Épreuve de mathématiques CRPE 2019 groupe 3.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Partie A : utilisation et interprétation de l'Indice de Masse Corporelle chez l'adulte.

1. Déterminons l'IMC de Claire.

   D'après l'énoncé

$$\begin{aligned}
\text{IMC} &= \frac{p}{T^2} \\
&= \frac{53\ \text{kg}}{(160\ \text{cm})^2} \\
&= \frac{53\ \text{kg}}{\left(160 \cdot \frac{1}{100}\text{m}\right)^2} \\
&= \frac{53\ \text{kg}}{\left(160 \cdot \frac{1}{100}\right)^2\ \text{m}^2} \\
&= \frac{53}{1{,}6^2}\ \frac{\text{kg}^2}{\text{m}} \\
&= 20{,}703125
\end{aligned}$$

   D'après le tableau ci-dessus cela s'interprète en disant que

   $$\boxed{\text{Claire est d'une corpulence normale.}}$$

2. (a) La formule écrite en `D2` est possiblement

   $$\boxed{= \texttt{B2}/(\texttt{C2} \wedge 2).}$$

   (b) Calculons la proportion, p_1, d'hommes « obèses » ou en « surpoids ».

   Un homme est « obèse » ou en « surpoids » si son IMC est supérieur ou égale 25. Cette situation concerne 3 personnes parmi les 9 considérées. Donc :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{3}{9} \\ &= 0{,}333\ldots \end{aligned}$$

Exprimons ce résultat sous forme de pourcentage.

$$\boxed{33{,}33~\%\text{ sont « obèses » ou en « surpoids ».}}$$

(c) Calculons la masse m_2 que devrait avoir la personne pour avoir un IMC de 25.

Notons T la taille de la personne.
Nous avons donc deux égalités :

$$\frac{70}{T^2} = 28 \quad \text{et} \quad \frac{m_2}{T^2} = 25$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{70}{T^2} \cdot T^2 &= 28T^2 & \text{et} \quad \frac{m_2}{T^2} \cdot T^2 &= 25T^2 \\ 70 &= 28T^2 & \text{et} \quad m_2 &= 25T^2 \\ \frac{70}{28} &= \frac{28T^2}{28} & \text{et} \quad \frac{m_2}{25} &= \frac{25T^2}{25} \\ \frac{70}{28} &= T^2 & \text{et} \quad \frac{m_2}{25} &= T^2 \end{aligned}$$

Donc, par transitivité :

$$\frac{70}{28} = \frac{m_2}{25}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{70}{28} \cdot 25 &= \frac{m_2}{25} \cdot 25 \\ \frac{70}{28} \cdot 25 &= m_2 \\ 62{,}5 &= m_2 \end{aligned}$$

> Pour que son IMC soit de 25 soit poids devrait être de 62,5 kg.

(d) Déterminons un encadrement de la masse pour avoir une « corpulence normale ».

D'après l'énoncé la personne a une corpulence normale si et seulement si

$$18{,}5 \leqslant \text{IMC} < 25$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
18{,}5 &\leqslant \frac{m}{T^2} < 25 \\
18{,}5 &\leqslant \frac{m}{1{,}72^2} < 25 \\
18{,}5\times 1{,}72^2 &\leqslant \frac{m}{1{,}72^2}\times 1{,}72^2 < 25\times 1{,}72^2 \\
18{,}5 \times 1{,}72^2 &\leqslant m < 25 \times 1{,}72^2 \\
54{,}7304 &\leqslant m < 73{,}96
\end{aligned}$$

> Pour que sa corpulence soit « normale » il faut que sa masse minimale soit de 54,73 kg et sa masse maximale de 73,96 kg.

Partie B : l'obésité et le surpoids en France.

L'énoncé nous indique d'interpréter les fréquences d'apparition dans l'échantillon comme la probabilité des événements pour la population toute entière.

Modélisons la loi de probabilité. Par exemple l'événement « choisir une femme dont l'IMC est strictement inférieur à 25 » a une probabilité de $\frac{7\,830}{25\,714} \approx 0{,}30$ (en arrondissant au centième ce qui correspond à un arrondi à l'unité sur un pourcentage).

