Épreuve de mathématiques CRPE 2019 groupe 2.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Remerciements à Mme Morval et M. Thouvenin pour leurs corrections.

I Première partie (13 points).

Partie A : surface de l'appentis et étude du volume utile.

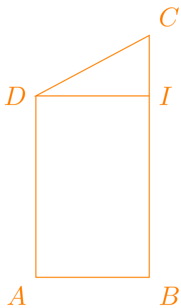
1. Calculons l'aire $\mathscr{A}(ABFE)$ de $ABFE$.

   Puisqu'il s'agit d'un rectangle

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABFE) &= AE \times AB \\ &= (4{,}8 \text{ m}) \times (1{,}5 \text{ m}) \\ &= 4{,}8 \times 1{,}5 \text{ m} \times \text{m} \\ &= 7{,}2 \text{ m}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ABFE) = 7{,}2 \text{ m}^2.}$$

2. (a) La situation présentée est en trois dimension mais pour résoudre cette question nous nous plaçons dans le plan (ABD).



Le schéma n'étant pas demandé il faut se contenter d'une esquisse sur un brouillon.

Calculons CD.

Par construction IDC est rectangle en I, donc, d'après le théorème de Pythagore
$$DI^2 + IC^2 = DC^2.$$

D'où, puisque $ABID$ est un rectangle et que $I \in [BC]$:

$$\begin{aligned} DC^2 &= DI^2 + IC^2 \\ &= AB^2 + (BC - IB)^2 \\ &= AB^2 + (BC - IB)^2 \\ &= AB^2 + (BC - AD)^2 \\ &= 1{,}5^2 + (3{,}2 - 2{,}4)^2 \\ &= 2{,}89 \end{aligned}$$

Puisque DC est une longueur c'est un nombre positif donc

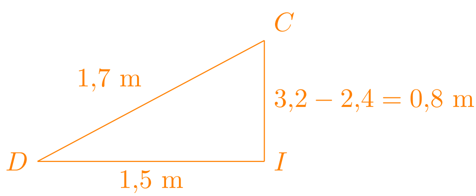
$$\begin{aligned} DC &= \sqrt{2{,}89} \\ &= 1{,}7 \end{aligned}$$

$$\boxed{CD = 1{,}7 \text{ m.}}$$

(b) Calculons l'aire $\mathscr{A}(CDHG)$ du rectangle $CDHG$.

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(CDHG) &= CD \times HD \\ &= CD \times AE \\ &= (1{,}7 \text{ m}) \times (4{,}8 \text{ m}) \\ &= 1{,}7 \times 4{,}8 \text{ m} \times \text{m} \\ &= 8{,}16 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

(c) En tenant compte des données de l'énoncé et de la question précédente nous savons que :



Calculons une mesure de l'angle $\widehat{CDI}$.

$$\cos\left(\widehat{CDI}\right) = \frac{DI}{DC} = \frac{1,5}{1,7}$$

Avec la calculatrice :

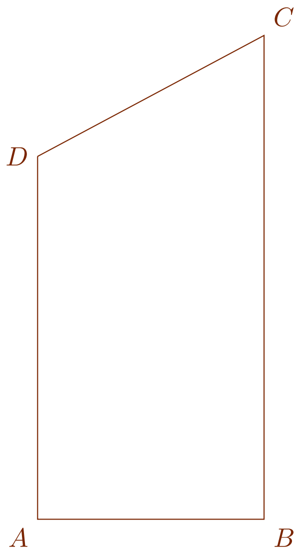
$$\widehat{CDI} \approx 28,07$$

$$\boxed{\widehat{CDI} \approx 28°.}$$

3. (a) Dessinons $ABCD$ à l'échelle $1/50$.

Longueur	Réelle	À l'échelle $1/50$.
AD	2,4 m	$\frac{1}{50} \times 2,4 \text{ m} = \frac{2,4}{50} \times 100 \text{ cm} = 4,8 \text{ cm}$
BC	3,2 m	$\frac{1}{50} \times 3,2 \text{ m} = \frac{3,2}{50} \times 100 \text{ cm} = 6,4 \text{ cm}$
AB	1,5 m	$\frac{1}{50} \times 1,5 \text{ m} = \frac{1,5}{50} \times 100 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$

Nous en déduisons la figure.



(b) Pour calculer l'aire du trapèze nous pourrions calculer les aires d'abord de ICD, puis de $ABID$, mais nous allons utiliser la formule de l'aire d'un trapèze.

