Épreuve de mathématiques CRPE 2019 groupe 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Un grand merci à M. Vergès, Mme Sillet et Mme Duplessy pour les corrections apportées.

I Première partie (13 points).

Partie A : situation des trois carrés.

1. Comparons les aires grises et blanches.

   Il s'agit de carrés donc l'aire en blanc est

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_b &= 5^2\\ &= 25\end{aligned}$$

   et l'air en gris est

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_g &= 3^2 + 4^2\\ &= 25\end{aligned}$$

   L'aire grisée égale l'aire blanche.

2. Démontrons que ABC est rectangle en A.

   Nous avons démontré à la question précédente que

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

   Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore

   ABC est rectangle en A.

3. Démontrons que MN est décimal.

MNP est rectangle en P donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} MN^2 &= MP^2 + PN^2 \\ &= (3+4+5)^2 + 5^2 \\ &= 169 \end{aligned}$$

MN étant une longueur c'est un nombre positif et donc la valeur possible est $MN = \sqrt{169} = 13$.

MN est donc un entier naturel et *a fortiori*

$$\boxed{MN \text{ est un nombre décimal.}}$$

Démontrons que IJ est un nombre décimal.

- Les points M, I, J d'une part et M, J, P d'autre part sont alignés dans cet ordre. Nous avons donc un configuration de Thalès.
- De plus la figure est constituée de carrés donc $(IJ) \parallel (NP)$.

Nous déduisons des points précédents, et grâce au théorème de Thalès, que :

$$\frac{IJ}{NP} = \frac{MJ}{MP}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} IJ &= NP \cdot \frac{MJ}{MP} \\ &= 5 \cdot \frac{3}{3+4+5} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Nous pouvons déjà affirmer qu'il s'agit bien d'un nombre décimal car le dénominateur est un produit de puissances de 2 et de 5 : $4 = 2^2 \times 5^0$.

Il est également possible de remarquer que : $\frac{5}{4} = \frac{125}{100}$ qui est bien une fraction décimale.

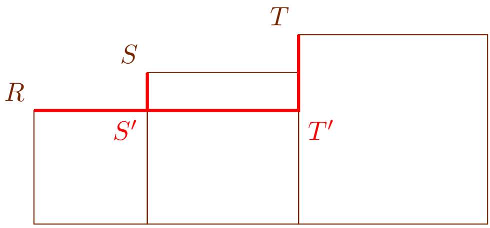
C'est une troisième méthode que nous retiendrons ici.

Puisque $\frac{5}{4} = 1{,}125$

IJ est un nombre décimal.

4. Démontrons que les points ne sont pas alignés en raisonnant par l'absurde.

Commençons par l'hypothèse qui conduira à une contradiction.
Supposons que R, S et T sont alignés et démontrons que cela conduit à une contradiction.



- Les points R, S', T' d'une part et R, S, T d'autre part sont alignés dans cet ordre. Nous avons donc un configuration de Thalès.
- De plus $(SS') \parallel (TT')$.

Nous déduisons des points précédents, et grâce au théorème de Thalès, que :

$$\frac{SS'}{TT'} = \frac{RS'}{RT'}.$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\frac{4-3}{5-3} = \frac{3}{3+4}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{3}{7}$$

Pour que ce soit parfaitement clair nous pouvons même faire un produit en croix :

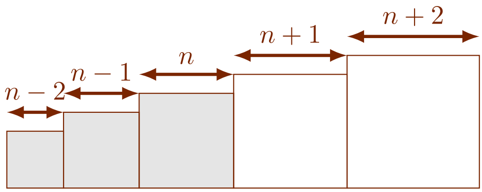
$$7 = 6$$

Ce qui est impossible. Autrement dit l'hypothèse que les points sont alignés est fausse.

Les points R, S et T ne sont pas alignés.

Partie B : situation des cinq carrés.

