Épreuve de mathématiques CRPE 2018 supplémentaire de Paris-Créteil-Versailles.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Loïc Asius pour la correction apportée.

I Première partie (13 points).

Partie A : le bâtiment.

1. Calculons l'aire $\mathscr{A}(ABCD)$ de $ABCD$.

   Puisque $ABCD$ est un rectangle

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= AD \times DC \\ &= (5 \text{ m})(6 \text{ m}) \\ &= 5 \times 6 \text{ m} \times \text{m} \\ &= 30 \text{ m}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ABCD) = 30 \text{ m}^2.}$$

2. Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ du bâtiment.

   Pour calculer ce volume remarquons que le bâtiment est formé d'un parallélépipède rectangle et d'un prisme droit. Plus précisément, avec des notations évidentes :

$$\mathscr{V}_1 = \mathscr{V}(ABCDFEKG) + \mathscr{V}(EFGKLM)$$

   Or $ABCDEFKG$ étant un parallélépipède rectangle :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(ABCDEFKG) &= AD \times DC \times AF \\ &= (5 \text{ m})(6 \text{ m})(2{,}6 \text{ m}) \\ &= 5 \times 6 \times 2{,}6 \text{ m} \times \text{m} \times \text{m} \\ &= 78 \text{ m}^3\end{aligned}$$

et, $EFGKLM$ étant un prisme droit

$$\mathscr{V}(EFGKLM) = \mathscr{A}(LGK) \times FG$$

Puisque LH est la hauteur de LGK issue de L :

$$\mathscr{V}(EFGKLM) = \frac{1}{2} \times LH \times GK + AD$$

Puisque $H \in [LO]$, $LH = LO - HO$ et donc :

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}(EFGKLM) &= \frac{1}{2} \times (LO - HO) \times GK \times AD \\
&= \frac{1}{2} \times (LO - AF) \times DC \times AD \\
&= \frac{1}{2} \times (4{,}2 \text{ m} - 2{,}6 \text{ m}) \times (6 \text{ m}) \times (5 \text{ m}) \\
&= \frac{1}{2} \times (4{,}2 - 2{,}6) \times 6 \times 5 \text{ m} \times \text{m} \times \text{m} \\
&= 24 \text{ m}^3
\end{aligned}$$

donc

$$\mathscr{V}_1 = 78 \text{ m}^3 + 24 \text{ m}^3$$

Finalement

$$\boxed{\mathscr{V}_1 = 102 \text{ m}^3.}$$

Partie B : le toit.

1. (a) Calculons LG.

   GHL est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} LG^2 &= GH^2 + HL^2 \\ &= DO^2 + (LO - HO)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}DC\right)^2 + (LO - AF)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot 6\right)^2 + (4{,}2 - 2{,}6)^2 \\ &= 11{,}56 \end{aligned}$$

LG étant une longueur c'est un nombre positif, donc

$$\begin{aligned} LG &= \sqrt{11{,}56} \\ &= 3{,}4 \end{aligned}$$

$$\boxed{LG = 3{,}4 \text{ m}}$$

(b) Déterminons l'aire $\mathscr{A}_1$ du toit.

Le toit est constitué de deux rectangles donc

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_1 &= \mathscr{A}(FGLM) + \mathscr{A}(LKEM) \\ &= 2\mathscr{A}(FGLM) \\ &= 2 \times FG \times LG \\ &= 2 \times AD \times LG \\ &= 2(5 \text{ m})(3{,}4 \text{ m}) \\ &= 2 \times 5 \times 3{,}4 \text{ m} \times \text{m} \\ &= 34 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = 34 \text{ m}^2.}$$

2. Calculons une mesure de $\widehat{HGL}$.

Puisque HGL est rectangle en G :

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{HGL}) &= \frac{HG}{HL}\\ &= \frac{\frac{DC}{2}}{HL}\\ &= \frac{\frac{6}{2}}{3{,}4}\end{aligned}$$

