Épreuve de mathématiques CRPE 2019 groupe 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Un grand merci à M. Vergès pour ses corrections.

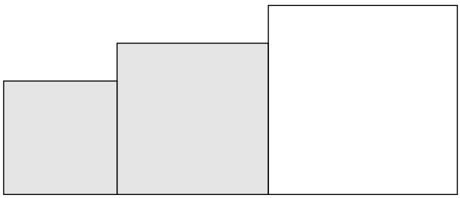
Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Dans cette partie, les figures qui sont représentées dans l'énoncé ne sont pas dessinées à l'échelle.

Partie A : situation des trois carrés.

La figure ci-dessous représente trois carrés dont les mesures des côtés, en centimètre, sont respectivement 3 cm, 4 cm et 5 cm. Les deux plus petits carrés sont gris, le troisième est blanc.



1. Vérifier que la somme des aires des deux carrés gris est égale à l'aire du carré blanc.

   Comparons les aires grises et blanches.

   Il s'agit de carrés donc l'aire en blanc est

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_b &= 5^2\\ &= 25\end{aligned}$$

   et l'air en gris est

$$\mathcal{A}_g = 3^2 + 4^2$$
$$= 25$$

L'aire grisée égale l'aire blanche.

2. Claudine affirme : « Si on dispose les trois carrés obtenus à la question précédente comme sur la figure 1 ci-dessous alors le triangle ABC est un triangle rectangle. »

   L'affirmation de Claude est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

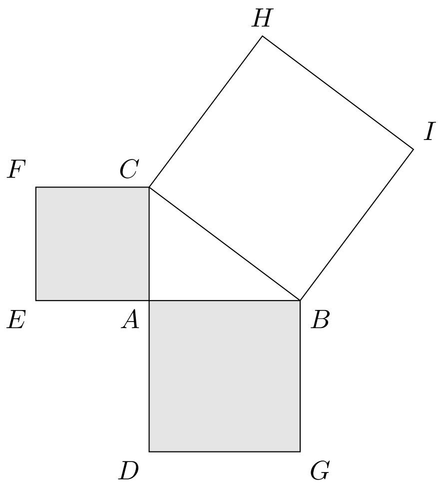


Figure 1

Démontrons que ABC est rectangle en A.

Nous avons démontré à la question précédente que

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore

ABC est rectangle en A.

3. Avec les mêmes carrés, Dominique affirme : « Sur la figure 2 ci-dessous, les longueurs exactes, en centimètre, des segments $[MN]$ et $[IJ]$ sont des nombres décimaux ».
L'affirmation de Dominique est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

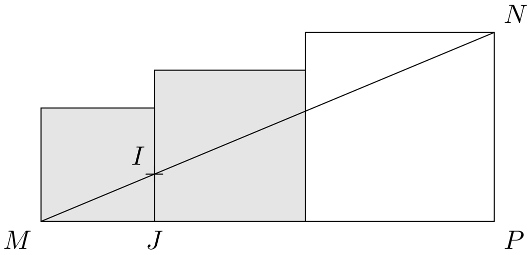


Figure 2

Démontrons que MN est décimal.

MNP est rectangle en P donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} MN^2 &= MP^2 + PN^2 \\ &= (3+4+5)^2 + 5^2 \\ &= 169 \end{aligned}$$

MN étant une longueur c'est un nombre positif et donc la valeur possible est $MN = \sqrt{169} = 13$.
MN est donc un entier naturel et *a fortiori*

$$\boxed{MN \text{ est un nombre décimal.}}$$

Démontrons que IJ est un nombre décimal.

- Les points M, I, J d'une part et M, J, P d'autre part sont alignés dans cet ordre. Nous avons donc un configuration de Thalès.
- De plus la figure est constituée de carrés donc $(IJ) \parallel (NP)$.

Nous déduisons des points précédents, et grâce au théorème de Thalès, que :

$$\frac{IJ}{NP} = \frac{MJ}{MP}.$$

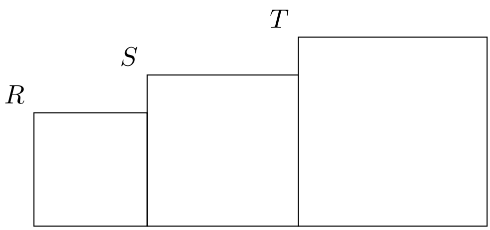
D'où :

$$\begin{aligned} IJ &= NP \cdot \frac{MJ}{MP} \\ &= 5 \cdot \frac{3}{3+4+5} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Nous pouvons déjà affirmer qu'il s'agit bien d'un nombre décimal car le dénominateur est un produit de puissances de 2 et de 5 : $4 = 2^2 \times 5^0$.
Il est également possible de remarquer que : $\frac{5}{4} = \frac{125}{100}$ qui est bien une fraction décimale.
C'est une troisième méthode que nous retiendrons ici.
Puisque $\frac{5}{4} = 1{,}125$

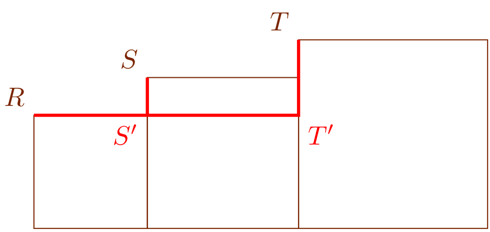
IJ est un nombre décimal.