En réitérant nous obtenons les probabilités suivantes :

	F	H
IMC < 25	0,30	0,22
$25 \leqslant$ IMC < 30	0,14	0,18
$30 \leqslant$ IMC	0,08	0,07
Somme	0,52	0,47

Bien que les événements considérés constituent bien des systèmes complets d'événements, la probabilité totale n'est pas de 1 du fait des arrondis.

Cette modélisation qui la plus rigoureuse est aussi un peu trop théorique pour ce concours. Nous l'utiliserons donc dans une seconde rédaction donnée à titre informatif.

1. Considérons l'univers constitué des 25 714 personnes interrogées. Il y a équiprobabilité dans le choix des personnes.

   Notons A l'événement « la personne est en surpoids ou obèse ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   A est réalisé par $3\,551+4\,739+2\,119+1\,747 = 12\,156$ issues, l'univers comporte 25 714 issues et il y a équiprobabilité donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{12\,156}{25\,714}\\ &\approx 0{,}4727\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \approx 47\ \%.}$$

   Les pourcentages sont en général évités en probabilités mais il s'agit là d'une exigence de l'énoncé.

   Seconde rédaction plus formelle.
   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$$\begin{aligned}A = {}&(F \cap \{25 \leqslant \text{IMC} < 30\}) \sqcup (F \cap \{30 \leqslant \text{IMC}\}) \sqcup\\ &(H \cap \{25 \leqslant \text{IMC} < 30\}) \sqcup (H \cap \{30 \leqslant \text{IMC}\})\end{aligned}$$

   Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(F \cap \{25 \leqslant \text{IMC} < 30\}\right) + \mathbb{P}\left(F \cap \{30 \leqslant \text{IMC}\}\right) +\\ &\quad \mathbb{P}\left(H \cap \{25 \leqslant \text{IMC} < 30\}\right) + \mathbb{P}\left(H \cap \{30 \leqslant \text{IMC}\}\right)\\ &= 0{,}14 + 0{,}18 + 0{,}08 + 0{,}07\\ &= 0{,}47\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 0{,}47.}$$

2. Reprenons la modélisation utilisée à la question précédente.

   Nous savons que la personne interrogée est un homme nous utiliserons donc des probabilités conditionnelles.

   Calculons $\mathbb{P}_H(A)$.

   L'événement $A \cap H$ (hommes en surpoids ou obèse) est réalisé par $4\,739 + 1\,747 = 6\,486$ issues, l'univers comporte $12\,214$ hommes et il y a équiprobabilité donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_H(A) &= \frac{6\,486}{12\,214}\\ &\approx 0{,}5310\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_H(A) \approx 53\ \%.}$$

   Seconde rédaction.
   Calculons $\mathbb{P}_H(A)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_H(A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap H)}{\mathbb{P}(H)}\\ &= \frac{0{,}18 + 0{,}07}{0{,}47}\\ &\approx 0{,}5319\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_H(A) \approx 0{,}53.}$$

3. Notons B l'événement « la personne est obèse ».

   Calculons $\mathbb{P}_B(H)$.

   L'événement $B \cap H$ (hommes obèse) est réalisé par $1\,747$ issues, l'univers comporte $2\,119 + 1\,747 = 3\,866$ personnes obèses et il y a équiprobabilité donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_B(H) &= \frac{1\,747}{3\,866}\\ &\approx 0{,}04518\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_B(H) \approx 45\ \%.}$$

4. Calculons la proportion p_2 de personnes obèses dans l'échantillon.

   Il y a $2\,119 + 1\,747 = 3\,866$ personnes obèses dans l'échantillon et l'échantillon est de taille $25\,714$ donc

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{3\,866}{25\,714} \\ &= 0{,}1503 \end{aligned}$$

