# Épreuve de mathématiques CRPE 2018 supplémentaire de Paris-Créteil-Versailles.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

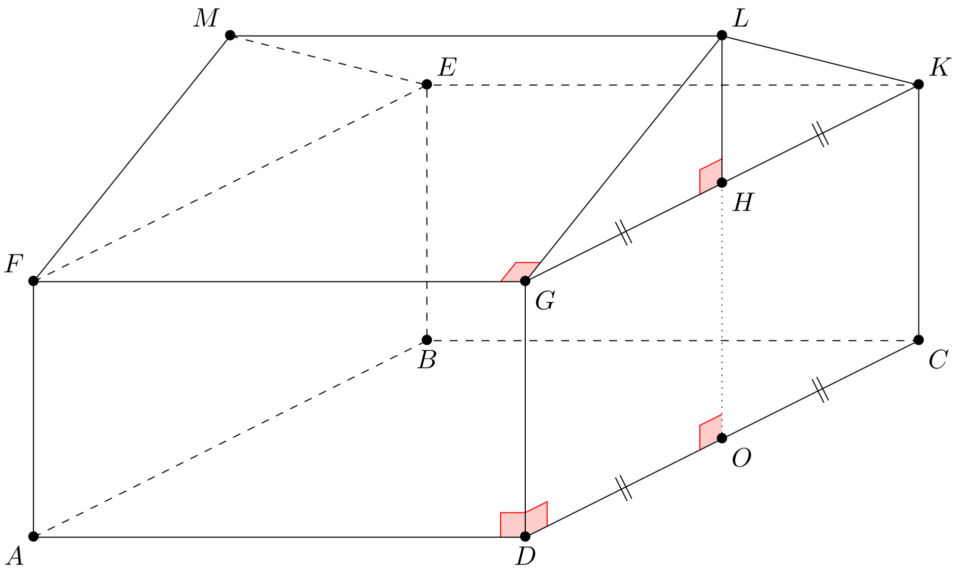
Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à M. Asius, M. Pic (son blog et sa page Facebook) et M. Gineste pour les corrections apportées.

*Durée : 4 heures.*
*Épreuve notée sur* 40.

## I Première partie (13 points).

Le propriétaire d'une maison individuelle souhaite construire dans son jardin une dépendance du type abri de jardin.




Les dimensions du bâtiment sont les suivantes : $AF = 2{,}6$ m ; $AD = 5$ m ; $DC = 6$ m et $LO = 4{,}2$ m.

On admet que les sept quadrilatères $ABCD$, $ADGF$, $DCKG$, $CKEB$, $BEFA$, $GLMF$ et $KEML$ sont des rectangles.

## Partie A : le bâtiment.

1. Déterminer la surface au sol $ABCD$ du bâtiment.

   Calculons l'aire $\mathscr{A}(ABCD)$ de $ABCD$.

   Puisque $ABCD$ est un rectangle

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= AD \times DC \\ &= (5\text{ m})(6\text{ m}) \\ &= 5 \times 6\text{ m} \times \text{m} \\ &= 30\text{ m}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ABCD) = 30\text{ m}^2.}$$

2. Vérifier que le volume du bâtiment est $102\text{ m}^3$.

   Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ du bâtiment.

   Pour calculer ce volume remarquons que le bâtiment est formé d'un parallélépipède rectangle et d'un prisme droit. Plus précisément, avec des notations évidentes :

$$\mathscr{V}_1 = \mathscr{V}(ABCDFEKG) + \mathscr{V}(EFGKLM)$$

   Or $ABCDEFKG$ étant un parallélépipède rectangle :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(ABCDEFKG) &= AD \times DC \times AF \\ &= (5\text{ m})(6\text{ m})(2{,}6\text{ m}) \\ &= 5 \times 6 \times 2{,}6\text{ m} \times \text{m} \times \text{m} \\ &= 78\text{ m}^3\end{aligned}$$

   et, $EFGKLM$ étant un prisme droit

$$\mathscr{V}(EFGKLM) = \mathscr{A}(LGK) \times FG$$

Puisque $LH$ est la hauteur de $LGK$ issue de $L$ :

$$\mathscr{V}(EFGKLM) = \frac{1}{2} \times LH \times GK + AD$$

Puisque $H \in [LO]$, $LH = LO - HO$ et donc :