1. Mettons le problème en équation.



Si n désigne la longueur du côté du carré central, $n-2$ et $n-1$ sont celles des côtés des deux autre carrés gris. Donc l'aire grisée est

$$\begin{aligned}&(n-2)^2+(n-1)^2+n^2\\&=(n^2-2\times n\times 2+2^2)+(n^2-2\times n\times 1+1^2)+n^2\\&=n^2-4n+4+n^2-2n+1+n^2\\&=3n^2-6n+5\end{aligned}$$

Nous avons développé, ordonné et réduit car l'expression que nous recherchons l'est.
De la même façon l'aire de la partie blanche est

$$\begin{aligned}&(n+1)^2+(n+2)^2\\&=n^2+2n+1+n^2+4n+4\\&=2n^2+6n+5\end{aligned}$$

Ainsi nous cherchons n tel que

$$3n^2-6n+5=2n^2+6n+5$$

Cette dernière égalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned}3n^2-6n+5-(3n^2+6n+5)&=0\\3n^2-6n+5-2n^2-6n-5&=0\end{aligned}$$

Et en ordonnant puis en réduisant :

$$n^2-12n=0$$

Ainsi résoudre le problème revient à résoudre l'équation $n^1 - 12n = 0$ dans l'ensemble des entiers naturels plus grands que 2 (cf. *infra*).

2. Résolvons l'équation $n^2 - 12n = 0$.

   Il s'agit d'une équation polynomiale de degré deux, nous pourrions donc sortir la lourde artillerie du discriminant mais nous allons ici plus simplement nous ramener à une équation produit en factorisant directement.

   Soit $n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} n^2 - 12n = 0 &\Leftrightarrow n(n-12) = 0 \\ &\Leftrightarrow n = 0 \quad \text{ou} \quad n - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = 0 \quad \text{ou} \quad n = 12 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions réelles de l'équation $n^2 - 12n = 0$ est $\mathscr{S}_1 = \{0; 12\}$.

3. Si $n = 0$ alors le premier carré aurait un côté de longueur $n - 2 = -2$ ce qui n'a pas de sens.

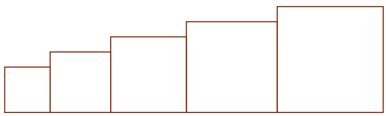
La seule solution que l'on peut retenir pour la « situation des cinq carrés » est $n = 12$.

4. Dessinons une figure à l'échelle $\frac{1}{5}$ d'une solution.

   Déterminons les longueurs des côtés à l'échelle :

Carré	Longueur d'un côté	Longueur, en centimètre, à l'échelle $\frac{1}{5}$
1	$12-2=10$	$\dfrac{10}{5}=2$
2	$12-1=11$	$\dfrac{11}{5}=2{,}2$
3	12	$\dfrac{12}{5}=2{,}4$
4	$12+1=13$	$\dfrac{13}{5}=2{,}6$
5	$12+2=14$	$\dfrac{14}{5}=2{,}8$

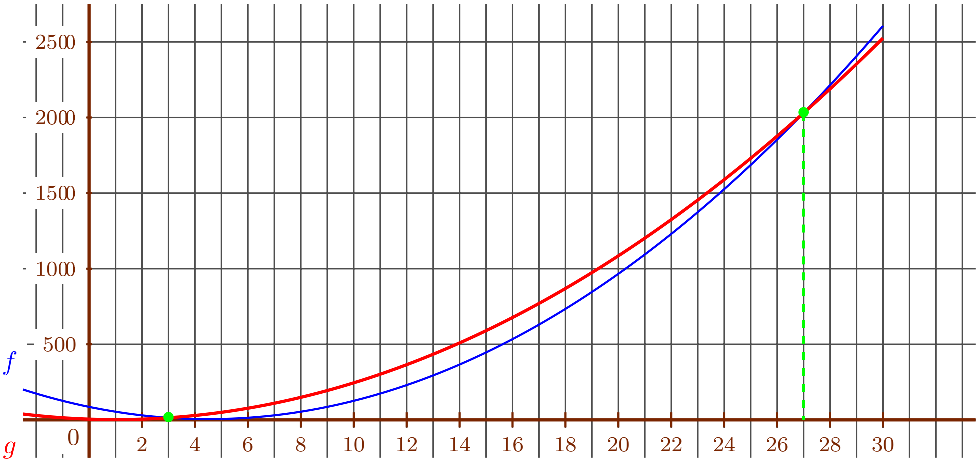
D'où le dessin à l'échelle $\frac{1}{5}$:



Partie C : situation des sept carrés.