4. Avec les mêmes carrés, Camille affirme : « Sur la figure 3 ci-dessous, Les points R, S et T sont alignés. »
L'affirmation de Camille est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.



Démontrons que les points ne sont pas alignés en raisonnant par l'absurde.

Commençons par l'hypothèse qui conduira à une contradiction.
Supposons que R, S et T sont alignés et démontrons que cela conduit à une contradiction.



- Les points R, S', T' d'une part et R, S, T d'autre part sont alignés dans cet ordre. Nous avons donc un configuration de Thalès.
- De plus $(SS') \parallel (TT')$.

Nous déduisons des points précédents, et grâce au théorème de Thalès, que :

$$\frac{SS'}{TT'} = \frac{RS'}{RT'}.$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\frac{4-3}{5-3} = \frac{3}{3+4}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{3}{7}$$

Pour que ce soit parfaitement clair nous pouvons même faire un produit en croix :

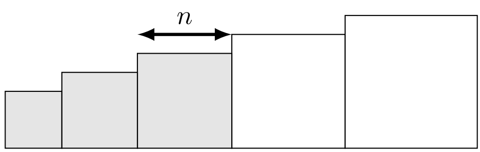
$$7 = 6$$

Ce qui est impossible. Autrement dit l'hypothèse que les points sont alignés est fausse.

$\boxed{\text{Les points } R, S \text{ et } T \text{ ne sont pas alignés.}}$

Partie B : situation des cinq carrés.

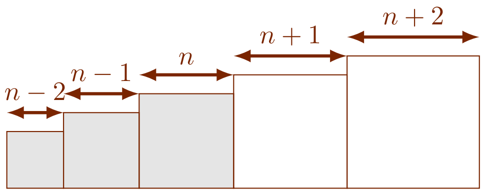
La figure ci-dessous qui n'est pas à l'échelle représente cinq carrés dont les mesures des côtés, en centimètre, sont des nombres entiers consécutifs. les trois plus petits carrés sont gris, les deux autres sont blancs.



On désigne par n la mesure, exprimée en centimètres, du côté du carré gris le plus grand (carré du milieu). L'objectif de cette partie est de chercher les valeurs de n pour lesquelles la somme des aires des trois carrés gris est égale à la somme des aires des deux carrés blancs.

1. Montrer que résoudre ce problème revient à résoudre l'équation $n^2 - 12n = 0$.

Mettons le problème en équation.



Si n désigne la longueur du côté du carré central, $n-2$ et $n-1$ sont celles des côtés des deux autre carrés gris. Donc l'aire grisée est

$$\begin{aligned}
&(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 \\
&= (n^2 - 2 \times n \times 2 + 2^2) + (n^2 - 2 \times n \times 1 + 1^2) + n^2 \\
&= n^2 - 4n + 4 + n^2 - 2n + 1 + n^2 \\
&= 3n^2 - 6n + 5
\end{aligned}$$

Nous avons développé, ordonné et réduit car l'expression que nous recherchons l'est.
De la même façon l'aire de la partie blanche est

$$\begin{aligned}
&(n+1)^2 + (n+2)^2 \\
&= n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 \\
&= 2n^2 + 6n + 5
\end{aligned}$$

Ainsi nous cherchons n tel que

$$3n^2 - 6n + 5 = 2n^2 + 6n + 5$$

Cette dernière égalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
3n^2 - 6n + 5 - (3n^2 + 6n + 5) &= 0 \\
3n^2 - 6n + 5 - 2n^2 - 6n - 5 &= 0
\end{aligned}$$

Et en ordonnant puis en réduisant :

$$n^2 - 12n = 0$$

Ainsi résoudre le problème revient à résoudre l'équation $n^1 - 12n = 0$ dans l'ensemble des entiers naturels plus grands que 2 (cf. *infra*).

2. Quelles sont les solutions de l'équation $n^2 - 12n = 0$? Justifier la réponse.

Résolvons l'équation $n^2 - 12n = 0$.

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré deux, nous pourrions donc sortir la lourde artillerie du discriminant mais nous allons ici plus simplement nous ramener à une équation produit en factorisant directement.

Soit $n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} n^2 - 12n = 0 &\Leftrightarrow n(n-12) = 0 \\ &\Leftrightarrow n = 0 \quad \text{ou} \quad n - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = 0 \quad \text{ou} \quad n = 12 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions réelles de l'équation $n^2 - 12n = 0$ est $\mathscr{S}_1 = \{0; 12\}$.

3. Ces solutions peuvent-elles retenues pour le problème de la « situation des cinq carrés » ? Justifier votre réponse.

Si $n = 0$ alors le premier carré aurait un côté de longueur $n - 2 = -2$ ce qui n'a pas de sens.

La seule solution que l'on peut retenir pour la « situation des cinq carrés » est $n = 12$.

