Épreuve de mathématiques CRPE 2019 groupe 3.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

L'Indice de Masse Corporelle (IMC) est une grandeur qui permet d'estimer la corpulence d'une personne en fonction de sa taille et de sa masse corporelle afin d'évaluer les risques liés au surpoids.

Voici la formule permettant de calculer l'Indice de Masse Corporelle :

$$\text{IMC} = \frac{p}{T^2}$$

dans laquelle :

IMC désigne l'indice de Masse Corporelle exprimée en kilogramme par mètre carré(kg/m^2) ;

p désigne la masse exprimée en kilogramme (kg) ;

T désigne la taille exprimée en mètre (m).

Partie A : utilisation et interprétation de l'Indice de Masse Corporelle chez l'adulte.

Pour prévenir les risques liés aux problèmes de poids, l'Organisation Mondiale de la Santé a défini les intervalles standards suivants :

IMC (kg/m^2)	**Interprétation**
moins de 16,5	anorexie
de 16,5 à moins de 18,5	maigreur
de 18,5 à moins de 25	corpulence normale
de 25 à moins de 30	surpoids
de 30 à moins de 35	obésité modérée
de 35 à moins de 40	obésité sévère
plus de 40	obésité morbide

(Source : http://inpes.santepubliquefrance.fr/50000/pdf/docIMCAd.pdf)

1. Claire mesure 160 cm et pèse 53 kg. Calculer son IMC. Quelle interprétation peut-on en faire ?

   Déterminons l'IMC de Claire.

   D'après l'énoncé

$$\begin{aligned}\text{IMC} &= \frac{p}{T^2}\\ &= \frac{53 \text{ kg}}{(160 \text{ cm})^2}\\ &= \frac{53 \text{ kg}}{\left(160 \cdot \frac{1}{100}\text{m}\right)^2}\\ &= \frac{53 \text{ kg}}{\left(160 \cdot \frac{1}{100}\right)^2 \text{ m}^2}\\ &= \frac{53}{1{,}6^2}\ \frac{\text{kg}^2}{\text{m}}\\ &= 20{,}703125\end{aligned}$$

   D'après le tableau ci-dessus cela s'interprète en disant que

   $\boxed{\text{Claire est d'une corpulence normale.}}$

2. On interroge huit hommes sur leur masse et leur taille afin de calculer leur IMC.
   On obtient le tableau suivant :

	A	B	C	D
1	Homme	Masse P (en kg)	Taille T (en m)	Calcul de l'IMC
2	n°1	72	1,92	19,5
3	n°2	66	1,72	22,3
4	n°3	104	1,75	34,0
5	n°4	73	1,78	23,0
6	n°5	80	1,86	23,1
7	n°6	98	1,85	28,6
8	n°7	78	1,82	23,5
9	n°8	80	1,7	27,7

(a) Quelle formule a pu être écrite en `D2` puis étirée jusqu'en `D9` pour calculer l'IMC ?

La formule écrite en `D2` est possiblement

$$= \texttt{B2}/(\texttt{C2} \wedge 2).$$

(b) Parmi ceux qui ont été interrogés, quel est le pourcentage d'hommes « obèses » ou en « surpoids » ?

Calculons la proportion, p_1, d'hommes « obèses » ou en « surpoids ».

Un homme est « obèse » ou en « surpoids » si son IMC est supérieur ou égale 25. Cette situation concerne 3 personnes parmi les 9 considérées. Donc :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{3}{9} \\ &= 0{,}333\ldots \end{aligned}$$

Exprimons ce résultat sous forme de pourcentage.

33,33 % sont « obèses » ou en « surpoids ».

(c) Une personne a un IMC de 28 et pèse 70 kg. Combien de kilogramme doit-elle perdre pour avoir un IMC de 25 ?

Calculons la masse m_2 que devrait avoir la personne pour avoir un IMC de 25.

Notons T la taille de la personne.
Nous avons donc deux égalités :

$$\frac{70}{T^2} = 28 \quad \text{et} \quad \frac{m_2}{T^2} = 25$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{70}{T^2}\cdot T^2 &= 28T^2 \quad &\text{et}\quad & \frac{m_2}{T^2}\cdot T^2 = 25T^2 \\ 70 &= 28T^2 \quad &\text{et}\quad & m_2 = 25T^2 \\ \frac{70}{28} &= \frac{28T^2}{28} \quad &\text{et}\quad & \frac{m_2}{25} = \frac{25T^2}{25} \\ \frac{70}{28} &= T^2 \quad &\text{et}\quad & \frac{m_2}{25} = T^2 \end{aligned}$$

Donc, par transitivité :

$$\frac{70}{28} = \frac{m_2}{25}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{70}{28}\cdot 25 &= \frac{m_2}{25}\cdot 25 \\ \frac{70}{28}\cdot 25 &= m_2 \\ 62{,}5 &= m_2 \end{aligned}$$

Pour que son IMC soit de 25 soit poids devrait être de 62,5 kg.

(d) Quelle masse minimale et quelle masse maximale peut avoir une personne mesurant 1,72 m pour avoir une « corpulence normale ».

Déterminons un encadrement de la masse pour avoir une « corpulence normale ».