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}(EFGKLM) &= \frac{1}{2} \times (LO - HO) \times GK \times AD \\
&= \frac{1}{2} \times (LO - AF) \times DC \times AD \\
&= \frac{1}{2} \times (4{,}2\text{ m} - 2{,}6\text{ m}) \times (6\text{ m}) \times (5\text{ m}) \\
&= \frac{1}{2} \times (4{,}2 - 2{,}6) \times 6 \times 5\text{ m} \times \text{m} \times \text{m} \\
&= 24\text{ m}^3
\end{aligned}$$

donc

$$\mathscr{V}_1 = 78\text{ m}^3 + 24\text{ m}^3$$

Finalement

$$\boxed{\mathscr{V}_1 = 102\text{ m}^3.}$$

**Partie B : le toit.**

1. Aire de la surface à couvrir.

   (a) Déterminer la longueur $LG$.

   Calculons $LG$.

   $GHL$ est rectangle en $H$, donc d'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned}
LG^2 &= GH^2 + HL^2 \\
&= DO^2 + (LO - HO)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}DC\right)^2 + (LO - AF)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot 6\right)^2 + (4{,}2 - 2{,}6)^2 \\
&= 11{,}56
\end{aligned}$$

$LG$ étant une longueur c'est un nombre positif, donc

$$\begin{aligned} LG &= \sqrt{11{,}56} \\ &= 3{,}4 \end{aligned}$$

$$\boxed{LG = 3{,}4 \text{ m}}$$

(b) Montrer que l'aire du toit est 34 m$^2$.

Déterminons l'aire $\mathscr{A}_1$ du toit.

Le toit est constitué de deux rectangles donc

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_1 &= \mathscr{A}(FGLM) + \mathscr{A}(LKEM) \\ &= 2\mathscr{A}(FGLM) \\ &= 2 \times FG \times LG \\ &= 2 \times AD \times LG \\ &= 2(5 \text{ m})(3{,}4 \text{ m}) \\ &= 2 \times 5 \times 3{,}4 \text{ m} \times \text{m} \\ &= 34 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = 34 \text{ m}^2.}$$

2. Le propriétaire souhaite, pour des raisons de coût, utiliser des tuiles dites « mécaniques »
Pour cela, la pente de la surface sur laquelle on pose les tuiles, mesurée par l'angle $\widehat{HGL}$ doit être comprise entre 25° et 60°.
La pente $\widehat{HGL}$ du toit permet-elle d'utiliser ce type de tuiles ?

Calculons une mesure de $\widehat{HGL}$.

Puisque $HGL$ est rectangle en $G$ :

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{HGL}) &= \frac{HG}{HL} \\ &= \frac{\frac{DC}{2}}{HL} \\ &= \frac{\frac{6}{2}}{3{,}4} \end{aligned}$$

Nous en déduisons avec la calculatice une mesure de l'angle :

$$\widehat{HGL} \approx 28{,}0724$$

L'angle $\widehat{HGL}$ mesure approximativement 28° et $25 \leqslant 28 \leqslant 60$, donc

$$\boxed{\text{le propriétaire pourra utiliser des tuiles mécaniques.}}$$

3. Le propriétaire opte pour des tuiles plates rectangulaires « petit moule » ayant une largeur de 23,5 cm et une longueur de 32 cm.
Le propriétaire recherche des informations pour estimer le nombre de tuiles à acheter.
   - Un site internet estime que pour ce type de tuiles il faut prévoir 20 tuiles au mètre carré pour prendre en compte les découpes et les chevauchements.
   - Un magazine professionnel estime qu'il faut déterminer le nombre de tuiles nécessaires pour couvrir la surface du toit et prévoir un tiers de tuiles en plus pour prendre en compte les découpes et les chevauchements.

   Avec laquelle de ces deux estimations obtient-on le nombre de tuiles le plus élevé ?

   Calculons le nombre maximum de tuiles.