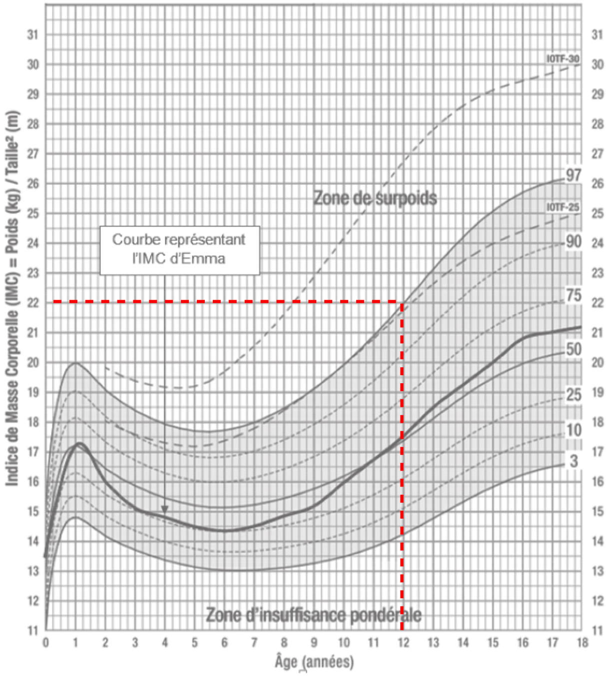
   Or $\frac{1}{6} \approx 0{,}1666$ donc

   $\boxed{\text{il y a moins de } \frac{1}{6} \text{ de personnes obèses dans l'échantillon.}}$

Partie C : utilisation et interprétation de l'Indice de Masse Corporelle chez l'enfant.

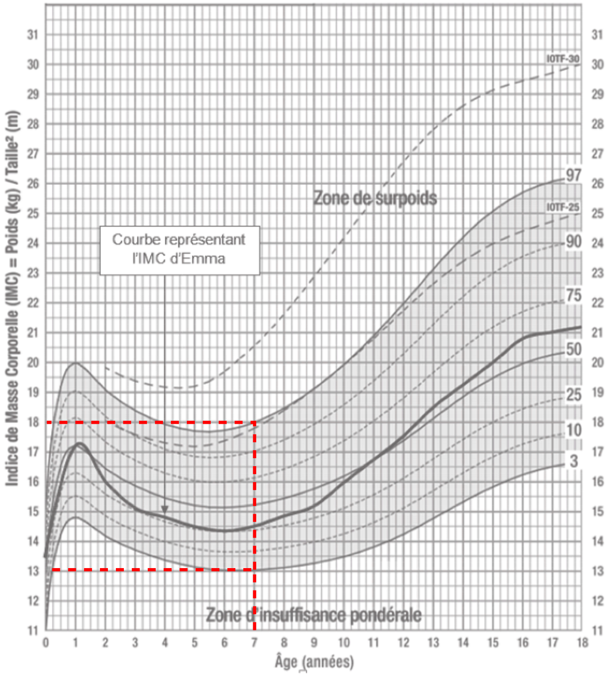
1. Si l'IMC était proportionnel à l'âge alors la courbe serait une droite (passant par l'origine du repère) ce qui n'est pas donc :

   $\boxed{\text{l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.}}$



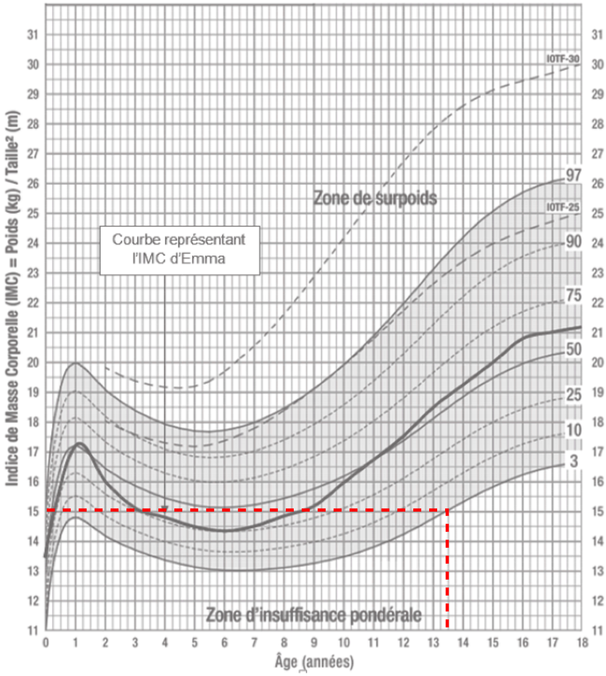
2. (a)