D'après l'énoncé la personne a une corpulence normale si et seulement si

$$18{,}5 \leqslant \text{IMC} < 25$$

ce qui équivaut successivement à :

$$18{,}5 \leqslant \frac{m}{T^2} < 25$$
$$18{,}5 \leqslant \frac{m}{1{,}72^2} < 25$$
$$18{,}5 \times 1{,}72^2 \leqslant \frac{m}{1{,}72^2} \times 1{,}72^2 < 25 \times 1{,}72^2$$
$$18{,}5 \times 1{,}72^2 \leqslant m < 25 \times 1{,}72^2$$
$$54{,}7304 \leqslant m < 73{,}96$$

Pour que sa corpulence soit « normale » il faut que sa masse minimale soit de 54,73 kg et sa masse maximale de 73,96 kg.

Partie B : l'obésité et le surpoids en France.

En 2012 une enquête nationale sur l'obésité et le surpoids a été réalisée en France sur un échantillon de 25 714 personnes de 18 ans et plus.

Le tableau ci-dessous indique les résultats obtenus.

		Femmes	Hommes
Pas de surpoids	IMC < 25	7 830	5 728
Surpoids	$25 \leqslant$ IMC < 30	3 551	4 739
Obésité	$30 \leqslant$ IMC	2 119	1 747
Total		13 500	12 214

Source : http://www.roche.fr/content/dam/roche_france/fr_FR/doc/obepi_2012.pdf)

Une société proposant des solutions pour mincir décide d'entreprendre un démarchage téléphonique pour se constituer une clientèle.

Elle appelle au hasard une personne de plus de 18 ans. On considérera que la répartition de la population pouvant être appelée est dans la même proportion que celle de cet échantillon.

On donnera les réponses en pourcentage arrondi à l'unité.

L'énoncé nous indique d'interpréter les fréquences d'apparition dans l'échantillon comme la probabilité des événements pour la population toute entière.

Modélisons la loi de probabilité. Par exemple l'événement « choisir une femme dont l'IMC est strictement inférieur à 25 » a une probabilité de $\frac{7\,830}{25\,714} \approx 0{,}30$ (en arrondissant au centième ce qui correspond à un arrondi à l'unité sur un pourcentage).

En réitérant nous obtenons les probabilités suivantes :

	F	H
IMC $<$ 25	0,30	0,22
25 $\leqslant$ IMC $<$ 30	0,14	0,18
30 $\leqslant$ IMC	0,08	0,07
Somme	0,52	0,47

Bien que les événements considérés constituent bien des systèmes complets d'événements, la probabilité totale n'est pas de 1 du fait des arrondis.

Cette modélisation qui la plus rigoureuse est aussi un peu trop théorique pour ce concours. Nous l'utiliserons donc dans une seconde rédaction donnée à titre informatif.

1. Quelle est la probabilité que cette personne soit en surpoids ou obèse ?

   Considérons l'univers constitué des 25 714 personnes interrogées. Il y a équi-probabilité dans le choix des personnes.

   Notons A l'événement « la personne est en surpoids ou obèse ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   A est réalisé par $3\,551+4\,739+2\,119+1\,747 = 12\,156$ issues, l'univers comporte 25 714 issues et il y a équiprobabilité donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{12\,156}{25\,714}\\ &\approx 0{,}4727\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \approx 47\ \%.}$$

   Les pourcentages sont en général évités en probabilités mais il s'agit là d'une exigence de l'énoncé.

   Seconde rédaction plus formelle.
   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$$A = (F \cap \{25 \leqslant \text{IMC} < 30\}) \sqcup (F \cap \{30 \leqslant \text{IMC}\}) \sqcup (H \cap \{25 \leqslant \text{IMC} < 30\}) \sqcup (H \cap \{30 \leqslant \text{IMC}\})$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(F \cap \{25 \leqslant \text{IMC} < 30\}\right) + \mathbb{P}\left(F \cap \{30 \leqslant \text{IMC}\}\right) + \\ &\quad \mathbb{P}\left(H \cap \{25 \leqslant \text{IMC} < 30\}\right) + \mathbb{P}\left(H \cap \{30 \leqslant \text{IMC}\}\right) \\ &= 0{,}14 + 0{,}18 + 0{,}08 + 0{,}07 \\ &= 0{,}47\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 0{,}47.}$$

2. La personne appelée est un homme. Quelle est la probabilité que cet homme soit en surpoids ou obèse ?

Reprenons la modélisation utilisée à la question précédente.

Nous savons que la personne interrogée est un homme nous utiliserons donc des probabilités conditionnelles.

Calculons $\mathbb{P}_H(A)$.

L'événement $A \cap H$ (hommes en surpoids ou obèse) est réalisé par $4\,739 + 1\,747 = 6\,486$ issues, l'univers comporte $12\,214$ hommes et il y a équiprobabilité donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_H(A) &= \frac{6\,486}{12\,214} \\ &\approx 0{,}5310\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_H(A) \approx 53~\%.}$$

Seconde rédaction.
Calculons $\mathbb{P}_H(A)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_H(A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap H)}{\mathbb{P}(H)} \\ &= \frac{0{,}18 + 0{,}07}{0{,}47} \\ &\approx 0{,}5319\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_H(A) \approx 0{,}53.$$

3. La personne appelée est obèse. Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ?

Notons B l'événement « la personne est obèse ».

Calculons $\mathbb{P}_B(H)$.

L'événement $B \cap H$ (hommes obèse) est réalisé par 1 747 issues, l'univers comporte $2\,119 + 1\,747 = 3\,866$ personnes obèses et il y a équiprobabilité donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_B(H) &= \frac{1\,747}{3\,866}\\ &\approx 0{,}04518\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_B(H) \approx 45~\%.$$

4. Une personne prétend que plus de $\frac{1}{6}$ de l'échantillon est obèse. A-t-elle raison ? Justifier.

Calculons la proportion p_2 de personnes obèses dans l'échantillon.