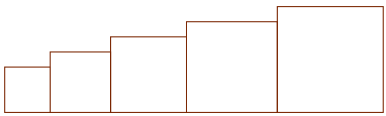
4. Réaliser un figure à l'échelle $\frac{1}{5}$ d'une solution du problème de la « situation des cinq carrés » en détaillant les calculs effectués pour construire la figure.

Dessinons une figure à l'échelle $\frac{1}{5}$ d'une solution.

Déterminons les longueurs des côtés à l'échelle :

Carré	Longueur d'un côté	Longueur, en centimètre, à l'échelle $\frac{1}{5}$
1	$12 - 2 = 10$	$\frac{10}{5} = 2$
2	$12 - 1 = 11$	$\frac{11}{5} = 2{,}2$
3	12	$\frac{12}{5} = 2{,}4$
4	$12 + 1 = 13$	$\frac{13}{5} = 2{,}6$
5	$12 + 2 = 14$	$\frac{14}{5} = 2{,}8$

D'où le dessin à l'échelle $\frac{1}{5}$:



Partie C : situation des sept carrés.

On s'intéresse maintenant à une figure comportant sept carrés. Les mesures, en centimètre, des côtés des sept carrés sont des entiers consécutifs. Les quatre plus petits carrés sont gris et les trois autres sont blancs.

On cherche s'il est possible de trouver des longueurs pour les côtés des carrés telles que la somme des aires des quatre carrés gris soit égale à celle des trois carrés blancs.

On envisage une résolution graphique. On choisit comme variable x la longueur en cm du côté du plus grand carré blanc. On admet que l'expression algébrique de la somme des aires des carrés gris est alors :

$$4x^2 - 36x + 86,$$

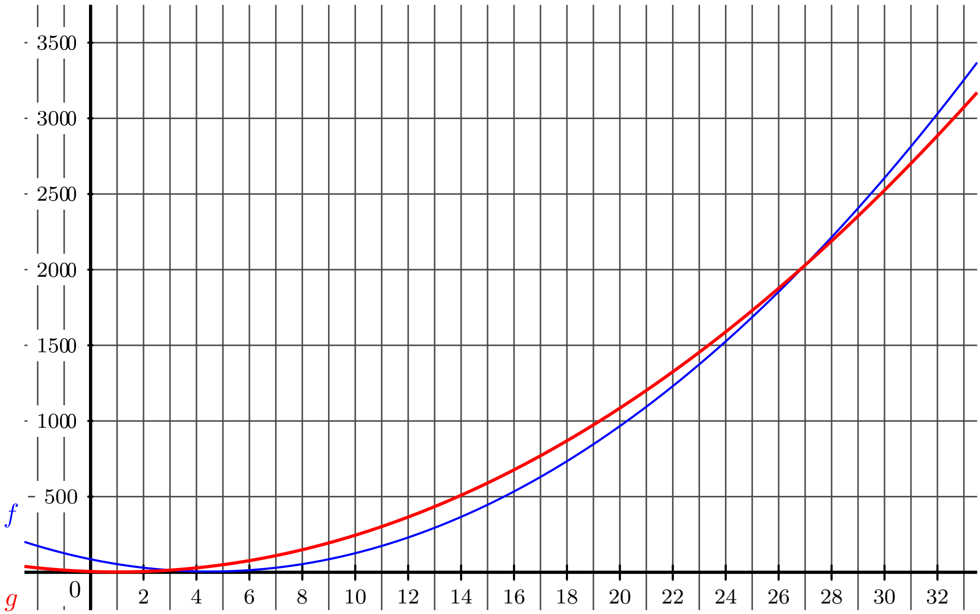
et que l'expression algébrique de la somme des aires des carrés blancs est :

$$3x^2 - 6x + 5.$$

On nomme :

- f la fonction qui à tout nombre x fait correspondre $f(x) = 4x^2 - 36x + 86$;
- g la fonction qui à tout nombre x fait correspondre $g(x) = 3x^2 - 6x + 5$.

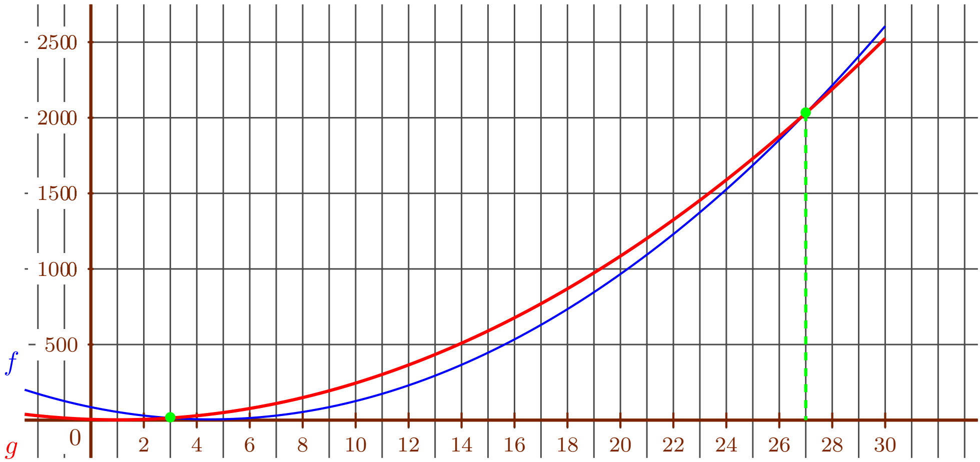
La copie d'écran ci-dessous fait apparaître une partie des représentations graphiques de ces deux fonctions, obtenues à l'aide d'un logiciel.