À 12 ans l'IMC maximum qu'une fille doit avoir pour ne pas être considérée en surpoids est 22.



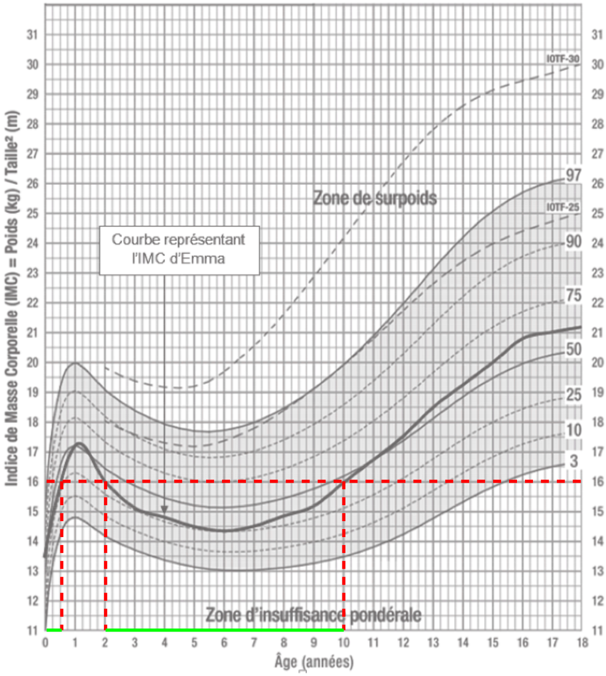
(b)

À 7 ans l'IMC d'une fille, pour qu'elle soit de corpulence normale, est entre 13 et 18.



(c)

À partir de 13 ans et demi une fille est considérée en insuffisance pondérale avec un IMC de 15 kg/m^2.



3.

Emma avait un IMC inférieur ou égale à 16 kg/m^2 jusqu'à 6 mois puis entre 2 et 10 ans.

Partie D : alimentation.

1. Les quantités dans la portion représentent $\frac{30}{100}$ des quantités indiqués sur l'emballage (pour 30 g et non 100 g).
   Les quantités pour 200 mL représentent 2 fois plus que les quantités indiquées pour 100 mL.
   Nous en déduisons le tableau suivant.

Valeurs nutritionnelles moyennes pour le goûter de Frédéric	1 portion de 30 g de gâteau	200 mL de soda	Total
Matières grasses (lipides) dont acides gras saturés	4,8 1,86	0 0	4,8 1,86
Glucides dont sucres	16,2 12,6	29,4 29,4	45,6 42
Protéines	1,65	0	1,65

2. (a) Calculons l'apport énergétique du sucre du goûter.

Nous somme dans un cas de proportionnalité.

Sucre (g)	6	1	42
Énergie (Kcal)	24	4	168

L'apport énergétique du sucre contenu dans le goûter est de 168 Kcal.

(b) Estimons en nombre de sucres la quantité de sucre quotidienne maximum recommandée.

10 % des 1985 Kcal peut provenir du sucre :

$$\frac{10}{100} \times 1985 = 198{,}5 \text{ Kcal.}$$

Sachant qu'un morceau de sucre contient 24 Kcal :

$$198{,}5 = 8 * 24 + 6{,}5.$$

Frédéric ne devrait pas dépasser quotidiennement 8 morceaux de sucres.

(c) Calculons la proportion p_3 de l'apport quotidien recommandé que représente le goûter.