Il y a $2\,119+1\,747 = 3\,866$ personnes obèses dans l'échantillon et l'échantillon est de taille 25 714 donc

$$\begin{aligned}p_2 &= \frac{3\,866}{25\,714}\\ &= 0{,}1503\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{6} \approx 0{,}1666$ donc

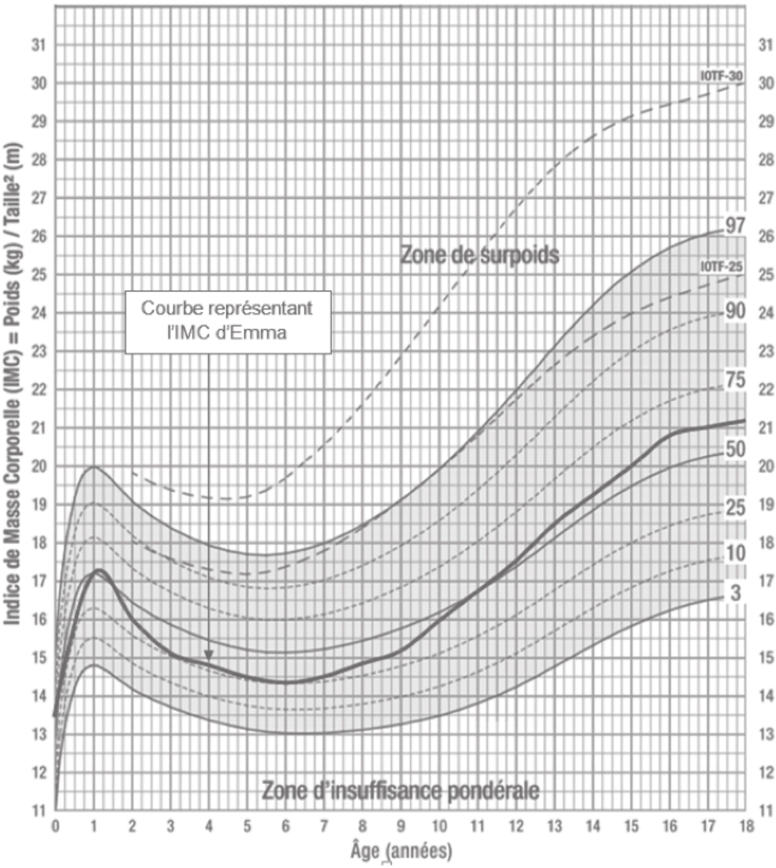
il y a moins de $\frac{1}{6}$ de personnes obèses dans l'échantillon.

Partie C : utilisation et interprétation de l'Indice de Masse Corporelle chez l'enfant.

Au départ, l'IMC a été conçu pour les adultes de 18 ans et plus, mais il est important de dépister précocement un simple excès de poids, qui peut, par la suite, conduire à l'obésité. L'IMC est donc aussi calculé chez les enfants. Cette valeur est reportée ensuite sur un graphique présent dans son carnet de santé et qui est spécifique au sexe de l'enfant.

Source : http://inpes.santepubliquefrance.fr/CFESBases/catalogue/pdf/IMC/courbes_enfants.pdf)

Voici le graphique représentant l'évolution de l'IMC d'Emma, aujourd'hui âgée de 19 ans.



La zone grisée représente la zone de corpulence normale dans laquelle la plupart des enfants se situent.

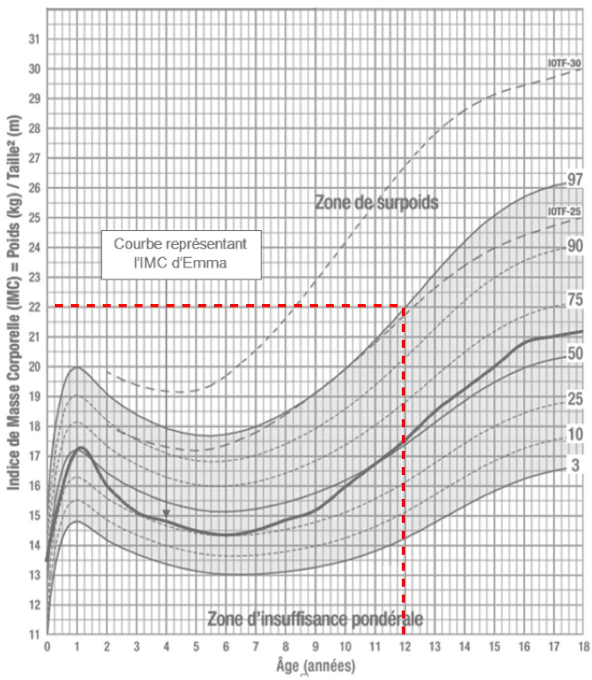
En dessous, l'enfant est considéré en insuffisance pondérale et au-dessus en surpoids.