   * Puisque chaque mètre carré nécessite 20 tuiles et que la surface du toit mesure 34 m$^2$ : $n_1 = 34 \times 20 = 680$ tuiles seront nécessaires.
   * Déterminons le nombre de tuiles nécessaires pour recouvrir le toit.
   La surface d'une tuile est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_2 &= (23{,}5 \text{ cm}) \times (32 \text{ cm})\\ &= \left(23{,}5 \times \frac{1}{100} \text{ m}\right) \times \left(32 \times \frac{1}{100} \text{ m}\right)\\ &= 23{,}5 \times \frac{1}{100} \times 32 \times \frac{1}{100} \text{ m} \times \times \text{m}\\ &= 0{,}0752 \text{ m}^2\end{aligned}$$

   Pour recouvrir le toit le nombre $n_2$ de tuiles nécessaire est

$$\begin{aligned}n_2 &= \frac{34}{0{,}0752}\\ &\approx 452{,}127\end{aligned}$$

En arrondissant $n_2 \approx 452$.

Mais il faut augmenter ce nombre de un tiers donc le nombre total de tuile doit être

$$\begin{aligned} n_3 &= n_2 + \frac{1}{3} n_2 \\ &= n_2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) \\ &\approx 602{,}8368 \\ &\approx 603 \end{aligned}$$

C'est avec l'estimation du site internet que l'on obtient le plus de tuiles.

4. Pour faire couvrir le toit avec ces tuiles, le propriétaire hésite entre deux possibilités :

**Possibilité 1** : faire effectuer la totalité des travaux par une entreprise. Elle demande 60 € pour couvrir un mètre carré de toit, matériaux compris.

**Possibilité 2** : il achète lui-même 700 tuiles (il décide d'en prendre un peu plus pour plus de sécurité) au prix de 1,35 € l'unité et fait effectuer la pose par une entreprise qui facture 900 € pour cette pose.

Quelle possibilité coûte le moins cher au propriétaire ?

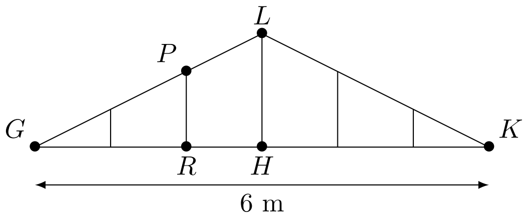
Calculons le montant des deux possibilités.

* Première possibilité.
  La surface du toit mesure 34 m$^2$ et chaque mètre carré coûterait 60 €, donc le coût total serait de $60 \times 34 = 2010$ €.
* Seconde possibilité.
  Il faut compter les 700 tuiles à 1,35 € l'une auxquels s'ajoutent les 900 € pour la pose. Le coût total serait alors de $700 \times 1{,}35 + 900 = 1845$ €.

La possibilité 2 coûte le moins cher.

**Partie C : les frontons.**

Pour décorer la partie de forme triangulaire le propriétaire décide de poser une poutre verticale tous les mètres pour obtenir un effet de « colombage » sur les deux frontons.




1. Déterminer la longueur $PR$. On donnera le résultat en mètre, arrondi au centimètre.

   Calculons $PR$.

   * Configuration de Thalès.
     Les points $G$, $P$, $L$ d'une part et $G$, $R$, $H$ sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèse du théorème de Thalès.
     Par construction les droites $PR$) et $(LH)$ sont parallèles.

   Des points précédents nous déduisons, grâce au théorème de Thalès,

   $$\frac{PR}{LH} = \frac{GR}{GH}.$$

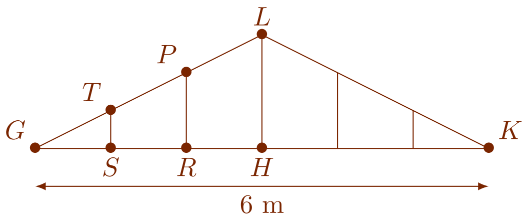
   Visiblement par construction $\frac{GR}{GH} = \frac{2}{3}$.
   Comme de plus $LH = LO - HO = LO - FA = 4{,}2 - 2{,}6 = 1{,}6$ m, nous en déduisons successivement

   $$\begin{aligned} \frac{PR}{1{,}6} &= \frac{2}{3} \\ \frac{PR}{1{,}6} \cdot 1{,}6 &= \frac{2}{3} \cdot 1{,}6 \\ PR &= \frac{16}{15} \\ &= 1{,}0666\ldots \end{aligned}$$

   Enfin

$PR \approx 1{,}07$ m, en arrondissant au centimètre.

2. Le vendeur affirme que le propriétaire aura besoin d'une longueur de bois égale à trois fois la longueur $LH$ pour décorer un fronton. A-t-il raison ?