42 g correspondent à (cf *supra*le tableau de proportionnalité) à 168 Kcal. L'apport quotidien recommandé étant de 1985 :

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{168}{1985} \\ &\approx 0{,}084634 \end{aligned}$$

Le goûter représente 8,46 % des apports quotidiens recommandés.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Pour démontrer que $(AB) \perp (BC)$ nous allons démontrer que ABC est rectangle en B.

   Démontrons que ABC est rectangle en B.

   D'une part : $AB^2+BC^2 = 6^2+8^2 = 100$, et d'autre part : $AC^2 = 10^2 = 100$. Ainsi : $AB^2 + BC^2 = AC^2$ et donc, d'après le théorème de Pythagore (en fait sa réciproque), nous pouvons affirmer que ABC est rectangle en B.

   $$\boxed{(AB) \perp (BC).}$$

2. Calculons BD.

   Ayant établi que ABD est rectangle en B, nous en déduisons, d'après le théorème de Pythagore, que

   $$AB^2 + BD^2 = AD^2$$

   Or ceci équivaut successivement à :

   $$\begin{aligned} AB^2 + BD^2 - AB^2 &= AD^2 - AB^2 \\ BD^2 &= 8^2 - 6^2 \\ BD^2 &= 28 \end{aligned}$$

   Et puisque BD est une longueur c'est un nombre positif :

   $$\begin{aligned} BD &= \sqrt{28} \\ &= \sqrt{2^2 \times 7} \\ &= 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

   $$\boxed{BD = 2\sqrt{7}.}$$

3. Calculons la longueur CE.

   La forme de papillon laisse à penser que nous pourrions utiliser le théorème de Thalès. D'autant que nous avons déjà utilisé le théorème de Pythagore et sa réciproque).

   Calculons CE.

   * Configuration de Thalès.
     Les points A, D, E d'une part et B, D, C d'autre part sont alignés dans le même ordre.
   * Hypothèse de la réciproque du théorème de Thalès.

$$\left.\begin{array}{l}(AB) \perp (BC)\\(CE) \perp (BC)\end{array}\right\} \Rightarrow (AB) \parallel (CE).$$

   Nous déduisons des points précédents, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{CE}{AB} = \frac{CD}{BD}.$$

   Donc

$$\begin{aligned}\frac{CE}{AB} \cdot AB &= \frac{CD}{BD} \cdot AB\\ CE &= \frac{CD}{BD} \cdot AB\\ &= \frac{BC - BD}{BD} \cdot AB\\ &= \frac{8 - 2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} \cdot 6\\ &= -6 + \frac{24}{7}\sqrt{7}\end{aligned}$$

$$\boxed{CE = -6 + \tfrac{24}{7}\sqrt{7}.}$$

   Je pense que pour cette question et la suivante les correcteurs se seraient contentés de valeurs approchées.

4. Calculons l'aire $\mathscr{A}(ACE)$ de ACE.

La formule habituelle de calcul d'aire semble difficile à mettre en œuvre puisqu'aucune hauteur du triangle ne nous est déjà connu.
Nous allons découper la surface dont nous cherchons l'aire en parties dont l'aire est plus simple à déterminer.

Avec des notations transparentes :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ACE) &= \mathscr{A}(ADC) + \mathscr{A}(CDE)\\ &= \mathscr{A}(ABC) - \mathscr{A}(ABD) + \mathscr{A}(CDE)\end{aligned}$$

ABC (respectivement ABD, resp. CDE) est un triangle rectangle en B (resp B, resp. C) donc deux de ses hauteurs se confondent avec les côtés de l'angle droit et nous pouvons utiliser la formule usuelle pour calculer l'aire de ce triangle.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABC) &= \frac{1}{2}AB \times BC\\ &= \frac{1}{2} \times (6 \text{ cm}) \times (8 \text{ cm})\\ &= 24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABD) &= \frac{1}{2}AB \times BC\\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{7}\\ &= 6\sqrt{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(CDE) &= \frac{1}{2}CD \times CE\\ &= \frac{1}{2} \times (8 - 2\sqrt{7}) \times \left(-6 + \frac{24}{7}\sqrt{7}\right)\\ &= -\frac{336}{7} + \frac{38}{7}\sqrt{7}\end{aligned}$$