1. D'après ce graphique, l'IMC chez l'enfant est-il proportionnel à l'âge ? Justifier.

   Si l'IMC était proportionnel à l'âge alors la courbe serait une droite (passant par l'origine du repère) ce qui n'est pas donc :

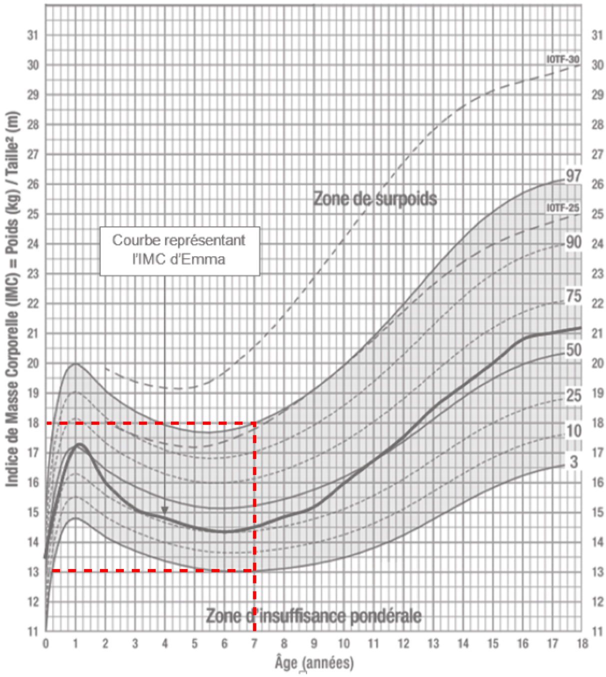
   l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.

2. (a) À 12 ans, quel est l'IMC maximum qu'une fille doit avoir pour ne pas être considérée en surpoids ?



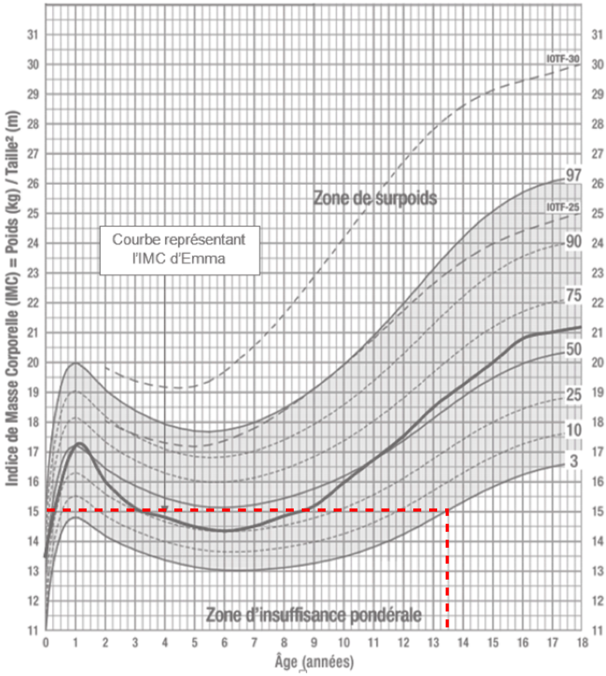
À 12 ans l'IMC maximum qu'une fille doit avoir pour ne pas être considérée en surpoids est 22.

(b) À 7 ans, entre quelles valeurs se situe l'$I\mathring{M}C$ d'une fille pour qu'elle soit de corpulence normale ?



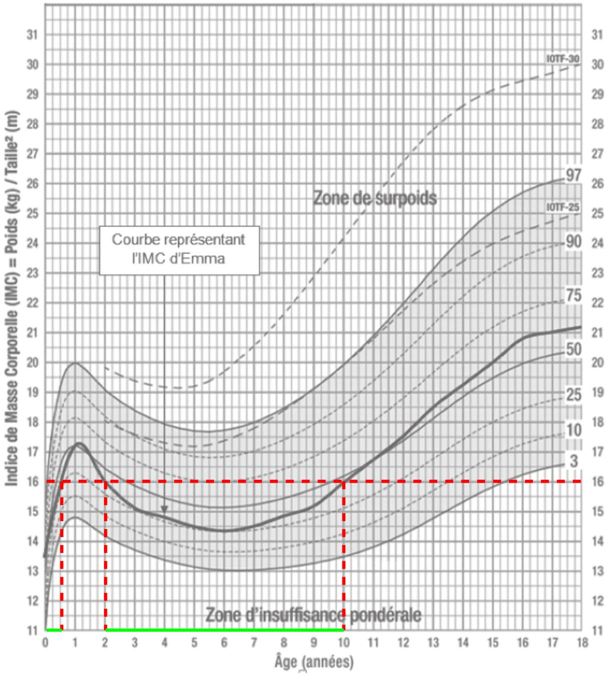
À 7 ans l'$I\mathring{M}C$ d'une fille, pour qu'elle soit de corpulence normale, est entre 13 et 18.

(c) À partir de quel âge une fille est-elle considérée en insuffisance pondérale avec un IMC de 15 kg/m^2 ?



À partir de 13 ans et demi une fille est considérée en insuffisance pondérale avec un IMC de 15 kg/m^2.

3. Quelles sont les tranches d'âges sur lesquelles Emma avait un IMC inférieur ou égale à 16 kg/m^2 ?



Emma avait un IMC inférieur ou égale à 16 kg/m^2 jusqu'à 6 mois puis entre 2 et 10 ans.

Partie D : alimentation.

Les problèmes de poids peuvent être liés à l'alimentation.
Il est donc intéressant de savoir lire les étiquettes des produits industriels.

Le goûter de Frédéric, 8 ans, est composé d'une portion de 30 g de gâteau et d'un verre de 200 mL de soda.