Calculons l'aire $\mathscr{A}(ABCD)$ de $ABCD$.

Puisqu'il s'agit d'un trapèze :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= \frac{1}{2}(AD + BC) \times AB \\ &= \frac{1}{2}(2{,}4\text{ m} + 3{,}2\text{ m}) \times (1{,}5\text{ m}) \\ &= \frac{1}{2}(5{,}6\text{ m}) \times (1{,}5\text{ m}) \\ &= \frac{1}{2} \times 5{,}6 \times 1{,}5\text{ m} \times \text{m} \\ &= 4{,}2\text{ m}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ABCD) = 4{,}2\text{ m}^2.}$$

(c) Nous admettrons que la partie sous pente de l'abri peut également accueillir du bois.

Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ du prisme $ABCDEFGH$.

En utilisant la formule du volume d'un prisme

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= AE \times \mathscr{A}(ABCD)\\ &= (4{,}8 \text{ m}) \times (4{,}2 \text{ m}^2)\\ &= 4{,}8 \times 4{,}2 \text{ m} \times \text{m}^2\\ &= 20{,}16 \text{ m}^3\end{aligned}$$

Il aura assez de place pour stocker ces 15 stères de bois.

Partie B : réalisation de la dalle.

1. Déterminons le nombre de voyages nécessaires.

   * Calculons le volume du trou.
     Il s'agit d'un parallélépipède dont une base est $ABFE$ et la hauteur correspondante mesure 25 cm, donc son volume est

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \mathscr{A}(ABFE) \times (25 \text{ cm})\\ &= (7{,}2 \text{ m}^2) \times \left(25 \times \frac{1}{100} \text{ m}\right)\\ &= 7{,}2 \times 25 \times \frac{1}{100} \text{ m}^2 \times \text{m}\\ &= 1{,}8 \text{ m}^3\end{aligned}$$

   * Déterminons le volume de terre à transporter.
     Le volume de la terre augmente de 30 % (nous pouvons utiliser un coefficient multiplicateur) donc il égale

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_3 &= \left(1 + \frac{30}{100}\right) \times \mathscr{V}_2\\ &= 1{,}30 \times 1{,}8 \text{ m}^3\\ &= 2{,}34 \text{ m}^3\end{aligned}$$

* Déterminons le nombre de fois qu'il faudra remplir la remorque pour transporter toute la terre.
Procédons à la division

$$\begin{aligned}\frac{\mathscr{V}_3}{0{,}7\ \mathrm{m}^3} &= \frac{2{,}34\ \mathrm{m}^3}{0{,}7\ \mathrm{m}^3}\\ &= \frac{2{,}34}{0{,}7}\\ &\approx 3{,}34\end{aligned}$$

Il faudra donc remplir 3 fois à plein la remorque et 1 une fois partiellement.

Il devra effectuer 4 voyages.

2. (a) Calculons le prix pour l'achat de 8 m^3 de béton.

* Avec l'entrepreneur A.
Un mètre cube coûtant 98 euros, pour 8 mètre cube il faudra payer $8 \times 98 = 784$ euros.
Un camion pouvant contenir 7 m^3 et puisque $8 = 1 \times 7 + 1$ il faudra 2 livraisons, il faudra payer $2 \times 150 = 300$ euros de livraison.
Le montant total est donc de $784 + 300$ euros.

L'achat de 8 m^3 avec l'entrepreneur A coûte 1084 euros.

* Avec l'entrepreneur B.
Un mètre cube coûtant 75 euros, pour 8 mètre cube il faudra payer $8 \times 75 = 600$ euros.
Un camion pouvant contenir 7 m^3 et puisque $8 = 0 \times 10 + 8$ il faudra 1 livraison, il faudra payer $1 \times 240 = 240$ euros de livraison.
Le montant total est donc de 840 euros.

L'achat de 8 m^3 avec l'entrepreneur B coûte 840 euros.

(b) Identifions la courbe représentative de chacune des fonctions.

* Première méthode.

  Nous pouvons faire le raisonnement théorique suivant. S'il s'agit d'acheter du béton il faudra forcément au moins payer la livraison c'est à dire $f(0)$ et $g(0)$. Or $f(0) = 150$ et $g(0) = 240$.

  Par lecture graphique nous voyons que $f(0) = 150$ correspond à d_1.

