelle règle, a-t-on autant de chances d'obtenir un score pair qu'un score impair ?

Notons C l'événement « obtenir un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

Il y a équiprobabilité, d'après le précédent tableau, C est réalisé par 18 issues et l'univers comporte 24 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \frac{18}{24}\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{P}(C) \neq \frac{1}{2}$

> obtenir un nombre pair et obtenir un nombre impair ne sont pas équiprobables.

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir un score multiple de 3 ?

Notons D l'événement « obtenir un multiple de 3 ».

Calculons $\mathbb{P}(D)$.

Il y a équiprobabilité, d'après le précédent tableau, D est réalisé par 12 issues et l'univers comporte 24 issues donc

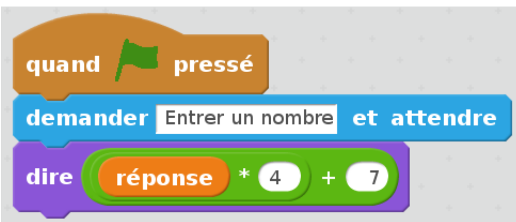
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \frac{12}{24}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

> La probabilité d'obtenir un multiple de trois est maintenant de $\frac{1}{2}$.

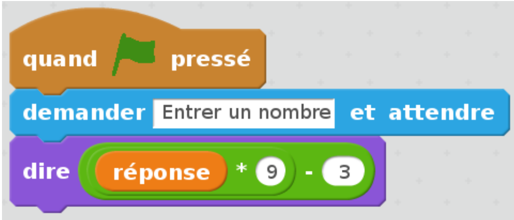
Exercice 3.

On dispose des deux programmes de calcul ci-dessous :

Programme A



Programme B



1. Différents nombres sont entrés dans le programme A.

   (a) Montrer que quand on entre le nombre 5, la réponse obtenue est le nombre 27.

   $5 \times 4 + 7 = 27$.

   En entrant 5 le programme renvoie 27.

   (b) Quel nombre est obtenu quand on entre le nombre $\dfrac{7}{10}$? Justifier la réponse.

   $\frac{7}{10} \times 4 + 7 = 9{,}8$.

   En entrant $\frac{7}{10}$ le programme renvoie 9,8.

2. Quel nombre faut-il entrer dans le programme B pour que le résultat affiché soit égale à 0,69 ?

   Déterminons le nombre à entrer en raisonnant par analyse-synthèse.

   * Analyse.
     Supposons qu'il existe un nombre x qui entré dans le programme renvoie 0,69.
     Autrement dit :

$$x \times 9 - 3 = 0{,}69$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 9x - 3 + 3 &= 0{,}69 + 3 \\ 9x &= 3{,}69 \\ \frac{9x}{9} &= \frac{3{,}69}{9} \\ x &= 0{,}41 \end{aligned}$$

Donc s'il existe un tel nombre x ce ne peut être que 0,41.

* Synthèse.

Nous vérifions que, puisque $0{,}41 \times 9 + 3 = 0{,}69$, donc 0,41 convient.

Pour que le programme affiche 0,69 il faut entrer le nombre 0,41.

3. Prouver que quand on entre un nombre impaire dans le programme B, le nombre obtenu est toujours un multiple de 6.

Montrons que si le nombre entré est pair alors le programme renvoie un multiple de 6.

Soit n un entier.
Déterminons ce que renvoie le programme si nous entrons $2n + 1$ un nombre impair).

$$\begin{aligned} (2n+1) \times 9 - 3 &= (2n) \times 9 + 1 \times 9 - 3 \\ &= 18n + 9 - 3 \\ &= 18n + 6 \\ &= 6 \times 2n + 6 \times 1 \\ &= 6(2n+1) \end{aligned}$$

Donc

le programme renvoie un multiple de 6 si le nombre de départ est impair.

4. Existe-t-il des nombres qui permettent d'avoir le même résultat affiché avec les deux programmes ? Si oui, déterminer tous ces nombres.

Déterminons les nombres qui renvoie le même résultat avec les deux programmes en raisonnant par analyse synthèse.