- Sur ce paquet de gâteaux on peut lire les informations suivantes :

Valeurs nutritionnelles moyennes	Pour 100 g
Matières grasses (lipides) dont acides gras saturés	16 g 6,2 g
Glucides dont sucres	54 g 42 g
Protéines	5,5 g

- Sur la bouteille de soda, il est indiqué que 100 mL contiennent 14,7 g de glucides dont 14,7 g de sucres et qu'il n'y a aucune matière grasse ni aucune protéine.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

Valeurs nutritionnelles moyennes pour le goûter de Frédéric	1 portion de 30 g de gâteau	200 mL de soda	Total
Matières grasses (lipides) dont acides gras saturés	... ...	... ...	... ...
Glucides dont sucres	... ...	... ...	... ...
Protéines	...	...	...

Les quantités dans la portion représentent $\frac{30}{100}$ des quantités indiqués sur l'emballage (pour 30 g et non 100 g).

Les quantités pour 200 mL représentent 2 fois plus que les quantités indiquées pour 100 mL.

Nous en déduisons le tableau suivant.

Valeurs nutritionnelles moyennes pour le goûter de Frédéric	1 portion de 30 g de gâteau	200 mL de soda	Total
Matières grasses (lipides) dont acides gras saturés	4,8 1,86	0 0	4,8 1,86
Glucides dont sucres	16,2 12,6	29,4 29,4	45,6 42
Protéines	1,65	0	1,65

2. Pour un morceau de sucre d'environ 6 g, l'apport énergétique est en moyenne de 24 Kcal (Kilocalories).

   (a) Quel est l'apport énergétique du sucre contenu dans le goûter de Frédéric ?

   Calculons l'apport énergétique du sucre du goûter.

   Nous somme dans un cas de proportionnalité.

Sucre (g)	6	1	42
Énergie (Kcal)	24	4	168

L'apport énergétique du sucre contenu dans le goûter est de 168 Kcal.

(b) Pour un garçon de 8 ans, l'apport énergétique quotidien conseillé, pour un niveau d'activité moyen, est de 1 985 Kcal.

Afin de diminuer le risque de surpoids, d'obésité et de caries dentaires, il est souhaitable, pour les adultes comme pour les enfants, que leur consommation de sucre représente au maximum 10 % de l'apport énergétique quotidien.

Source : http://www.who.int/mediacentre/news/releases/2015/sugar-guideline/fr/)

À combien de morceaux de sucre correspond la masse de sucre que Frédéric ne devrait pas dépasser quotidiennement ?

Estimons en nombre de sucres la quantité de sucre quotidienne maximum recommandée.

10 % des 1985 Kcal peut provenir du sucre :

$$\frac{10}{100} \times 1985 = 198{,}5 \text{ Kcal.}$$

Sachant qu'un morceau de sucre contient 24 Kcal :

$$198{,}5 = 8 * 24 + 6{,}5.$$

Frédéric ne devrait pas dépasser quotidiennement 8 morceaux de sucres.

(c) Calculer le pourcentage des apports quotidiens recommandés que représente la quantité de sucre consommé par Frédéric durant son goûter.

Calculons la proportion p_3 de l'apport quotidien recommandé que représente le goûter.

42 g correspondent à (cf *supra*le tableau de proportionnalité) à 168 Kcal. L'apport quotidien recommandé étant de 1985 :

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{168}{1985} \\ &\approx 0{,}084634 \end{aligned}$$

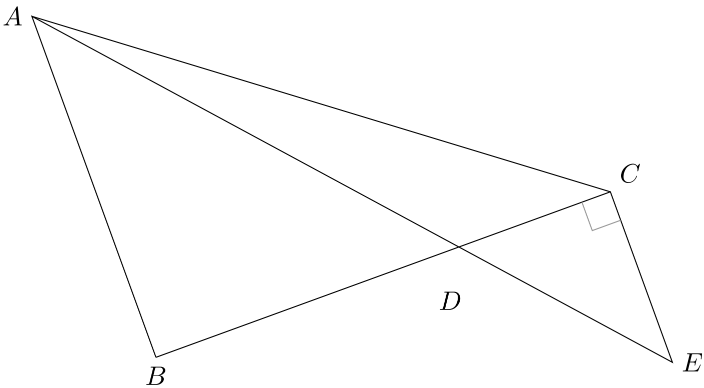
Le goûter représente 8,46 % des apports quotidiens recommandés.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

On considère la figure ci-dessous qui n'est pas représentée à l'échelle.



On sait que :

- $BC = 8$ cm ;
- $AB = 6$ cm ;
- $AC = 10$ cm ;
- $AD = 8$ cm ;
- D appartient aux segments $[AE]$ et $[BC]$;
- les droites (BC) et (CE) sont perpendiculaires.

Le but de l'exercice est de déterminer l'aire du triangle ACE.

1. Montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

   Pour démontrer que $(AB) \perp (BC)$ nous allons démontrer que ABC est rectangle en B.

Démontrons que ABC est rectangle en B.

D'une part : $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, et d'autre part : $AC^2 = 10^2 = 100$. Ainsi : $AB^2 + BC^2 = AC^2$ et donc, d'après le théorème de Pythagore (en fait sa réciproque), nous pouvons affirmer que ABC est rectangle en B.

$$\boxed{(AB) \perp (BC).}$$

2. En déduire la longueur BD.

Calculons BD.