Nous en déduisons avec la calculatice une mesure de l'angle :

$$\widehat{HGL} \approx 28{,}0724$$

L'angle $\widehat{HGL}$ mesure approximativement 28° et $25 \leqslant 28 \leqslant 60$, donc

$$\boxed{\text{le propriétaire pourra utiliser des tuiles mécaniques.}}$$

3. Calculons le nombre maximum de tuiles.

* Puisque chaque mètre carré nécessite 20 tuiles et que la surface du toit mesure 34 m^2 : $n_1 = 34 \times 20 = 680$ tuiles seront nécessaires.
* Déterminons le nombre de tuiles nécessaires pour recouvrir le toit.
  La surface d'une tuile est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_2 &= (23{,}5 \text{ cm}) \times (32 \text{ cm})\\ &= \left(23{,}5 \times \frac{1}{100} \text{ m}\right) \times \left(32 \times \frac{1}{100} \text{ m}\right)\\ &= 23{,}5 \times \frac{1}{100} \times 32 \times \frac{1}{100} \text{ m} \times \times\text{m}\\ &= 0{,}0752 \text{ m}^2\end{aligned}$$

  Pour recouvrir le toit le nombre n_2 de tuiles nécessaire est

$$\begin{aligned}n_2 &= \frac{34}{0{,}0752}\\ &\approx 452{,}127\end{aligned}$$

  En arrondissant $n_2 \approx 452$.

Mais il faut augmenter ce nombre de un tiers donc le nombre total de tuile doit être

$$\begin{aligned} n_3 &= n_2 + \frac{1}{3}n_2 \\ &= n_2\left(1+\frac{1}{3}\right) \\ &\approx 602{,}8368 \\ &\approx 603 \end{aligned}$$

C'est avec l'estimation du site internet que l'on obtient le plus de tuiles.

4. Calculons le montant des deux possibilités.

   * Première possibilité.
     La surface du toit mesure 34 m^2 et chaque mètre carré coûterait 60 €, donc le coût total serait de $60 \times 34 = 2010$ €.
   * Seconde possibilité.
     Il faut compter les 700 tuiles à 1,35 € l'une auxquels s'ajoutent les 900 € pour la pose. Le coût total serait alors de $700 \times 1{,}35 + 900 = 1845$ €.

La possibilité 1 coûte le moins cher.

Partie C : les frontons.

1. Calculons PR.

   * Configuration de Thalès.
     Les points G, P, L d'une part et G, R, H sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèse du théorème de Thalès.
     Par construction les droites PR) et (LH) sont parallèles.

   Des points précédents nous déduisons, grâce au théorème de Thalès,

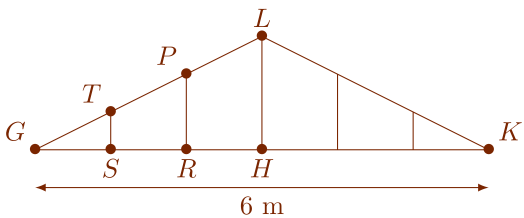
$$\frac{PR}{LH} = \frac{GR}{GH}.$$

Visiblement par construction $\frac{GR}{GH} = \frac{2}{3}$.
Comme de plus $LH = LO - HO = LO - FA = 4{,}2 - 2{,}6 = 1{,}6$ m, nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned}
\frac{PR}{1{,}6} &= \frac{2}{3} \\
\frac{PR}{1{,}6} \cdot 1{,}6 &= \frac{2}{3} \cdot 1{,}6 \\
PR &= \frac{16}{15} \\
&= 1{,}0666\ldots
\end{aligned}$$

Enfin

$PR \approx 1{,}07$ m, en arrondissant au centimètre.

2. 

En raisonnant comme à la question précédente il est aisé d'établir que $ST = \frac{1}{3}LH$ et $PR = \frac{2}{3}LH$ donc $ST + PR = LH$,. Par symétrie il en sera de même sur la partie droite.
Donc

Il faudra effectivement 3 fois le longueur LH de bois pour décorer un fronton.

Partie D : maquette.

1. Déterminons l'échelle de la maquette.

   Déterminons la proportion, p_1, de la surface au sol de la maquette par rapport à celle du bâtiment.

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{480\ \text{cm}^2}{30\ \text{m}^2} \\
&= \frac{480\left(\frac{1}{100}\ \text{m}\right)^2}{30\ \text{m}^2} \\
&= \frac{480 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2\ \ \text{m}^2}{30\ \text{m}^2} \\
&= \frac{480 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2}{30} \\
&= 0{,}0016
\end{aligned}$$

Par conséquent la proportion p_2 des longueurs de la maquette par rapport à celles du bâtiment est

$$\begin{aligned}
p_2 &= \sqrt{p_1} \\
&= \sqrt{0{,}0016} \\
&= 0{,}04 \\
&= \frac{4}{100}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\text{La maquette est à l'échelle } 4/100.}$$

2. Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ de la maquette.