Nous déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ACE) &= 24 - 6\sqrt{7} - \frac{336}{7} + \frac{38}{7}\sqrt{7}\\ &= \left(24 - \frac{336}{7}\right) + \left(\frac{38}{7} - 6\right)\sqrt{7}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ACE) = -\tfrac{168}{7} + \tfrac{96}{7}\sqrt{7}.}$$

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

   Démontrons que $30n + 25$ est divisible par 5.

$$\begin{aligned}30n + 25 &= 5\times 6n + 5\times 5\\ &= 5(6n + 5)\end{aligned}$$

   Donc $30n + 25$ est divisible par 5.

   $$\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ 30n + 25 \text{ est divisible par } 5.}$$

2. (a) Déterminons le nombre renvoyé par le programme lorsque 8 est choisi en entrée.

   Présentons les calcul sous forme d'un tableau d'état des variables en numérotant les lignes du programme de 1 à 5.

Lignes d'instructions	Variable n
1	$n = a = 8$
2	$3 \times n = 3 \times 8 = 24$
3	$n + 5 = 24 + 5 = 29$
4	$n^2 = 29^2 = 841$
5	$n^2 - 9a^2 = 841 - 9 \times 8^2 = 265$

   Ce programme de calcul n'est pas un programme au sens informatique c'est pourquoi nous avons dû ajouter une variable a pour le rendre cohérent.

Si le nombre choisi en entrée est 8 le programme renvoie 265.

(b) Déterminons le nombre renvoyé par le programme lorsque -56 est choisi en entrée.

Lignes d'instructions	Variable n
1	$n = a = -56$
2	$3 \times n = 3 \times (-56) = -168$
3	$n + 5 = -168 + 5 = -163$
4	$n^2 = (-163)^2 = 26569$
5	$n^2 - 9a^2 = 26569 - 9 \times (-56)^2 = -1655$

Si le nombre choisi en entrée est -56 le programme renvoie 337.

(c) Démontrons que le nombre renvoyé par le programme est toujours divisible par 5.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Lignes d'instructions	Variable n
1	n
2	$3n$
3	$3n + 5$
4	$(3n + 5)^2$
5	$(3n + 5)^2 - 9n^2$

Le programme renvoie donc

$$\begin{aligned}(3n+5)^2 - 9n^2 &= (3n)^2 + 2 \times 3n \times 5 + 5^2 - 9n^2 \\ &= 3^2n^2 + 30n + 25 - 9n^2 \\ &= 9n^2 + 30n + 25 - 9n^2 \\ &= 30n + 25\end{aligned}$$

Or, d'après la question 1. $30n + 25$ est divisible par 25, donc

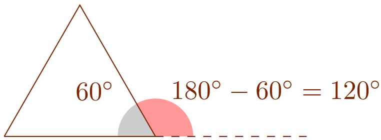
quelque soit l'entier choisi en entré dans le programme le nombre retourné est toujours divisible par 5.

Exercice 3.

1. Le programme C permet de tracer la figure souhaitée.

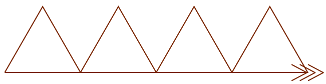
2. Expliquons l'angle.

   Un petit schéma valant mieux qu'un long discours (et puisque nou souhaitons tracer des triangles équilatéraux d'angles 60°) :

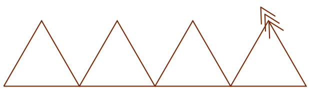


3. Le ⋙ représente l'emplacement du lutin à la fin du tracer.

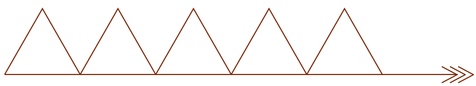
   * Programme A.



   * Programme B.



   * Programme C.



III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3. (a)
   (b)
4.

Situation 2.

1.
2.

Situation 3.

1. (a)
   (b)
2.
3.