Ayant établi que ABD est rectangle en B, nous en déduisons, d'après le théorème de Pythagore, que

$$AB^2 + BD^2 = AD^2$$

Or ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} AB^2 + BD^2 - AB^2 &= AD^2 - AB^2 \\ BD^2 &= 8^2 - 6^2 \\ BD^2 &= 28 \end{aligned}$$

Et puisque BD est une longueur c'est un nombre positif :

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{28} \\ &= \sqrt{2^2 \times 7} \\ &= 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\boxed{BD = 2\sqrt{7}.}$$

3. Déterminer la longueur CE.

Calculons la longueur CE.

La forme de papillon laisse à penser que nous pourrions utiliser le théorème de Thalès. D'autant que nous avons déjà utilisé le théorème de Pythagore et sa réciproque).

Calculons CE.

* Configuration de Thalès.
Les points A, D, E d'une part et B, D, C d'autre part sont alignés dans le même ordre.

* Hypothèse de la réciproque du théorème de Thalès.

$$\left.\begin{array}{l}(AB) \perp (BC)\\(CE) \perp (BC)\end{array}\right\} \Rightarrow (AB) \parallel (CE).$$

Nous déduisons des points précédents, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{CE}{AB} = \frac{CD}{BD}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{CE}{AB} \cdot AB &= \frac{CD}{BD} \cdot AB\\ CE &= \frac{CD}{BD} \cdot AB\\ &= \frac{BC - BD}{BD} \cdot AB\\ &= \frac{8 - 2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} \cdot 6\\ &= -6 + \frac{24}{7}\sqrt{7}\end{aligned}$$

$$\boxed{CE = -6 + \tfrac{24}{7}\sqrt{7}.}$$

Je pense que pour cette question et la suivante les correcteurs se seraient contentés de valeurs approchées.

4. Déterminer l'aire du triangle ACE.

Calculons l'aire $\mathscr{A}(ACE)$ de ACE.

La formule habituelle de calcul d'aire semble difficile à mettre en œuvre puisqu'aucune hauteur du triangle ne nous est déjà connu.
Nous allons découper la surface dont nous cherchons l'aire en parties dont l'aire est plus simple à déterminer.

Avec des notations transparentes :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ACE) &= \mathscr{A}(ADC) + \mathscr{A}(CDE)\\ &= \mathscr{A}(ABC) - \mathscr{A}(ABD) + \mathscr{A}(CDE)\end{aligned}$$

ABC (respectivement ABD, resp. CDE) est un triangle rectangle en B (resp B, resp. C) donc deux de ses hauteurs se confondent avec les côtés de l'angle droit et nous pouvons utiliser la formule usuelle pour calculer l'aire de ce triangle.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABC) &= \frac{1}{2}AB \times BC\\ &= \frac{1}{2} \times (6 \text{ cm}) \times (8 \text{ cm})\\ &= 24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABD) &= \frac{1}{2}AB \times BC\\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{7}\\ &= 6\sqrt{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(CDE) &= \frac{1}{2}CD \times CE\\ &= \frac{1}{2} \times (8 - 2\sqrt{7}) \times \left(-6 + \frac{24}{7}\sqrt{7}\right)\\ &= -\frac{336}{7} + \frac{38}{7}\sqrt{7}\end{aligned}$$

Nous déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ACE) &= 24 - 6\sqrt{7} - \frac{336}{7} + \frac{38}{7}\sqrt{7}\\ &= \left(24 - \frac{336}{7}\right) + \left(\frac{38}{7} - 6\right)\sqrt{7}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ACE) = -\tfrac{168}{7} + \tfrac{96}{7}\sqrt{7}.}$$

Exercice 2.

1. Pour tout nombre entier n, montrer que $30n + 25$ est divisible par 5.

   Soit $n \in \mathbb{Z}$.

   Démontrons que $30n + 25$ est divisible par 5.

$$\begin{aligned} 30n + 25 &= 5\times 6n + 5\times 5 \\ &= 5(6n + 5) \end{aligned}$$

   Donc $30n + 25$ est divisible par 5.

   Pour tout entier n, $30n + 25$ est divisible par 5.

2. Voici un programme de calcul :

   - Choisir un nombre entier.
   - Multiplier par 3.
   - Ajouter 5.
   - Élever au carré.
   - Soustraire 9 fois le carré du nombre de départ.

   (a) Montrer que ce programme a pour résultat 265 si le nombre entier choisi est 8. Les calculs seront détaillés.

   Déterminons le nombre renvoyé par le programme lorsque 8 est choisi en entrée.

   Présentons les calcul sous forme d'un tableau d'état des variables en numérotant les lignes du programme de 1 à 5.

Lignes d'instructions	Variable n
1	$n = a = 8$
2	$3 \times n = 3 \times 8 = 24$
3	$n + 5 = 24 + 5 = 29$
4	$n^2 = 29^2 = 841$
5	$n^2 - 9a^2 = 841 - 9 \times 8^2 = 265$

Ce programme de calcul n'est pas un programme au sens informatique c'est pourquoi nous avons dû ajouter une variable a pour le rendre cohérent.

Si le nombre choisi en entrée est 8 le programme renvoie 265.

(b) Quel résultat obtient-on si le nombre entier choisi est (-56) ?

Déterminons le nombre renvoyé par le programme lorsque -56 est choisi en entrée.