1. Résolvons le problème par lecture graphique.

   Nous voulons que les aires grises et blanches s'égalent. Autrement dit nous aimerions que $f(x)=g(x)$. Nous obtiendrons la réponse graphiquement en recherchant les points d'intersection des courbes représentatives de f et de g et en lisant leurs abscisses.



Il y a semble-t-il deux solutions possible à savoir 3 et 27.

2. Vérifions si les solutions trouvées conviennent.

- Si $x = 3$ alors, puisque x désigne la longueur du côté du plus grand carré, le plus petit a un côté de longueur $x - 6 = 3 - 6 = -3$. Cela n'a pas de sens. La réponse $x = 3$ est donc exclue.
- Si $x = 27$ alors tout d'abord il n'y a pas d'incohérence pour les longueurs des autres carrés.
  Vérifions qu'il s'agit bien d'une solution.
  D'une part :

$$\begin{aligned} f(27) &= 4 \times 27^2 - 36 \times 27 + 86 \\ &= 2030 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} g(27) &= 3 \times 27^2 - 6 \times 27 + 5 \\ &= 2030 \end{aligned}$$

donc $f(27) = g(27)$. Autrement dit les deux aires sont bien égales et 27 est effectivement une solution.

Seule la solution $x = 27$ convient.

Partie D : situation des quatre carrés.

1. Déterminons quelle feuille correspond à quel ca.

   Considérons la feuille de calcul A.

   Nous remarquons, dans la ligne 2, que la somme des aires du premier et du quatrième carré $(1 + 16)$ égale l'aire de la partie blanche.

   Par contre l'aire du quatrième carré seule n'égale pas l'aire de la partie blanche.

   Cette feuille ne peut donc correspondre que au cas 1.

   La feuille A correspond au cas 1 tandis que la feuille B correspond au cas 2.

2. (a) La formule entrée en E2 peut être :

   $= (\texttt{A2} + 3) \wedge 2$

   (b) La formule entrée en F2 peut être :

   $= \texttt{B2} + \texttt{E2}$

3. • Pour le cas 1 (feuille de calcul A).
   Il semble que la différence de l'aire de la partie grise et de la partie blanche soit toujours de 4. Elles ne peuvent donc jamais être égales.

   • Pour le cas 2 (feuille de calcul B).
   Il semble que, hormis dans la ligne 2, l'aire de la partie grise est toujours plus petite que l'aire de la partie blanche.

   Les feuilles de calcul permettent de conjecturer qu'aucun des deux problèmes n'a de solution.

4. Démontrons la conjecture dans le cas 1.

En raisonnant comme dans les parties antérieures nous établirions que le résoudre le problème revient à résoudre l'équation

$$n^2+(n+3)^2-\left[(n+1)^2+(n+2)^2\right]=0.$$

Or $n^2+(n+3)^2-\left[(n+1)^2+(n+2)^2\right]=4$, donc l'équation n'admet pas de solutions

Le problème n'admet pas de solution dans le cas 1.

Démontrons la conjecture dans le cas 2.

Comme précédemment calculons la différence des deux aires :

$$\begin{aligned}(n+3)^2-\left[n^2+(n+1)^2+(n+2)^2\right]&=n^2+6n+9-\left[3n^2+6n+5\right]\\&=-2n^2+4\end{aligned}$$

Il nous faut donc résoudre l'équation trinôme : $-2n^2+4=0$.
Nous reconnaissons une expression polynomiale de degré deux ax^2+bx+c avec $a=-2$, $b=0$ et $c=4$.
Il y a ici une factorisation immédiate :

$$\begin{aligned}-2n^2+4&=-2_{(}n^2-2)\\&=-2\left(n^2-\sqrt{2}^2\right)\\&=-2\left(n+\sqrt{2}\right)\left(n-\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

Une autre façon de trouver les racines, bien plus lourde, en utilisant le discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac\\&=0^2-4\times(-2)\times 4\\&=32\end{aligned}$$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\&=\frac{-0-\sqrt{32}}{2\times(-2)}\\&=-\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2&=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\&=\frac{-0+\sqrt{32}}{2\times(-2)}\\&=\sqrt{2}\end{aligned}$$

L'une de ces racines est strictement négative, ce qui l'exclue. Aucune des deux solutions ne convient puisqu'il ne s'agit pas de nombres entiers, mais d'irrationnels ($\sqrt{2}$ est classiquement irrationnel).