  Le raisonnement précédent n'est correct qu'en apparence, car si l'on achète 0 m^3 de béton il n'y aura pas de livraison. Mais il y a là une fonction prolongeable par continuité.

* Seconde méthode.

  Notons $x \in]0; 5{,}5]$ la quantité de béton commandée en mètre cube.

  Puisque $x < 7$ dans les deux cas il suffira d'un camion pour livrer le béton et en tenant compte du prix au mètre cube nous obtenons

$$\begin{cases} f(x) = 98x + 150 \\ g(x) = 75x + 240 \end{cases}$$

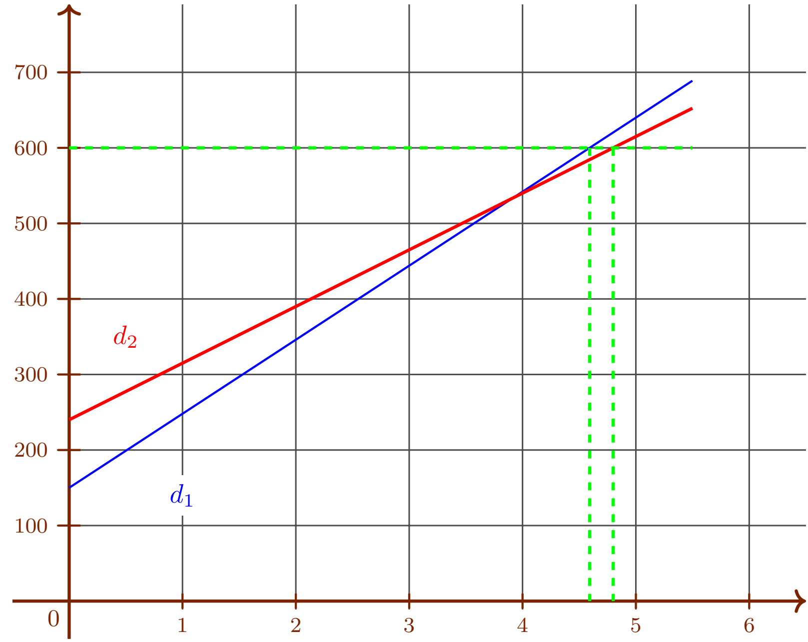
  En particulier pour un mètre cube

$$\begin{cases} f(1) = 248 \\ g(1) = 315 \end{cases}$$

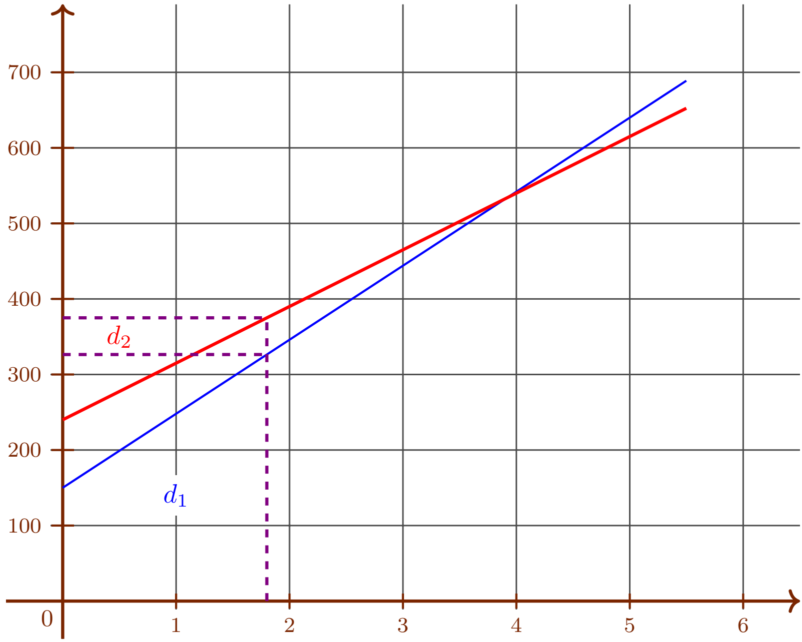
  Ainsi $f(1) < g(1)$ et d_1 est donc la courbe représentative de f.

d_1 est la courbe représentative de f et d_2 celle de g.

(c)



Avec 600 euros il est possible de commander 4,5 mètre cube avec l'entrepreneur A et 4,8 avec le B.



(d)

> Le propriétaire choisira l'entrepreneur A.