En raisonnant comme à la question précédente il est aisé d'établir que $ST = \frac{1}{3}LH$ et $PR = \frac{2}{3}LH$ donc $ST + PR = LH$,. Par symétrie il en sera de même sur la partie droite.

Donc

Il faudra effectivement 3 fois le longueur $LH$ de bois pour décorer un fronton.

**Partie D : maquette.**

Léo le fils du propriétaire a réalisé une maquette du bâtiment à l'échelle. La surface au sol de sa maquette, correspondant au rectangle $ABCD$, a une aire de 480 cm$^2$.

1. Déterminer l'échelle de la maquette.

Déterminons l'échelle de la maquette.

Déterminons la proportion, $p_1$, de la surface au sol de la maquette par rapport à celle du bâtiment.

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{480 \text{ cm}^2}{30 \text{ m}^2} \\
&= \frac{480\left(\frac{1}{100} \text{ m}\right)^2}{30 \text{ m}^2} \\
&= \frac{480 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 \text{ m}^2}{30 \text{ m}^2} \\
&= \frac{480 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2}{30} \\
&= 0{,}0016
\end{aligned}
$$

Par conséquent la proportion $p_2$ des longueurs de la maquette par rapport à celles du bâtiment est

$$
\begin{aligned}
p_2 &= \sqrt{p_1} \\
&= \sqrt{0{,}0016} \\
&= 0{,}04 \\
&= \frac{4}{100}
\end{aligned}
$$

Finalement

$$\boxed{\text{La maquette est à l'échelle } 4/100.}$$

2. En déduire le volume, en centimètre cube, de la maquette.

Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ de la maquette.

Puisque le rapport de proportionnalité entre les longueurs de la maquette et du bâtiment est de 0,04, le rapport de proportionnalité entre les volumes est

$$
\begin{aligned}
p_3 &= p_2^3 \\
&= 0{,}04^3 \\
&= 6{,}4 \times 10^{-5}
\end{aligned}
$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_2 &= \mathscr{V}_1 \times p_3 \\
&= (102 \text{ m}^3) \times 6{,}4 \times 10^{-5} \\
&= 102 \times 6{,}4 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \\
&= 0{,}006528 \text{ m}^3 \\
&= 0{,}006528 \times (100 \text{ cm})^3 \\
&= 0{,}006528 \times 100^3 \text{ cm}^3 \\
&= 6528 \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_2 = 6528 \text{ cm}^3.}$$

# II Deuxième partie (13 points).

**Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.**

### Exercice 1.

Pour chacun des problèmes suivants, indiquer laquelle des cinq réponses proposées répond à la question posée.

Aucune justification n'est attendue.

1. Il y avait cinq perroquets dans la cage et leur prix moyen était de 5000 €. Un jour, pendant le nettoyage de la cage, le plus beau des perroquets s'est envolé. Le prix moyen des quatre perroquets restants est maintenant de 4000 €. Combien coûtait le perroquet qui s'est envolé ?

   A : 6 000 €

   B : 100 000 €

   C : 5 500 €

   D : 2 000 €

   E : 9 000 €

   Notons $x$ le prix, inconnu du perroquet envolé.

   Calculons $x$.

   Il s'agit d'une situation classique de moyenne de moyennes.

La moyenne est la somme des prix des perroquet divisé par le nombre total de perroquets. Autrement dit :

$$\frac{4 \times 4000 + x}{5} = 5000$$

Il s'agit d'une équation linéiare du premier degré nous la résolvons en isolant l'inconnue $x$. Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{16000 + x}{5} \cdot 5 &= 5000 \times 5 \\
16000 + x &= 25000 \\
16000 + x - 16000 &= 25000 - 16000 \\
x &= 9000
\end{aligned}$$

Réponse E.

2. Michel a 42 cubes identiques dont la longueur d'une arête est de 1 cm. Il construit un pavé en utilisant tous les cubes. Le périmètre de la face posée sur la table est de 18 cm. Quelle est la hauteur du pavé ?

A : 1 cm

B : 2 cm

C : 3 cm

D : 4 cm

E : 5 cm

* Analyse.

- La longueur $l$ et la profondeur $p$ du pavé vérifient $2(l+p) = 18$ donc $1 \leqslant l \leqslant 8$. De plus $l$ est un diviseur de 42 donc $l \in \{1; 2; 3; 6; 7\}$.
- De $2(l+p) = 18$ nous déduisons également $p = 9 - l$.