Le problème n'admet pas de solution dans le cas 2.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Il s'agit ici d'un calcul de moyenne de moyennes. Nous allons utiliser deux méthodes différentes pour calculer les moyennes dans ce cas.

   Calculons le pourcentage d'appareils défectueux de la société 1.

   Nous voulons calculer la moyenne de la série statistique suivante :

Valeurs	5	2
Effectif	2000	7000

   Nous utilisons donc la formule de la moyenne pondérée :

$$\begin{aligned} \overline{x}_{\text{société 1}} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{2000 \times 5 + 7000 \times 2}{2000 + 7000} \\ &= 2{,}666\ldots \end{aligned}$$

   2,67 % des appareils de la société 1 sont défectueux.

   Calculons le pourcentage d'appareils défectueux de la société 2.

   3 % des 6000 tablettes Electrix correspond à un nombre de tablettes de

$$\frac{3}{100} \times 6000 = 180.$$

   2 % des 1000 tablettes Tronix correspond à un nombre de tablettes de

$$\frac{2}{100} \times 1000 = 20.$$

Ainsi la société 2 produit $180 + 20 = 200$ tablettes défectueuse sur un total de $6000 + 1000 = 7000$ tablettes. La proportion moyenne de tablettes défectueuses de la société 2 est donc

$$\begin{aligned}\overline{x}_{\text{société 2}} &= \frac{200}{7000}\\ &= \frac{1}{35}\\ &\approx 0{,}02857\end{aligned}$$

2,86 % des appareils de la société 2 sont défectueux.

L'affirmation 1 est donc vraie.

2. Démontrons que l'aire d'un cube n'est pas proportionnel à son volume en exhibant un contre-exemple.

- Considérons un cube de longueur d'arête 1. Alors son volume est $1^3 = 1$ et son aire est $6 \times 1^2 = 6$. Donc le rapport de du volume par l'aire est de $\frac{1}{6}$.
- Considérons un cube de longueur d'arête 2. Alors son volume est $2^3 = 8$ et son aire est $6 \times 2^2 = 24$. Donc le rapport de du volume par l'aire est de $\frac{8}{24} = \frac{2}{6}$.

Le rapport n'est pas le même donc il n'y a pas proportionnalité entre l'aire et le volume.

L'affirmation 2 est fausse.

Il était également possible de vérifier que, avec les mêmes cas particuliers, le tableau

1	6
2	24

n'est pas un tableau de proportionnalité. Par exemple en utilisant le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 24 \end{vmatrix} = 1 \times 24 - 2 \times 6 = 12 \neq 0,$$

ou un produit en croix ou autres.

3. Calculons le volume d'eau nécessaire pour le potager.

   Le potager faisant 5 m^2 et puisqu'il faut 15 L par m^2, pour l'arroser (une fois) il faut

$$\begin{aligned} 5 \times 15 \text{ L} &= 275 \text{ L} \\ &= 75 \text{ dm}^3 \\ &= 75\ 1 \text{ dm}^3 \\ &= 75\ \frac{1}{1000}\ \text{m}^3 \\ &= 0{,}075 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

   Et donc pour arroser 4 fois le potager il faut

$$4 \times 0{,}075 \text{ m}^3 = 0{,}3 \text{ m}^3$$

   L'affirmation 3 est vraie.