Calculons le coût de la dalle.

$$\begin{aligned} f(1{,}8) &= 98 * 1{,}8 + 150 \\ &= 326{,}4 \end{aligned}$$

> La dalle coûtera 326,4 euros.

(e) On souhaite savoir pour quelle quantité $x \in]0; 5{,}5]$, le coût $f(x)$ reste inférieur à $g(x)$.

Résolvons l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ pour $x \in]0; 7]$.

Soit $x \in]0; 7]$.

$$f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow 98x + 150 \leqslant 75x + 240$$

Il s'agit d'une équation linéaire du premier degré, nous la résolvons en isolant l'inconnue.

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant g(x) &\Leftrightarrow 98x + 150 - 150 \leqslant 75x + 240 - 150 \\ &\Leftrightarrow 98x \leqslant 75x + 90 \\ &\Leftrightarrow 98x - 75x \leqslant 75x + 90 - 75x \\ &\Leftrightarrow (98 - 75)x \leqslant 90 \\ &\Leftrightarrow 23x \leqslant 90 \\ &\Leftrightarrow \frac{23x}{23} \leqslant \frac{90}{23} \\ &\Leftrightarrow x \leqslant \frac{90}{23} \end{aligned}$$

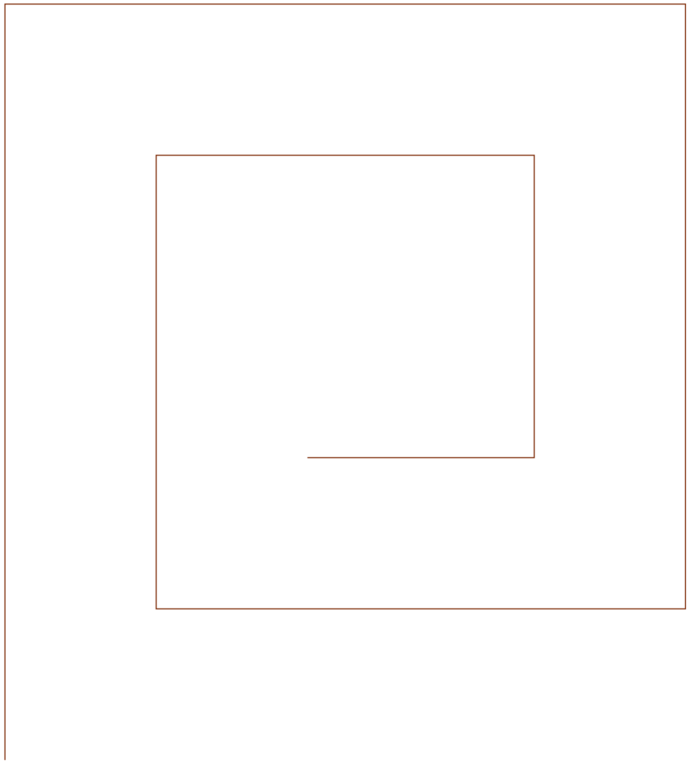
Comme $\frac{90}{23} \approx 3{,}9130$

il est préférable de changer d 'entrepreneur à partir de 3,9 m^3.

La valeur approchée est ici l'arrondi, c'est-à-dire la valeur approchée par excès, mais l'énoncé laisse libre de choisir une valeur approchée par défaut.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

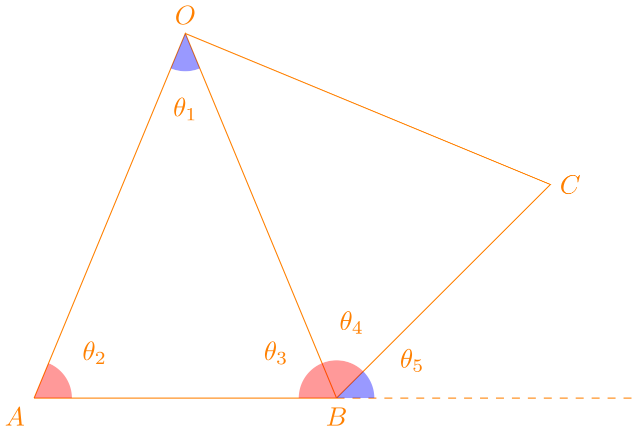
1. 

2. Si on supprime la ligne 6 du programme la variable *longueur* n'est plus incrémentée de 10 à chaque itération de la boucle.

   La figure dessinée est alors un carré.

3. 

Une illustration pour expliquer l'angle. Notons O le centre de l'octogone et A, B et C trois sommets consécutifs.