Lignes d'instructions	Variable n
1	$n = a = -56$
2	$3 \times n = 3 \times (-56) = -168$
3	$n + 5 = -168 + 5 = -163$
4	$n^2 = (-163)^2 = 26569$
5	$n^2 - 9a^2 = 26569 - 9 \times (-56)^2 = -1655$

Si le nombre choisi en entrée est -56 le programme renvoie 337.

(c) Montrer que le résultat de ce programme de calculs, quel que soit le nombre de départ, est divisible par 5.

Démontrons que le nombre renvoyé par le programme est toujours divisible par 5.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Lignes d'instructions	Variable n
1	n
2	$3n$
3	$3n + 5$
4	$(3n + 5)^2$
5	$(3n + 5)^2 - 9n^2$

Le programme renvoie donc

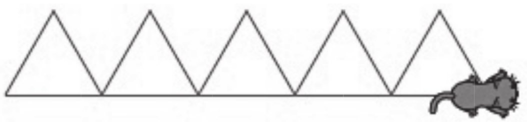
$$\begin{aligned}(3n+5)^2 - 9n^2 &= (3n)^2 + 2\times 3n\times 5 + 5^2 - 9n^2\\ &= 3^2n^2 + 30n + 25 - 9n^2\\ &= 9n^2 + 30n + 25 - 9n^2\\ &= 30n + 25\end{aligned}$$

Or, d'après la question 1. $30n+25$ est divisible par 25, donc

> quelque soit l'entier choisi en entré dans le programme le nombre retourné est toujours divisible par 5.

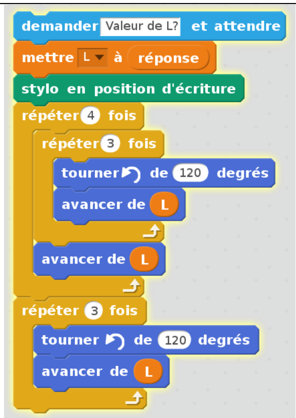
Exercice 3.

La figure ci-dessous a été réalisée à l'aide du logiciel de programmation Scratch.



1. Parmi les programmes proposés ci-dessous, quel est celui qui permet de tracer ce dessin ? Aucune justification n'est demandée.

<table>
<tr><th>Programme A</th><th>Programme B</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

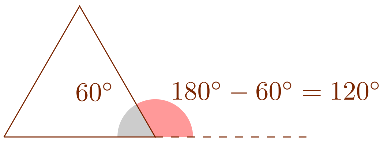
<table>
<tr><th>Programme C</th><th>Programme D</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Le programme C permet de tracer la figure souhaitée.

2. Dans ces programmes, l'angle de rotation est de 120°. Expliquer pourquoi.

Expliquons l'angle.

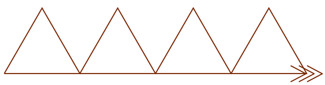
Un petit schéma valant mieux qu'un long discours (et puisque nou souhaitons tracer des triangles équilatéraux d'angles 60°) :



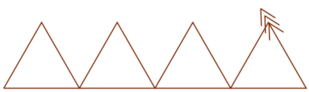
3. Tracer à main levée les figures obtenues avec chacun des programmes non retenus à la question 1.

Le ⋙ représente l'emplacement du lutin à la fin du tracer.

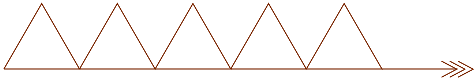
* Programme A.



* Programme B.



* Programme C.



III Troisième partie (14 points).

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

Situation 1.

L'exercice ci-dessous est proposé dans une classe de CE1. Les élèves doivent écouter l'énoncé du problème lu par l'enseignant puis rechercher une solution numérique à la question du problème pour l'entourer parmi 6 propositions. Ils doivent produire des traces de leur recherche.

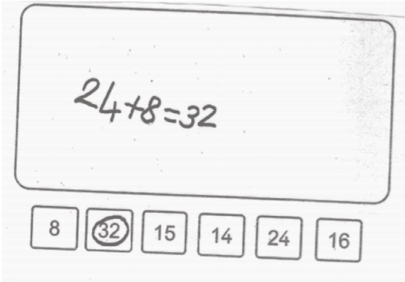
> Léo a 24 € dans son porte monnaie. Il a 8 € de plus que Lilou. Combien d'euros Lilou a-t-elle ?
>
> 8 | 32 | 15 | 14 | 24 | 16

1. En quoi les compétences modéliser et calculer sont-elles mobilisées pour résoudre ce problème ?

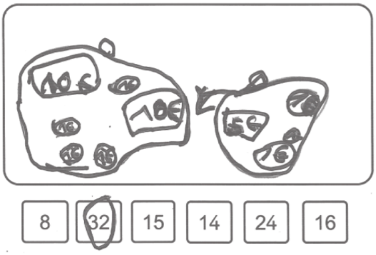
2. Donner deux difficultés que les élèves pourraient rencontrer pour résoudre ce problème.

3. Voici les productions de quatre élèves.

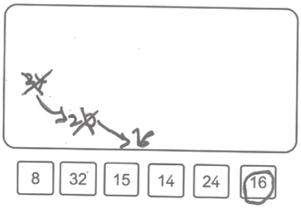
Kiara



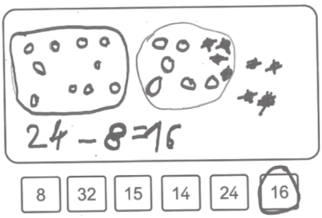
Lucas



Maya



Arif



Pour chacun de ces travaux :

(a) Analyser la trace écrite (procédures suivies, compétences mises en œuvre, erreurs éventuelles).