1. Déterminer graphiquement, si la situation des sept carrés semble avoir des solutions.

   Résolvons le problème par lecture graphique.

   Nous voulons que les aires grises et blanches s'égalent. Autrement dit nous aimerions que $f(x) = g(x)$. Nous obtiendrons la réponse graphiquement en recherchant les points d'intersection des courbes représentatives de f et de g et en lisant leurs abscisses.



Il y a semble-t-il deux solutions possible à savoir 3 et 27.

2. Vérifier si la ou les solutions trouvées conviennent.

Vérifions si les solutions trouvées conviennent.

- Si $x = 3$ alors, puisque x désigne la longueur du côté du plus grand carré, le plus petit a un côté de longueur $x - 6 = 3 - 6 = -3$. Cela n'a pas de sens. La réponse $x = 3$ est donc exclue.
- Si $x = 27$ alors tout d'abord il n'y a pas d'incohérence pour les longueurs des autres carrés.
  Vérifions qu'il s'agit bien d'une solution.
  D'une part :

$$\begin{aligned} f(27) &= 4 \times 27^2 - 36 \times 27 + 86 \\ &= 2030 \end{aligned}$$

et d'autre part

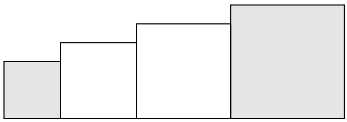
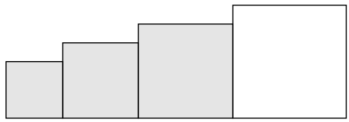
$$\begin{aligned} g(27) &= 3 \times 27^2 - 6 \times 27 + 5 \\ &= 2030 \end{aligned}$$

donc $f(27) = g(27)$. Autrement dit les deux aires sont bien égales et 27 est effectivement une solution.

Seule la solution $x = 27$ convient.

Partie D : situation des quatre carrés.

Avec quatre carrés ayant des côtés de mesures entières et consécutives, on peut envisager au moins deux cas :

	
cas 1	cas 2

On cherche à savoir si, dans chacun des cas, il est possible que l'aire de la surface grise soit égale à l'aire de la surface blanche.

On utilise pour cela un tableur. On donne ci-dessous les copies d'écran des feuilles de calcul obtenues lors de cette recherche.

Copies d'écran :

	A	B	C	D	E	F	G
1	coté du plus petit carré	aire du premier carré	aire du 2ème carré	aire du 3ème carré	aire du 4ème carré	aire de la partie grise	aire de partie blanche
2	1	1	4	9	16	17	13
3	50	2500	2601	2704	2809	5309	5305
4	100	10000	10201	10404	10609	20609	20605
5	700	490000	491401	492804	494209	984209	984205
6	1000	1000000	1002001	1004004	1006009	2006009	2006005
7	2000	4000000	4004001	4008004	4012009	8012009	8012005
8	50000	2500000000	2500100001	2500200004	2500300009	5000300009	5000300005
9	100000	10000000000	10000200001	10000400004	10000600009	20000600009	20000600005
10							

Feuille de calcul A

	A	B	C	D	E	F	G
1	coté du plus petit carré	aire du premier carré	aire du 2ème carré	aire du 3ème carré	aire du 4ème carré	aire de la partie grise	aire de partie blanche
2	1	1	4	9	16	14	16
3	2	4	9	16	25	29	25
4	3	9	16	25	36	50	36
5	4	16	25	36	49	77	49
6	5	25	36	49	64	110	64
7	6	36	49	64	81	149	81
8	7	49	64	81	100	194	100
9	8	64	81	100	121	245	121
10							

Feuille de calcul B

1. Quelle feuille correspond à chacun des deux cas ? Justifier la réponse.

   Déterminons quelle feuille correspond à quel ca.

   Considérons la feuille de calcul A.
   Nous remarquons, dans la ligne 2, que la somme des aires du premier et du quatrième carré $(1 + 16)$ égale l'aire de la partie blanche.
   Par contre l'aire du quatrième carré seule n'égale pas l'aire de la partie blanche.
   Cette feuille ne peut donc correspondre que au cas 1.

   La feuille A correspond au cas 1 tandis que la feuille B correspond au cas 2.

2. Pour la feuille de calcul A :

   (a) Quelle formule étirable vers le bas a-t-on pu saisir dans la cellule `E2` pour calculer l'aire du quatrième carré à partir de la valeur saisie dans la cellule `A2` ?

   La formule entrée en `E2` peut être :

   $$= (\texttt{A1} + 3) \wedge 2$$

   (b) Quelle formule étirable vers le bas a-t-on pu saisir dans la cellule `F2` pour calculer l'aire de la partie grisée ?