* Supposons qu'il existe un nombre x pour lequel les programmes renvoient le même résultat. Autrement dit :

$$4x + 7 = 9x - 3$$

Il s'agit d'une équation linéaire du premier degré que nous allons résoudre en isolant l'inconnue en travaillant par équivalences.

$$\begin{aligned} 4x + 7 - 9x &= 9x - 3 - 9x \\ -5x + 7 &= -3 \\ -5x + 7 - 7 &= -3 - 7 \\ -5x &= -10 \\ \frac{-5x}{-5} &= \frac{-10}{-5} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Donc s'il y a une solution au problème ce ne peut être que 2.

* Il est aisé de vérifier que si le nombre choisi est 2 les deux programmes renvoient bien le même nombre 15.

Il existe un unique nombre pour lequel les deux programmes affichent le même résultat, il s'agit de 2.

III Troisième partie (14 points).

Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.

Situation 1.

Dans une classe de Moyenne Section, par groupes de trois, des élèves jouent avec l'enseignant à un jeu où, à chaque tour, ils prennent le nombre de jetons indiqué par la constellation d'un dé de 1 à 6.

L'enseignant observe les procédures des élèves :

— Anissa prend directement le nombre de jetons correspondant à la constellation du dé ;
— Elvina prend une poignée de jetons, les organise à l'identique de la constellation du dé puis repose l'excédent sans procédure numérique apparente ;
— quand il obtient 1, 2 ou 3, Martin prend le nombre de jetons correspondant ; pour les constellations de 4, 5 ou 6, il compte en posant son doigt sur chaque point de la constellation du dé et prend un jeton.

1. Quelle notion mathématique ce jeu permet-il de travailler ?

2. Conjecturer les stratégies utilisées par chacun des élèves.

3. Proposer deux modifications du jeu que peut proposer l'enseignant afin de rendre la tâche plus complexe pour Anissa.

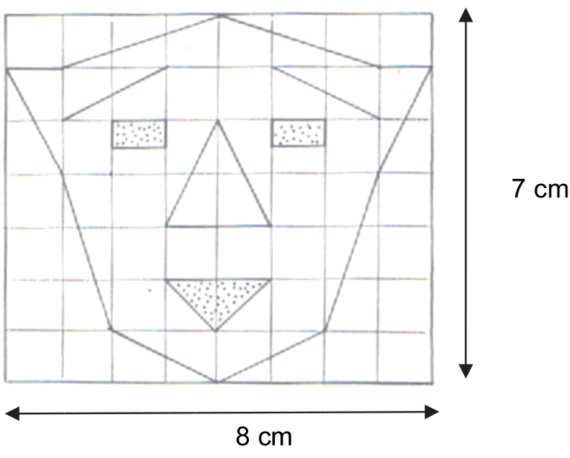
4. Proposer une modification du jeu que peut proposer l'enseignant pour qu'Elvina mobilise d'autres stratégies.

5. l'enseignant fait évoluer le jeu en proposant deux dés dont les faces sont marquées avec des chiffres de 1 à 3. Les élèves doivent prendre le nombre de jetons correspondants à la somme des deux dés. Que permettrait de faire travailler aux élèves cette nouvelle situation que ne faisait pas travailler la situation avec un dé unique ?

Situation 2.

Un enseignant de cycle 3 propose la situation suivante à ses élèves pour travailler la compétence associée suivante : « Proportionnalité : reproduire une figure en respectant une échelle. ».

Il distribue un masque reproduit sur un quadrillage.



Cette figure n'est pas en vraie grandeur.

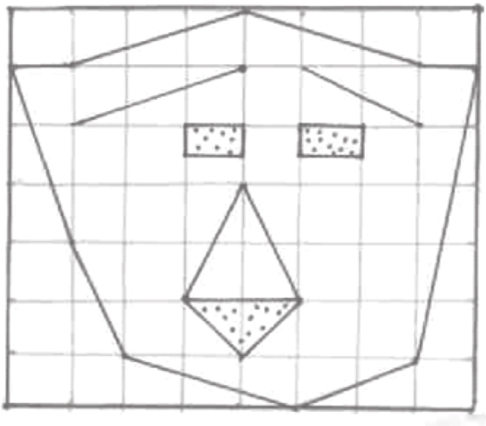
Les dimensions du quadrillage d'origine sont indiquées sur la figure ci-dessus : 8 cm sur 7 cm. L'enseignant distribue ensuite une feuille de 24 cm sur 21 cm sur papier uni et donne la consigne suivante :