Des deux points précédents nous déduisons le tableau

| $l$ | 1 | 2 | 3 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p = 9 - l$ | 8 | 7 | 6 | 3 | 2 |

Mais $p \neq 8$ car $p$ est un diviseur de 42.
De même $l = 3$ et $p = 6$ (ou $l = 6$ et$p = 3$) est impossible car $3 \times 6$ n'est pas un diviseur de 42.
Ainsi, nécessairement, $l = 2$ et $p = 7$ ou $l = 7$ et $p = 2$. Dans ces deux cas la hauteur $h$ du pavé est : $h = \frac{42}{lp} = \frac{42}{2 \times 7} = 3$.

* Synthèse.
Les dimensions $l = 2$, $p = 7$ et $h = 3$ (ou $l = 2$, $p = 7$ et $h = 3$) conviennent effectivement.

Réponse C.

3. Raphaël met 15 minutes pour traverser la forêt et revenir sans s'arrêter. Sa vitesse moyenne à l'aller est de 5 mètres par seconde et au retour de 4 mètres par seconde. Quelle est la largeur de la forêt traversée ?

A : 1,8 km
B : 2 km
C : 2,5 km
D : 4 km
E : 4,05 km

Notons $x$ la largeur de la forêt exprimée en mètres.

Calculons $x$.

D'après l'énoncé

$$15 \text{ mn} = \frac{x \text{ m}}{5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} + \frac{x \text{ m}}{4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 15(60 \text{ s}) &= \frac{x}{5} + \frac{x}{4} \text{ s} \\ 900 \text{ s} &= \frac{9}{20}x \\ \frac{20}{9} \times 900 &= x \\ 2000 &= x \end{aligned}$$

La largeur de la forêt est de 2000 m, c'est-à-dire 2 km.

Réponse B.

**Exercice 2.**

Pour faire de la confiture, Grand-père ajoute à des mirabelles une masse de sucre égale aux quatre cinquièmes de la masse des fruits dénoyautés. La cuisson fait perdre 25 % de la masse du mélange. Après la cuisson, la confiture est conditionnée dans des pots de 500 g. Les pots doivent être remplis pour une bonne conservation

1. Aujourd'hui Grand-père a récolté des mirabelles ; après les avoir dénoyautées, il a obtenu 5 kg de fruits. Combien de pots de confiture peut-il remplir ?

   Nous allons faire le raisonnement pour un nombre $x$ quelconque de kilogrammes de fruits car les questions suivantes nécessitent les mêmes calculs.

   Calculons le nombre de pot obtenus avec $x$ kilogrammes de fruits.

   La masse obtenue après ajout d'une masse de sucre égale aux quatre cinquième de la masse de fruit :

$$\begin{aligned} m_s(x) &= x + \frac{4}{5}x \\ &= \left(1 + \frac{4}{5}\right)x \\ &= 1{,}8x \end{aligned}$$

   La cuisson faisant perdre 25 % de la masse, la masse après cuisson est de

$$\begin{aligned} m_c(x) &= \left(1 + \frac{-25}{100}\right)m_s(x) \\ &= 0{,}75 \times 1{,}8x \\ &= 1{,}35x \end{aligned}$$

   Ainsi pour 5 kg,

$$\begin{aligned} m_c(5) &= 1{,}35 \times 5 \text{ kg} \\ &= 6{,}75 \text{ kg} \\ &= 6{,}75(1000 \text{ g}) \\ &= 6750 \text{ g} \end{aligned}$$

   Pour connaître le nombre de pots nécessaires procédons à une division euclidienne

$$6750 = 13 \times 500 + 250.$$

Il peut remplir 13 pots avec 5 kg de fruits.

2. La masse de confiture obtenue par le procédé suivi par Grand-père est-elle proportionnelle à la masse de mirabelles dénoyautées ? Justifier votre réponse.

   Nous avons obtenus à la question précédente que la masse de confiture obtenue pour $x$ kilogrammes de fruits est $m_c(x) = 7{,}75x$. Il s'agit d'une application linéaire donc

   la masse de confiture est proportionnelle à la masse de fruits.