   La formule entrée en `F2` peut être :

   $$= \texttt{B2} + \texttt{E2}$$

3. Pour chaque cas, quelle conjecture, sur les solutions du problème, la copie d'écran de la feuille de calcul permet-elle d'émettre ? Justifier la réponse.

   - Pour le cas 1 (feuille de calcul A).
     Il semble que la différence de l'aire de la partie grise et de la partie blanche soit toujours de 4. Elles ne peuvent donc jamais être égales.
   - Pour le cas 2 (feuille de calcul B).
     Il semble que, hormis dans la ligne 2, l'aire de la partie grise est toujours plus petite que l'aire de la partie blanche.

   Les feuilles de calcul permettent de conjecturer qu'aucun des deux problèmes n'a de solution.

4. Montrer que dans les deux cas, la « situation des quatre carrés » n'admet pas de solution.

   Démontrons la conjecture dans le cas 1.

   En raisonnant comme dans les parties antérieures nous établirions que le résoudre le problème revient à résoudre l'équation

$$n^2 + (n+3)^2 - \left[(n+1)^2 + (n+2)^2\right] = 0.$$

   Or $n^2 + (n+3)^2 - \left[(n+1)^2 + (n+2)^2\right] = 4$, donc l'équation n'admet pas de solutions

   Le problème n'admet pas de solution dans le cas 1.

   Démontrons la conjecture dans le cas 2.

   Comme précédemment calculons la différence des deux aires :

$$\begin{aligned}(n+3)^2 - \left[n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2\right] &= n^2 + 6n + 9 - \left[3n^2 + 6n + 5\right] \\ &= -2n^2 + 4\end{aligned}$$

   Il nous faut donc résoudre l'équation trinôme : $-2n^2 + 4 = 0$.
   Nous reconnaissons une expression polynomiale de degré deux $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 0$ et $c = 4$.
   Il y a ici une factorisation immédiate :

$$\begin{aligned}-2n^2+4 &= -2_(n^2-2)\\ &= -2\left(n^2-\sqrt{2}^2\right)\\ &= -2\left(n+\sqrt{2}\right)\left(n-\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

Une autre façon de trouver les racines, bien plus lourde, en utilisant le discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 0^2-4\times(-2)\times 4\\ &= 32\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-0-\sqrt{32}}{2\times(-2)}\\ &= -\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-0+\sqrt{32}}{2\times(-2)}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

L'une de ces racines est strictement négative, ce qui l'exclue. Aucune des deux solutions ne convient puisqu'il ne s'agit pas de nombres entiers, mais d'irrationnels ($\sqrt{2}$ est classiquement irrationnel).

Le problème 'admet pas de solution dans le cas 2.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de points.

1. Les tableaux ci-dessous résument les productions par deux sociétés de deux types de tablettes : la tablette Electrix et la tablette Tronix.

Société 1

	Nombre de tablettes fabriquées par jour	Pourcentage moyen de tablettes défectueuses
Electrix	2000	5 %
Tronix	7000	2 %

Société 2

	Nombre de tablettes fabriquées par jour	Pourcentage moyen de tablettes défectueuses
Electrix	6000	3 %
Tronix	1000	2 %

Affirmation 1 : Pour l'ensemble des tablettes produites, la société 1 a le pourcentage d'appareils défectueux le plus faible.

Il s'agit ici d'un calcul de moyenne de moyennes. Nous allons utiliser deux méthodes différentes pour calculer les moyennes dans ce cas.

Calculons le pourcentage d'appareils défectueux de la société 1.

Nous voulons calculer la moyenne de la série statistique suivante :

Valeurs	5	2
Effectif	2000	7000

Nous utilisons donc la formule de la moyenne pondérée :

$$\begin{aligned}\overline{x}_{\text{société 1}} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{2000 \times 5 + 7000 \times 2}{2000 + 7000} \\ &= 2{,}666\ldots\end{aligned}$$

$\boxed{\text{2,67 \% des appareils de la société 1 sont défectueux.}}$

Calculons le pourcentage d'appareils défectueux de la société 2.

3 % des 6000 tablettes Electrix correspond à un nombre de tablettes de

$$\frac{3}{100} \times 6000 = 180.$$

2 % des 1000 tablettes Tronix correspond à un nombre de tablettes de

$$\frac{2}{100} \times 1000 = 20.$$

Ainsi la société 2 produit $180 + 20 = 200$ tablettes défectueuse sur un total de $6000 + 1000 = 7000$ tablettes. La proportion moyenne de tablettes défectueuses de la société 2 est donc

$$\begin{aligned}\overline{x}_{\text{société 2}} &= \frac{200}{7000} \\ &= \frac{1}{35} \\ &\approx 0{,}02857\end{aligned}$$

2,86 % des appareils de la société 2 sont défectueux.

L'affirmation 1 est donc vraie.

2. On sait que l'aire d'un cube est égale à la somme des aires des faces qui le constituent.
   Affirmation 2 : Le volume d'un cube est proportionnel à son aire.

   Démontrons que l'aire d'un cube n'est pas proportionnel à son volume en exhibant un contre-exemple.