4. Calculons la partie décimale de A.

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(7 + \frac{2}{10}\right)^2 \\ &= 7^2 + 2 \times 7 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{2}{10}\right)^2 \\ &= 49 + \frac{28}{10} + \frac{4}{100} \\ &= 49 + 2 + \frac{8}{10} + \frac{4}{100} \\ &= 51 + \frac{8}{10} + \frac{4}{100} \end{aligned}$$

   La partie décimale de A^2 est donc $\frac{8}{10} + \frac{4}{100}$.

   L'affirmation 4 est fausse.

Exercice 2.

1. (a) Le 6 a été obtenu $200 - (30 + 41 + 32 + 28 + 31) = 38$.

   Le 6 été obtenu 38 fois.

   (b) Calculons la fréquence d'apparition du 1.

   Le 1 est apparu 30 fois sur un total de 200 lancés donc la fréquence correspondante est $\frac{30}{200} = 0{,}15$.

   Le 1 est apparu dans 15 % des lancés.

2. (a) Notons A l'événement « obtenir deux nombres dont le produit égale 9 ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   Nous pouvons modéliser cette expérience avec un tableau double entrées qui croise les résultats obtenus sur chaque dé. Dans le tableau sont indiqués les produits correspondants.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

   Les dés étant équilibrés nous pouvons choisir de modéliser en utilisant l'équiprobabilité : chacun des 36 couples de résultats des dés à la même probabilité d'être obtenu.
   Puisque le produit 9 n'est obtenu qu'une fois (comme produit de 3 et de 3) nous en déduisons

   $$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{36}.$$

   (b) Notons B l'événement « obtenir un produit égale à 12.

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

   En utilisant la même modélisation qu'à la question précédente nous voyons que

   $$B = \{(2;6),\ (3;4),\ (4;3),\ (6;2)\}.$$

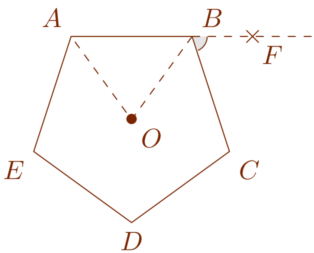
Ainsi B est réalisé par 4 issues dans un univers comportant 36 issues et dont la loi et l'équiprobabilité, par conséquent : $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{36}$ ou

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{1}{9}.}$$

Exercice 3.

1. Le programme A trace un carré et le programme B un triangle équilatéral.

2. (a) Calculons une mesure de l'angle $\widehat{FBC}$.



Le pentagone étant régulier les angles $\widehat{BOA}$, $\widehat{AOE}$, $\widehat{EOD}$, $\widehat{EOD}$, $\widehat{DOC}$ et $\widehat{COB}$ ont tous même mesure à savoir, en degré : $\frac{360}{5} = 72°$.

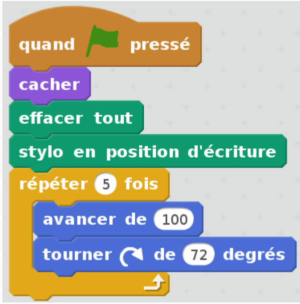
Par construction OAB est isocèle en O et donc $\widehat{OBA} = \frac{180-72}{2} = 54°$.

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\widehat{CBA} &= \widehat{CBO} + \widehat{OBA}\\ &= 54 + 54\\ &= 108\end{aligned}$$

Enfin les angles $\widehat{CBO}$ et $\widehat{CBF}$ étant complémentaires $\widehat{CBF} = 180 - 108$. D'où

$$\boxed{\widehat{CBF} = 72°.}$$

(b) 

3. * Le programme 1 ne fonctionne pas car il trace toujours 10 côtés sans prendre en compte le choix de l'utilisateur.
   * Le programme 3 e fonctionne pas puisque l'angle de rotation ne dépend pas du nombre de côtés choisi.
   * Le programme 4 ne fonctionne pas puisque la rotation l'énoncé nous indique que l'angle doit être égale à 360 divisé par le nombre de côtés de ce polygone (et non pas 180).

   Le programme 2 permet de tracer un polygone régulier dont l'utilisateur choisi le nombre de côtés.

4. En choisissant un très grand nombre de côtés nous aurons l'illusion de voir un cercle.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3.
4.

Situation 2.

1.
2.

Situation 3.

1.

2.

3.

4.