3. Grand-père souhaite obtenir 18 pots de confiture. Déterminer la masse $m$ minimum de mirabelles dénoyautées que Grand-père devra prévoir. On arrondira la masse à l'hectogramme près.

   Déterminons la masse $x$ de fruit nécessaire pour remplir 18 pots.

   Chaque pot contenant 500 g, il faut donc $18 \times 500$ g $= 9000$ g $= 9$ kg.
   Il faut donc que

$$m_c(x) = 9$$

   ce qui équivaut successiveent à :

$$\begin{aligned} 1{,}35x &= 9 \\ \frac{1{,}35x}{1{,}35} &= \frac{9}{1{,}35} \\ x &= \frac{20}{3} \\ x &= 6{,}666\ldots \end{aligned}$$

   La masse de fruits à prévoir est de 6,7 kg (en arrondissant à l'hectogramme).

**Exercice 3.**

Le programme ci-dessous est utilisé.


On rappelle qu'une « liste » est une suite d'éléments, ici une suite de nombres. Par exemple, $(17; 245; 32)$ est une liste de trois nombres.

On rappelle également que la fonction « a modulo b », où $a$ et $b$ sont des entiers naturels, renvoie le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$.

Ainsi, « 10 modulo 3 », renvoie le nombre 1 car $10 = 3 \times 3 + \mathbf{1}$, et « 35 modulo 7 », renvoie le nombre 0 car $35 = 5 \times 7 + \mathbf{0}$.

1. Que va contenir la liste « résultats » une fois le programme exécuté, si l'utilisateur entre le nombre 4 ?

   Dire que le reste de la division euclidienne de $n$ par $i$ est 0 signifie que $i$ est un diviseur de $n$.
   Ainsi la liste ***résultats*** va contenir les diviseurs de 4.

   *réponses* est la liste (1,2,4).

2. L'utilisateur entre un nombre entier naturel non nul.

   (a) Que va contenir la liste « résultats » une fois le programme exécuté ?

   *réponses* est la liste des diviseur de l'entier naturel non nul entré.

(b) Que peut-on dire sur le nombre entré par l'utilisateur si la liste ne contient qu'un nombre une fois le programme exécuté ?

Le seul entier naturel qui n'est qu'un seul diviseur est 1.

> Si la liste ne contient qu'un nombre, alors l'entier entré était 1.

(c) Que peut-on dire sur le nombre entré par l'utilisateur si la liste contient exactement deux nombres une fois le programme exécuté ?

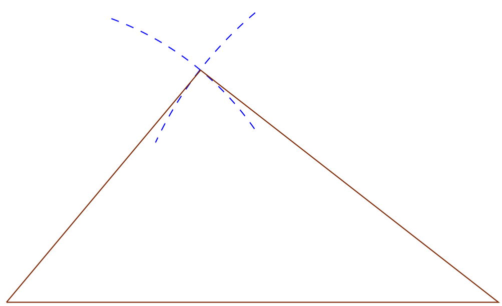
Un entier naturel qui n'admet que deux diviseurs est un nombre premier.

> Si la liste contient deux nombres, alors l'entier entré était un nombre premier.

**Exercice 4.**

On a tracé un segment de 6,5 cm. À partir de ce segment, on cherche à construire un triangle en utilisant les valeurs obtenues par le lancer de deux dés cubiques équilibrés de couleurs différentes dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. La valeur obtenue par chacun des deux dés déterminera les longueurs, en centimètre, des deux autres côtés du triangle.

1. Le lancer des dés donne les nombres « 4 » et « 5 ». Construire le triangle que ce lancer permet d'obtenir.



2. Quelle condition doivent remplir les deux longueurs obtenues avec les dés pour que le triangle soit constructible ?

Il faut que l'inégalité triangulaire soit vérifiée. Autrement dit :

il faut que la somme des deux nombres obtenus soit supérieure ou égale à 6,5.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir un triangle constructible en effectuant cette expérience aléatoire ?

Modélisons le lancé de deux dés.

Les issues sont des couples d'entiers compris entre 1 et 6. L'univers est donc l'ensemble de ces couples.

Le fait que les dés soient équilibrés nous incitent à modéliser la situation avec la loi uniforme c'es-à-dire l'équiprobabilité.

Dire que le triangle est constructible signifie que la somme des nombres obtenus est supérieure ou égale à 6,5. Notons $A$ l'événement correspondant.