   - Considérons un cube de longueur d'arête 1. Alors son volume est $1^3 = 1$ et son aire est $6 \times 1^2 = 6$. Donc le rapport de du volume par l'aire est de $\frac{1}{6}$.
   - Considérons un cube de longueur d'arête 2. Alors son volume est $2^3 = 8$ et son aire est $6 \times 2^2 = 24$. Donc le rapport de du volume par l'aire est de $\frac{8}{24} = \frac{2}{6}$.

   Le rapport n'est pas le même donc il n'y a pas proportionnalité entre l'aire et le volume.

   L'affirmation 2 est fausse.

   Il était également possible de vérifier que, avec les mêmes cas particuliers, le tableau

1	6
2	24

n'est pas un tableau de proportionnalité. Par exemple en utilisant le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 24 \end{vmatrix} = 1 \times 24 - 2 \times 6 = 12 \neq 0,$$

ou un produit en croix ou autres.

3. Un récupérateur d'eau de pluie contient 0,3 m^3 d'eau.
   Pour arroser un potager il faut 15 L d'eau par m^2.
   Affirmation 3 : Avec l'eau du récupérateur, on peut arroser quatre fois un potager de 5 m^2.

   Calculons le volume d'eau nécessaire pour le potager.

   Le potager faisant 5 m^2 et puisqu'il faut 15 L par m^2, pour l'arroser (une fois) il faut

$$\begin{aligned} 5 \times 15 \text{ L} &= 275 \text{ L} \\ &= 275 \text{ dm}^3 \\ &= 275 \; 1 \text{ dm}^3 \\ &= 275 \; \frac{1}{1000} \text{ m}^3 \\ &= 0{,}275 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

   Et donc pour arroser 4 fois le potager il faut

$$4 \times 0{,}275 \text{ m}^3 = 1{,}1 \text{ m}^3$$

   L'affirmation 3 est fausse.

4. $A = 7 + \dfrac{2}{10}$.
   Affirmation 4 : La partie décimale de A^2 est $\frac{4}{100}$.

   Calculons la partie décimale de A.

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(7+\frac{2}{10}\right)^2 \\
&= 7^2 + 2\times 7\times\frac{2}{10} + \left(\frac{2}{10}\right)^2 \\
&= 49 + \frac{28}{10} + \frac{4}{100} \\
&= 49 + 2 + \frac{8}{10} + \frac{4}{100} \\
&= 51 + \frac{8}{10} + \frac{4}{100}
\end{aligned}$$

La partie décimale de A^2 est donc $\frac{8}{10} + \frac{4}{100}$.

L'affirmation 4 est fausse.

Exercice 2.

1. Inès a lancé 200 fois un dé équilibré à 6 faces et a collecté ses résultats dans un tableau :

Nombre affiché sur la face	1	2	3	4	5	6
Nombre d'apparitions	30	41	32	28	31	

   (a) Combien de fois a-t-elle obtenu 6 ?

   Le 6 a été obtenu $200 - (30+41+32+28+31) = 38$.

   Le 6 été obtenu 38 fois.

   (b) Quelle est, en pourcentage, la fréquence d'apparition du « 1 » ?

   Calculons la fréquence d'apparition du 1.

   Le 1 est apparu 30 fois sur un total de 200 lancés donc la fréquence correspondante est $\frac{30}{200} = 0{,}15$.

   Le 1 est apparu dans 15 % des lancés.

2. Inès lance cette fois deux dés équilibrés à 6 faces.

   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égale à 9 ?

   Notons A l'événement « obtenir deux nombres dont le produit égale 9 ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   Nous pouvons modéliser cette expérience avec un tableau double entrées qui croise les résultats obtenus sur chaque dé. Dans le tableau sont indiqués les produits correspondants.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

   Les dés étant équilibrés nous pouvons choisir de modéliser en utilisant l'équiprobabilité : chacun des 36 couples de résultats des dés à la même probabilité d'être obtenu.
   Puisque le produit 9 n'est obtenu qu'une fois (comme produit de 3 et de 3) nous en déduisons

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{36}.}$$

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égale à 12 ?

   Notons B l'événement « obtenir un produit égale à 12.

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

   En utilisant la même modélisation qu'à la question précédente nous voyons que

$$B = \{(2;6), (3;4), (4;3), (6;2)\}.$$

   Ainsi B est réalisé par 4 issues dans un univers comportant 36 issues et dont la loi et l'équiprobabilité, par conséquent : $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{36}$ ou

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{1}{9}.}$$

Exercice 3.

Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

Au cours de cet exercice, on pourra utiliser le résultat admis suivant : « La somme des mesures en degré des angles d'un polygone régulier à n côtés vaut $180n - 360$. »

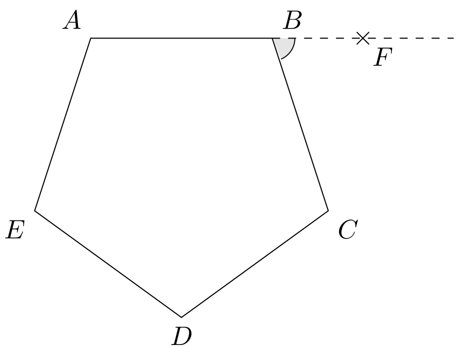
1. Déterminer, sans justifier, la nature des deux figures tracées lorsqu'on exécute le **programme A et le programme B**.