(b) Proposer une remédiation ou un accompagnement que l'enseignant pourrait mettre en place pour aider Lucas et Kiara à résoudre le problème.

4. Au cours du CE1, l'enseignant propose à nouveau l'exercice avec d'autres nombres afin de faire évoluer les représentations schématiques utilisées par les élèves.

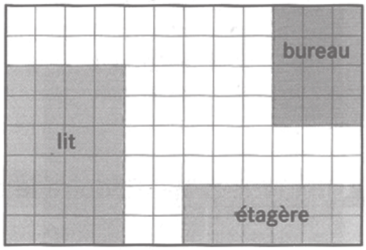
> Léo a 322 € dans son porte monnaie. Il a 46 € de plus que Lilou.
> Combien d'euros Lilou a-t-elle ?

Proposer une représentation schématique que l'enseignant peut présenter aux élèves pour les aider à modéliser la situation.

Situation 2.

Un enseignant propose à ses élèves un exercice inspiré d'une activité extraite du manuel « Cap Maths CM2 », (Hatier, 2010).

> Figurine a fait un plan de sa chambre sur un papier quadrillé pour y disposer son lit, un bureau et une étagère.
> La chambre est représentée par le grand rectangle de 8 carreaux sur 12 carreaux.
> Elle veut réaliser un agrandissement de ce plan.
> Elle décide que le grand côté de la chambre devra mesurer 18 carreaux sur le plan agrandi.



> Détermine les dimensions du plan agrandi et des meubles de la chambre sur ce plan agrandi.

1. Voici un extrait de réponse d'un élève.

> On a ajouté 6 carreaux au grand côté, il faut donc ajouter 6 carreaux à tous les côtés.
> [...]
> Pour le lit :
> grand côté $= 6 + 6 = 12$ carreaux
> petit côté $= 4 + 6 = 10$ carreaux
> [...]

Comment, sans s'appuyer sur la bonne réponse, peut-on convaincre cet élève que sa réponse est fausse ?

2. Proposer trois procédures correctes qu'un élève de CM2 peut mettre en œuvre pour donner les dimensions correctes de l'étagère. Expliciter la propriété mathématique utilisée pour chaque procédure.

Situation 3.

Un enseignant de CM2 propose les exercices suivants à ses élèves :

Exercice 1

Range ces nombres par ordre croissant :
5,29 – 5,07 – 6,04 – 5,121 – 5,8 – 5,25

Réponse :

...... < ...... < ...... < ...... < ...... < ......

Exercice 2

Intercale un nombre.

a) 8,3 < ...... < 8,5 b) 4,7 < ...... < 4,8

c) 7 < ...... < 7,1

On trouvera ci-dessous quatre productions d'élèves.

Exercice 1

Célestine

Range ces nombres par ordre croissant :
5,29 – 5,07 – 6,04 – 5,121 – 5,8 – 5,25

Réponse :

5,8... < 5,07.. < 5,25.. < 5,29. < 6,04.. < 5,121

Exercice 2

4,7,5

Intercale un nombre.

a) 8,3 < 8,4.. < 8,5 b) 4,7 < 4,75.. < 4,8

c) 7 < ...... < 7,1

Toufik

Exercice 1

Range ces nombres par ordre croissant :
5,29 – 5,07 – 6,04 – 5,121 – 5,8 – 5,25

Réponse :

6,04 < 5,8 < 5,29 < 5,25 < 5,121 < 5,07

5,29 5,25

Exercice 2

Intercale un nombre.

a) 8,3 < 8,4 < 8,5 b) 4,7 < …… < 4,8

c) 7 < …… < 7,1

Paola

Exercice 1

Range ces nombres par ordre croissant :
5,29 – 5,07 – 6,04 – 5,121 – 5,8 – 5,25

Réponse :

5,07 < 5,121 < 5,25 < 5,29 < 5,8 < 6,04

Exercice 2

Intercale un nombre.

a) 8,3 < 8,4 < 8,5 b) 4,7 < 4,71 < 4,8

c) 7 < 7,01 < 7,1

Exercice 1

Range ces nombres par ordre croissant :
5,29 – 5,07 – 6,04 – 5,121 – 5,8 – 5,25

Miroslav

Réponse :
5,8... < 5,07 < 5,25. < 5,29. < 5,121 < 6,1..

Exercice 2

Intercale un nombre.

a) 8,3 < 8,4.. < 8,5 b) 4,7 < 4,... < 4,8

c) 7 < ...... < 7,1

1. Dans cette question, on s'intéresse uniquement à l'exercice 1.

   (a) Pour chacun des élèves, décrire les réussites et les erreurs éventuelles.

   (b) Quelle tâche, impliquant des fractions décimales, l'enseignant pourrait proposer à Miroslav, pour l'aider à corriger ses erreurs et renforcer sa compréhension de l'écriture décimale ?

2. Dans certains anciens manuels scolaires, on trouve des exercices du type :

   Range ces nombres par ordre croissant :

   7,32 – 7,35 – 12,42 – 7,57 – 12,05 – 7,01

   En s'appuyant sur la production de Miroslav ou de Célestine, expliquer en quoi cet exercice ne permet pas d'évaluer de façon fiable la compétence « Savoir comparer deux nombres décimaux ». Puis, proposer des modifications à l'exercice afin de le rendre plus pertinent.

3. Analyser les réussites et les erreurs de Célestine à l'exercice 2.