Puisque le rapport de proportionnalité entre les longueurs de la maquette et du bâtiment est de 0,04, le rapport de proportionnalité entre les volumes est

$$\begin{aligned}
p_3 &= p_2^3 \\
&= 0{,}04^3 \\
&= 6{,}4 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \mathscr{V}_1 \times p_3 \\ &= (102\text{ m}^3) \times 6{,}4 \times 10^{-5} \\ &= 102 \times 6{,}4 \times 10^{-5}\text{ m}^3 \\ &= 0{,}006528\text{ m}^3 \\ &= 0{,}006528 \times (100\text{ cm})^3 \\ &= 0{,}006528 \times 100^3\text{ cm}^3 \\ &= 65{,}28\text{ cm}^3\end{aligned}$$

$\mathscr{V}_2 = 65{,}28\text{ cm}^3$.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Notons x le prix, inconnu du perroquet envolé.

   Calculons x.

   Il s'agit d'une situation classique de moyenne de moyennes.

   La moyenne est la somme des prix des perroquet divisé par le nombre total de perroquets. Autrement dit :

$$\frac{4 \times 4000 + x}{5} = 5000$$

   Il s'agit d'une équation linéiare du premier degré nous la résolvons en isolant l'inconnue x. Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{16000 + x}{5} \cdot 5 &= 5000 \times 5 \\ 16000 + x &= 25000 \\ 16000 + x - 16000 &= 25000 - 16000 \\ x &= 9000\end{aligned}$$

Réponse E.

2. * Analyse.

   - La longueur l et la profondeur p du pavé vérifient $2(l+p) = 18$ donc $1 \leqslant l \leqslant 8$. De plus l est un diviseur de 42 donc $l \in \{1; 2; 3; 6; 7\}$.
   - De $2(l+p) = 18$ nous déduisons également $p = 9 - l$.

   Des deux points précédents nous déduisons le tableau

l	1	2	3	6	7
$p = 9 - l$	8	7	6	3	2

   Mais $p \neq 8$ car p est un diviseur de 42.
   De même $l = 3$ et $p = 6$ (ou $l = 6$ et$p = 3$) est impossible car 3×6 n'est pas un diviseur de 42.
   Ainsi, nécessairement, $l = 2$ et $p = 7$ ou $l = 7$ et $p = 2$. Dans ces deux cas la hauteur h du pavé est : $h = \frac{42}{lp} = \frac{42}{2\times 7} = 3$.

   * Synthèse.
   Les dimensions $l = 2$, $p = 7$ et $h = 3$ (ou $l = 2$, $p = 7$ et $h = 3$) conviennent effectivement.

   Réponse C.

3.

Notons x la largeur de la forêt exprimée en mètres.

Calculons x.

D'après l'énoncé

$$15 \text{ mn} = \frac{x \text{ m}}{5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} + \frac{x \text{ m}}{4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 15(60 \text{ s}) &= \frac{x}{5} + \frac{x}{4} \text{ s} \\ 900 \text{ s} &= \frac{9}{20}x \\ \frac{20}{9} \times 900 &= x \\ 2000 &= x \end{aligned}$$

La largeur de la forêt est de 2000 m, c'est-à-dire 2 km.

Réponse B.

Exercice 2.

1. Nous allons faire le raisonnement pour un nombre x quelconque de kilogrammes de fruits car les questions suivantes nécessitent les mêmes calculs.

   Calculons le nombre de pot obtenus avec x kilogrammes de fruits.

   La masse obtenue après ajout d'une masse de sucre égale aux quatre cinquième de la masse de fruit :

$$\begin{aligned} m_s(x) &= x + \frac{4}{5}x \\ &= \left(1 + \frac{4}{5}\right)x \\ &= 1{,}8x \end{aligned}$$

   La cuisson faisant perdre 25 % de la masse, la masse après cuisson est de

$$\begin{aligned} m_c(x) &= \left(1 + \frac{-25}{100}\right)m_s(x) \\ &= 0{,}75 \times 1{,}8x \\ &= 1{,}35x \end{aligned}$$

   Ainsi pour 5 kg,

$$\begin{aligned} m_c(5) &= 1{,}35 \times 5 \text{ kg} \\ &= 6{,}75 \text{ kg} \\ &= 6{,}75(1000 \text{ g}) \\ &= 6750 \text{ g} \end{aligned}$$

   Pour connaître le nombre de pots nécessaires procédons à une division euclidienne

$$6750 = 13 \times 500 + 250.$$

   Il peut remplir 13 pots avec 5 kg de fruits.