Programme A

Programme B

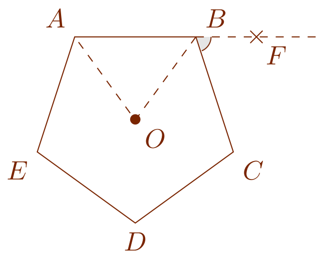
Le programme A trace un carré et le programme B un triangle équilatéral.

2. On considère le pentagone régulier $ABCDE$ ci-dessous. F est une point de la droite (AB) n'appartenant pas à la demi-droite $[BA)$.



(a) Démontrer que $\widehat{FBC} = 72°$.

Calculons une mesure de l'angle $\widehat{FBC}$.



Le pentagone étant régulier les angles $\widehat{BOA}$, $\widehat{AOE}$, $\widehat{EOD}$, $\widehat{EOD}$, $\widehat{DOC}$ et $\widehat{COB}$ ont tous même mesure à savoir, en degré : $\frac{360}{5} = 72°$.
Par construction OAB est isocèle en O et donc $\widehat{OBA} = \frac{180-72}{2} = 54°$.
Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \widehat{CBA} &= \widehat{CBO} + \widehat{OBA} \\ &= 54 + 54 \\ &= 108 \end{aligned}$$

Enfin les angles $\widehat{CBO}$ et $\widehat{CBF}$ étant complémentaires $\widehat{CBF} = 180 - 108$. D'où

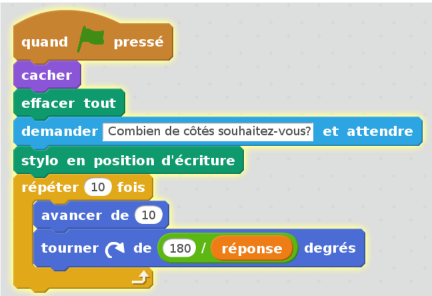
$$\boxed{\widehat{CBF} = 72°.}$$

(b) En déduire les modifications à apporter au **programme A** pour que la figure tracée soit un pentagone régulier.

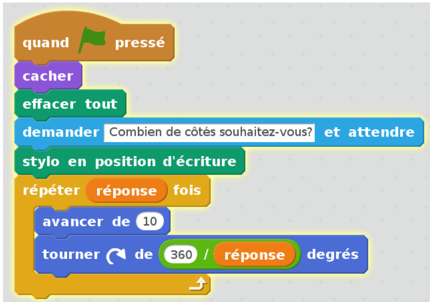
Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout polygone régulier, l'angle $\widehat{FBC}$ est égale à 360 divisé par le nombre de côtés de ce polygone.

3. On souhaite maintenant réaliser un **programme** qui, lorsqu'on l'exécute, permet d'obtenir le tracé d'un polygone régulier dont le nombre de côtés est choisi par l'utilisateur. Voici les programmes élaborés par quatre élèves.

   Lequel de ces quatre programmes permet de réaliser le tracé souhaité ? Précisez pourquoi les autres ne conviennent pas.



Programme 1



Programme 2

Programme 3

Programme 4

Rappel : *Une fois que l'utilisateur a répondu à la question « Combien de côtés souhaitez-vous ? », la valeur indiquée est stockée dans la variable* réponse.

* Le programme 1 ne fonctionne pas car il trace toujours 10 côtés sans prendre en compte le choix de l'utilisateur.
* Le programme 3 e fonctionne pas puisque l'angle de rotation ne dépend pas du nombre de côtés choisi.
* Le programme 4 ne fonctionne pas puisque la rotation l'énoncé nous indique que l'angle doit être égale à 360 divisé par le nombre de côtés de ce polygone (et non pas 180).

Le programme 2 permet de tracer un polygone régulier dont l'utilisateur choisi le nombre de côtés.

4. Le programme Scratch ne permet pas de tracer facilement un cercle. Comment peut-on utiliser le travail mené dans cet exercice pour construire, avec Scratch, une figure ayant l'apparence d'un cercle à l'écran ?

En choisissant un très grand nombre de côtés nous aurons l'illusion de voir un cercle.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

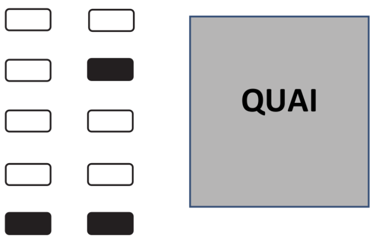
Dans une classe de maternelle, une enseignante donne à un groupe d'élèves la consigne suivante :

« Vous devez chercher des voyageurs pour remplir le train, pas un de plus, pas un de moins. Vous poserez les voyageurs sur le quai. »

Matériel :

— des jetons représentant les voyageurs (ils sont placés dans une boîte éloignée dans un coin de la classe) ;
— un support pour chaque élève représentant des places libres ou occupées ;
— une partie libre (le quai) sur lequel seront posés les voyageurs rapportés avant validation.

Le premier support proposé compte 7 places vides (blanches) et 3 places occupées (noires). Les places vides peuvent être organisées de différentes façons. Les élèves devront déposer les voyageurs sur le quai (zone grisée) avant de les faire monter à bord.