Remarquons que par construction $\theta_2 = \theta_3 = \theta_4$ et $\theta_1 = \frac{360}{8} = 45°$.
On en déduit (somme des mesures des angles du triangle) que $\theta_2 = 67{,}5°$.
Et on en déduit enfin $\theta_5 = 45°$.

Exercice 2.

1. Déterminons la vitesse retenue.

   Puisque la vitesse moyenne calculée par l'ordinateur est supérieure à 100 km/h, d'après le document 3, la vitesse est diminuée de 5 %.
   En utilisant un coefficient multiplicateur, nous trouvons la vitesse retenue :

$$\begin{aligned} v_{r1} &= \left(1 + \frac{t}{100}\right) v_{m1} \\ &= \left(1 + \frac{-5}{100}\right) \times 123 \\ &= 116{,}85 \end{aligned}$$

La vitesse retenue est de 116,85 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

2. Calculons la vitesse retenue v_{r2}.

   Puisqu'il a mis 4 mn à parcourir les 5,1 km séparant les points d'enregistrement sa vitesse moyenne fut de

$$\begin{aligned} v_{m2} &= \frac{5{,}1 \text{ km}}{4 \text{ mn}} \\ &= \frac{5{,}1 \text{ km}}{4 \cdot \frac{1}{60} \text{ h}} \\ &= \frac{5{,}1}{4 \cdot \frac{1}{60}} \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= 76{,}5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \end{aligned}$$

   La vitesse moyenne étant inférieure à $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, d'après le document 3 la vitesse retenue est

$$\begin{aligned} v_{r2} &= 76{,}5 - 5 \\ &= 71{,}5 \end{aligned}$$

   La vitesse retenue sera de $71{,}5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

3. Retrouvons la vitesse moyenne.

   Cette situation correspond à l'utilisation d'un coefficient multiplicateur réciproque. Nous allons résoudre la question en procédant naïvement à la résolution d'une équation.

   Comme nous l'avons déjà remarqué :

$$v_{r3} = 0{,}95 v_{m3}$$

   C qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 114 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} &= 0{,}95 v_{m3} \\ \frac{114 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}{0{,}95} &= \frac{0{,}95 v_{m3}}{0{,}95} \\ \frac{114}{0{,}95} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} &= v_{m3} \end{aligned}$$

Donc : $v_{m3} = 120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

La vitesse moyenne calculée était de $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

4. Déterminons la vitesse retenue v_{r4}.

* Déterminons la durée du trajet.

$$\begin{aligned} d_4 &= (9 \text{ h} + 22 \text{ min} + 07 \text{ s}) - (9 \text{ h} + 17 \text{ min} + 56 \text{ s}) \\ &= (22 \text{ min} + 07 \text{ s}) - (17 \text{ min} + 56 \text{ s}) \\ &= (22 \times 60 \text{ s} + 07 \text{ s}) - (17 \times 60 \text{ s} + 56 \text{ s}) \\ &= (1327 \text{ s}) - (1076 \text{ s}) \\ &= 251 \text{ s} \end{aligned}$$

En procédant à une division euclidienne par 60 s :

$$\begin{aligned} d_4 &= 4 \times 60 + 11 \text{ s} \\ &= 4 \text{ mn} + 11 \text{ s} \end{aligned}$$

Nous aurions pu trouver plus simplement la réponse en raisonnant comme le commerçant qui rend la monnaie, en rajoutant la monnaie au prix à payer jusqu'à obtenir le montant donné par le client.

$$\begin{aligned} 9 \text{ h} + 17 \text{ min} + 56 \text{ s} + 4 \text{ s} &= 9 \text{ h} + 18 \text{ min} \\ 9 \text{ h} + 18 \text{ min} + 4 \text{ mn} &= 9\text{h} + 22 \text{ mn} \\ 9\text{h} + 22 \text{ mn} + +7 \text{ s} &= 9 \text{ h} + 22 \text{ min} + 07 \text{ s} \end{aligned}$$

Il a fallu ajouter $4 \text{ s} + 4\text{mn} + 7 \text{ s} = 4 \text{ mn} + 11\text{s}$ à l'heure initiale pour obtenir l'heure finale.