2. Nous avons obtenus à la question précédente que la masse de confiture obtenue pour x kilogrammes de fruits est $m_c(x) = 7{,}75x$. Il s'agit d'une application linéaire donc

   la masse de confiture est proportionnelle à la masse de fruits.

3. Déterminons la masse x de fruit nécessaire pour remplir 18 pots.

   Chaque pot contenant 500 g, il faut donc 18×500 g $= 9000$ g $= 9$ kg.
   Il faut donc que

$$m_c(x) = 9$$

   ce qui équivaut successiveent à :

$$\begin{aligned} 1{,}35x &= 9 \\ \frac{1{,}35x}{1{,}35} &= \frac{9}{1{,}35} \\ x &= \frac{20}{3} \\ x &= 6{,}666\ldots \end{aligned}$$

   La masse de fruits à prévoir est de 6,7 kg (en arrondissant à l'hectogramme).

Exercice 3.

1. Dire que le reste de la division euclidienne de n par i est 0 signifie que i est un diviseur de n.
   Ainsi la liste ***résultats*** va contenir les diviseurs de 4.

   réponses est la liste (1,2,4).

2. (a) *réponses* est la liste des diviseur de l'entier naturel non nul entré.

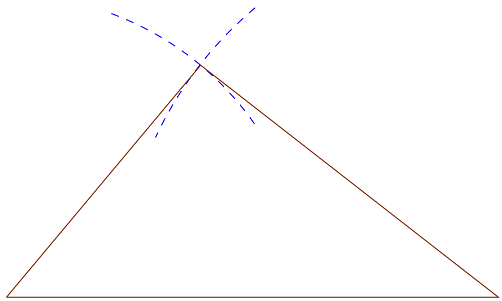
(b) Le seul entier naturel qui n'est qu'un seul diviseur est 1.

Si la liste ne contient qu'un nombre, alors l'entier entré était 1.

(c) Un entier naturel qui n'admet que deux diviseurs est un nombre premier.

Si la liste contient deux nombres, alors l'entier entré était un nombre premier.

Exercice 4.

1. 

2. Il faut que l'inégalité triangulaire soit vérifiée. Autrement dit :

   il faut que la somme des deux nombres obtenus soit supérieure ou égale à 6,5.

3. Modélisons le lancé de deux dés.
   Les issues sont des couples d'entiers compris entre 1 et 6. L'univers est donc l'ensemble de ces couples.
   Le fait que les dés soient équilibrés nous incitent à modéliser la situation avec la loi uniforme c'es-à-dire l'équiprobabilité.

   Dire que le triangle est constructible signifie que la somme des nombres obtenus est supérieure ou égale à 6,5. Notons A l'événement correspondant.

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   Puisqu'il y a équiprobabilité le calcul de probabilité se ramène à un dénombrement.
   Pour déterminer le nombre d'issues qui réalisent A représentons toutes les sommes possible sous forme d'un tableau.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ainsi il y a équiprobabilité, A est réalisé par 21 issues et l'univers comporte 36 issues donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{21}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \tfrac{7}{12}.}$$

4. L'expression « On sait que » suggère qu'il faut utiliser une probabilité conditionnelle.
   Notons B l'événement « obtenir un triangle isocèle ».

   Calculons $\mathbb{P}_A(B)$.

   $B = \{(1{,}1),\ (2{,}2),\ (3{,}3),\ (4{,}4),\ (5{,}5),\ (6{,}6)\ \}$.
   Donc : $A \cap B = \{(4{,}4),\ (5{,}5),\ (6{,}6)\ \}$.
   Il y a équiprobabilité, $A \cap B$ est réalisé par 3 issues et l'univers comporte 36 issues donc :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{36}$$

   Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A(B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\frac{3}{36}}{\frac{21}{36}} \\ &= \frac{3}{36}\left(\frac{7}{36}\right)^{-1} \\ &= \frac{3}{36}\cdot\frac{36}{7} \\ &= \frac{3}{7}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{3}{7}.$$

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2. (a)
   (b)
3.

Situation 2.

1.
2.

Situation 3.

1.
2.