L'élève A a effectué deux voyages. Au premier voyage, il ramène une dizaine de jetons et au second il rapporte les jetons en trop ;

L'élève B a effectué un voyage, il revient très rapidement avec 7 jetons ;

L'élève C a effectué sept voyages, rapportant un seul jetons à la fois ;

L'élève D a effectué un voyage. Il revient avec 4 jetons dans une main et 3 jetons dans l'autre main.

1. Quel usage du nombre est mobilisé dans cette situation ?
2. Quel est l'intérêt du quai ?
3. Au regard des acquis liés à la notion du nombre, analyser les procédures mises en œuvre par chacun des élèves.
4. Proposer deux modifications de la tâche, que l'enseignant peut proposer pur amener les élèves A ou C à progresser dans leur utilisation du nombre ?

Situation 2.

Un enseignant propose deux calculs à effectuer en ligne à des élèves de cycle 3 relève quatre productions.

Calcul 1 : L'enseignant écrit au tableau : $12{,}48 - 6{,}8$ et dit aux élèves : « Calculer la différence, entre 12 unités et 42 centièmes et 6 unités et 8 dixièmes ».
Élève 1 : $12{,}42 - 6{,}8 = 6{,}42 - 0{,}8 = 6 - 0{,}38 = 5{,}62$
Élève 2 : 12 unités et 42 centièmes moins 6 unités et 8 dixièmes = 1242 centièmes moins 68 dixièmes = 1242 centièmes moins 680 centièmes $1242 - 680 = 1262 - 700 = 562$ Résultat : 562 centièmes

Calcul 2 : Calculer le produit de 15 par 0,24
Élève 3 : $15 \times 0{,}24 = 2{,}4 + 1{,}2 = 3{,}6$
Élève 4 : 15 fois 24 centièmes = 300 centièmes + 60 centièmes = 360 centièmes

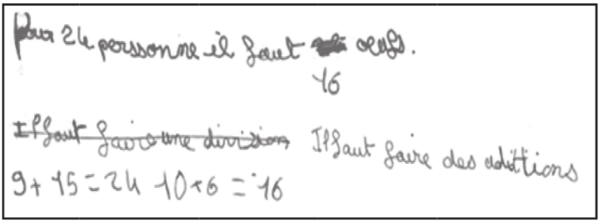
1. Pour chaque calcul, analyser les productions des élèves au regard des connaissances mobilisées sur les nombres et sur les propriétés des opérations.
2. Pour chaque calcul, préciser ce qui distingue les productions des deux élèves.

Situation 3.

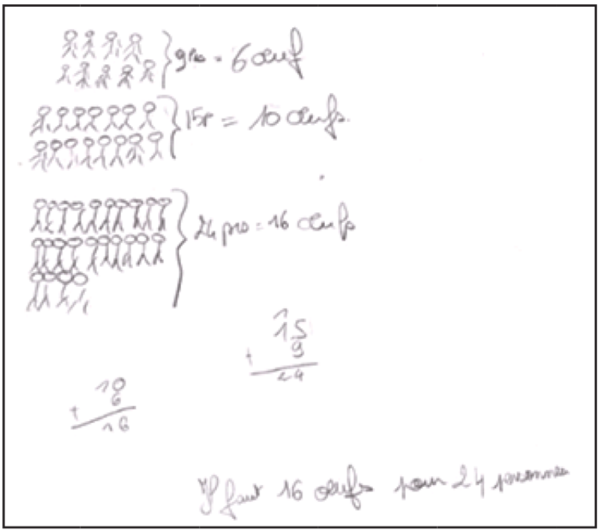
Un professeur d'une classe de cycle 3 propose les trois exercices suivants, dans cet ordre, à ses élèves.

Exercice 1 Un livre de cuisine indique que, pour faire de la crème brûlée, il faut 6 œufs si la recette est prévue pour 9 personnes et 10 œufs si la recette est prévue pour 15 personnes. Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette crème brûlée pour 24 personnes ? J'ai chez moi tous les ingrédients dont j'ai besoin.

Élève A



Élève B



Exercice 2 Il faut 6 œufs pour faire une crème au caramel pour 10 personnes. Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette crème au caramel pour 15 personnes ? J'ai chez moi tous les ingrédients dont j'ai besoin.

Élève C

6 oeuf pour 10 personnes
9 oecf pour 15 personnes

3+3+3=9
œuf

il faut 9 oeuf pour 15 personnes.

Exercice 3 Il faut 5 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 10 personnes. J'ai 3 œufs. Pour combien de personnes puis-je faire une mousse au chocolat ? J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

Élève D

1 oeuf = 2 personnes. 3X2=6

On peut faire une mousse au chocolat pour 6 personnes

1. Quelle est la notion du programme que ces exercices permettent principalement de travailler ?

2. Analyser les productions des élèves A, B, C et D en indiquant le type de procédures utilisées.

3. Montrer en quoi les différences entre les trois énoncés permettent une progressivité dans l'apprentissage de la notion.

4. Proposer un exercice qui permettrait, en deuxième moitié de cycle 3, de poursuivre l'apprentissage de la notion travaillée.