« Observe bien ce masque. Tu dois agrandir ce masque sur une feuille qui mesure 24 cm sur 21 cm. Le masque doit être le plus grand possible sur cette feuille. »

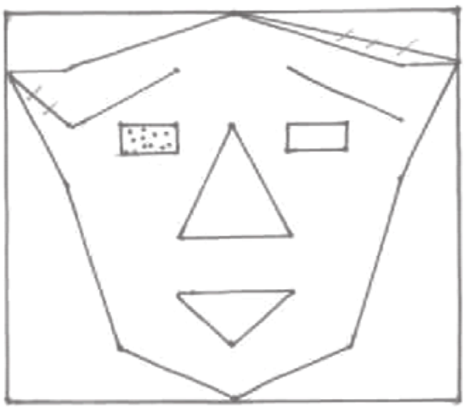
1. L'enseignant choisit de faire reproduire la figure sur papier uni. Quelle est l'influence possible de ce choix sur les procédures des élèves ?

2. Quatre productions d'élèves sont présentées ci-dessous.

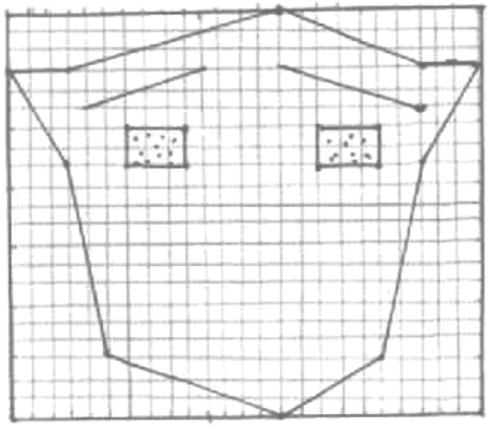
Léon



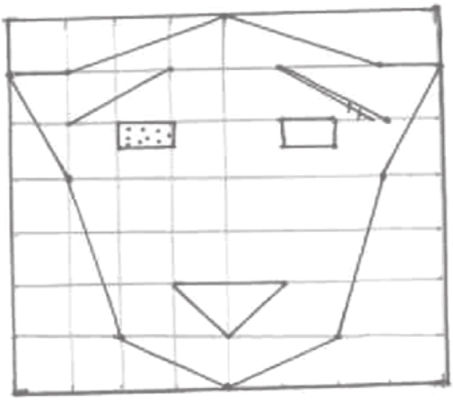
Manon



Sarah



Amir



(a) Décrire la procédure utilisée pour chacun des élèves Manon, Sarah et Amir pour résoudre ce problème.

(b) Analyser les réussites et les erreurs que vous pouvez repérer dans chacune des productions de Léon et Sarah.

Situation 3.

Le problème ci-dessous est proposé à des élèves de CM1 :

Une paire de bâtons et une paire de ski coûtent 128 euros. Sachant que les skis coûtent 75 euros de plus que les bâtons, retrouve le prix des bâtons.

D'après un exercice proposé au concours math'isère

Voici les réponses de trois élèves : Leïna, Mathis et Mickaël.

Production de Leïna

$$\begin{array}{r} 128 \\ -\ 75 \\ \hline 53 \end{array}$$

Les bâtons de skis coûtent 53 €.

Production de Mathis

203€ J'ai fait 128 + 75

le prix des bâtons est de 203 €.

Production de Mickaël

26,5 + 75 = 101,50

$$\begin{array}{r} 101,50 \\ +\ 26,50 \\ \hline 128,00 \end{array}$$

1. Expliquer en quoi les compétences modéliser et calculer vont être mobilisées dans ce problème.

2. Analyser chacune des trois productions ci-dessus en repérant les réussites et les erreurs éventuelles.

3. Indiquer une autre démarche que des élèves de cycle 3 auraient pu entreprendre pour arriver à la solution.

4. Proposer un schéma que l'enseignant pourrait proposer aux élèves lors de la mise en commun pour aider les élèves à modéliser la situation.