* Déterminons la vitesse moyenne.

$$\begin{aligned}
v_{m4} &= \frac{5{,}1\ \text{km}}{4\text{mn} + 11\text{s}} \\
&= \frac{5{,}1\ \text{km}}{4 \times 60\text{s} + 11\text{s}} \\
&= \frac{5{,}1\ \text{km}}{251\ \text{s}} \\
&= \frac{5{,}1\ \text{km}}{251 \cdot \frac{1}{3600}\ \text{h}} \\
&= \frac{5{,}1}{251 \cdot \frac{1}{3600}}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \\
&\approx 73{,}1474\ldots
\end{aligned}$$

* Déterminons la vitesse retenue.

$$\begin{aligned}
v_{r4} &= v_{m4} - 5 \\
&\approx 68{,}1474\ldots
\end{aligned}$$

La vitesse retenue n'excédant pas 70 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$

dans ce cas le conducteur ne sera pas sanctionné par une contravention.

Exercice 3.

Calculons la masse d'un cube en fer.

* Déterminons le volume, $\mathscr{V}_{Fe}$, d'un cube de fer.

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_{Fe} &= (5\ \text{cm})^3 \\
&= \left(5 \times \frac{1}{100}\ \text{m}\right)^3 \\
&= \left(\frac{5}{100}\right)^3\ \text{m}^3 \\
&= 0{,}000\,125\ \text{m}^3
\end{aligned}$$

* Déterminons la masse, m_{Fe}, d'un cube de fer.
  En notant ρ_{Fe} la masse volumique du fer :

$$\begin{aligned} m_{Fe} &= \mathscr{V}_{Fe}\rho_{Fe} \\ &= (0{,}000\,125\ \mathrm{m}^3) \times (7860\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}) \\ &= 0{,}000\,125 \times 7\,860\ \mathrm{m}^3 \times \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3} \\ &= 0{,}982\,5\ \mathrm{kg} \end{aligned}$$

Le cube choisi n'est donc pas en fer.

$$\boxed{\text{Le cube choisi est en nickel.}}$$

Exercice 4.

1. Déterminons la médiane Me.

   Il n'est pas possible à partir du diagramme en barres de déterminer directement la médiane. Nous faisons le choix de présenter la série en regroupant par modalités les valeurs (et donc en considérant les effectifs) sous forme d'un tableau.

Âges	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Effectifs	1	4	7	4	4	8	16	10	6
E.C.C.	1	5	12	16	20	28	44	54	60

   * La série des modalités (âges) est rangée dans l'ordre croissant.
   * Position de la médiane dans les effectifs. $\frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$. La série étant paire la médiane est entre trentième et la trente-et-unième valeur.
   * Calcul de la médiane. D'après les effectifs cumulés croissants (E.C.C.) $Me = \frac{20+20}{2}$.

$$\boxed{Me = 20\ \text{ans.}}$$

2. Nous faisons le choix d'interpréter la question comme nous le ferions dans le langage courant par strictement inférieur à 18 ans.

   Calculons la proportion de membres de moins de 18 ans.

D'après la ligne des E.C.C. il y a 16 personnes qui ont strictement moins que 18 ans. Et puisqu'il y a 60 personne au total cela représente une proportion p de :

$$\begin{aligned} p &= \frac{16}{60} \\ &= 0.2666\dots \end{aligned}$$

Nous en déduisons le pourcentage

> 27 % des membres ont moins de 18 ans.

3. (a) Commençons par choisir un modèle probabiliste. Soit Ω l'ensemble de tous les membres du club l'univers de notre expérience. Il semble naturel de choisir la loi uniforme (équiprobabilité) dans cette situation chaque membre ayant de chance qu'un autre d'être choisi.
   Notons A l'événement « le gagnant a 22 ans ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   Il y a donc équiprobabilité, A est réalisé par 6 issues (6 membres ont 22 ans) et l'univers comporte 60 issues (il y a 60 membres dans le club), donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \frac{6}{60} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

   > La probabilité qu'un membre de 22 ans soit choisi est 0,1.

   (b) Notons B l'événement « le gagnant a au moins 18 ans ».

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

   Il y a équiprobabilité, B est réalisé par $4 + 8 + 16 + 10 + 6 = 34$ issues (34 membres ont au moins 18 ans) et l'univers comporte 60 issues (il y a 60 membres dans le club), donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{34}{60}\\ &= \frac{17}{30}\end{aligned}$$

La probabilité qu'un membre d'au moins 18 ans soit choisi est $\frac{17}{30}$.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3.

Situation 2.

1.
2.
3.
4.

Situation 3.

1.
2.
3.