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Puisqu'il y a équiprobabilité le calcul de probabilité se ramène à un dénombrement.

Pour déterminer le nombre d'issues qui réalisent $A$ représentons toutes les sommes possible sous forme d'un tableau.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Ainsi il y a équiprobabilité, $A$ est réalisé par 21 issues et l'univers comporte 36 issues donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{21}{36}$$

$\mathbb{P}(A) = \frac{7}{12}$.

4. On sait que l'on a obtenu un triangle constructible en effectuant cette expérience aléatoire.

Quelle est la probabilité pour qu'il soit isocèle ?

L'expression « On sait que » suggère qu'il faut utiliser une probabilité conditionnelle.
Notons $B$ l'événement « obtenir un triangle isocèle ».

Calculons $\mathbb{P}_A(B)$.

$B = \{(1{,}1),\ (2{,}2),\ (3{,}3),\ (4{,}4),\ (5{,}5),\ (6{,}6)\ \}$.
Donc : $A \cap B = \{(4{,}4),\ (5{,}5),\ (6{,}6)\ \}$.
Il y a équiprobabilité, $A \cap B$ est réalisé par 3 issues et l'univers comporte 36 issues donc :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{36}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_A(B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\frac{3}{36}}{\frac{21}{36}} \\
&= \frac{3}{36}\left(\frac{21}{36}\right)^{-1} \\
&= \frac{3}{36} \cdot \frac{36}{21} \\
&= \frac{3}{21}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_A(B) = \tfrac{1}{7}.}$$

Il est possible d'avoir une approche plus élémentaire en considérant qu'il s'agit d'un changement de modélisation.
Dans cette nouvelle modélisation l'univers est formé des couples d'entiers compris entre 1 et 6 dont la somme est supérieure à 7 (il s'agit des cas de triangles constructibles). Il y a équiprobabilité. Cet univers contient 21 issues (correspondant au nombres en bleu du tableau de la question précédente).
L'événement « le triangle est isocèle » est réalisé par 3 issues donc

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{3}{21}.$$

# III Troisième partie (14 points).

**Cette partie est composée de trois situations indépendantes.**

### Situation 1.

1. Le problème suivant est proposé à une classe de CM2.

> Une boîte de sucres contient des morceaux de sucre tous identiques.
>
> 30 morceaux de sucre pèsent 240 grammes.
> 50 morceaux de sucre pèsent 400 grammes.
> Dans chaque cas, complète la réponse.
>
> Question 1 : 60 morceaux de sucre pèsent...
> Question 2 : 80 morceaux de sucre pèsent...
> Question 3 : 20 morceaux de sucre pèsent...

Quelle est la principale notion du programme de cycle 3 abordée par ce problème ?

2. Voici huit réponses d'élèves à ce problème, codées de A à H.

| | Réponse de l'élève | Écrits de recherche |
|---|---|---|
| A | 60 morceaux de sucre pèsent ... 480 grammes | $240 \times 2 = 480$ |
| B | 60 morceaux de sucre pèsent ...480 grammes | $400 + 80 = 480$ |
| C | 60 morceaux de sucre pèsent ...24 000 grammes | $400 \times 60 = 24\,000$ |
| D | 20 morceaux de sucre pèsent ...160 grammes | $400 - 240 = 160$ |
| E | 20 morceaux de sucre pèsent ...160 grammes | $240 : 30 = 8$<br>$20 \times 8 = 160$ |
| F | 20 morceaux de sucre pèsent ...160 grammes | $60 : 3 = 20$<br>$480 : 3 = 160$ |
| G | 20 morceaux de sucre pèsent ...230 grammes | $240 - 10 = 230$ |
| H | 80 morceaux de sucre pèsent ...640 grammes | $240 + 400 = 640$ |

(a) Deux des réponses sont erronées. Les repérer et les analyser.

(b) Analyser et classer les procédures des autres réponses.

3. L'enseignant souhaite amener ses élèves à recourir à la procédure de retour à l'unité. Le problème suivant figure dans leur manuel :
« Pour la fête de fin d'année de l'école de rugby, on vend des paquets de chocolat. Karim achète 5 paquets et paie 8 €. Dellia veut acheter 15 paquets, combien va-t-elle payer ? ».
Proposer une modification des données de cet énoncé pour lui permettre d'atteindre cet objectif.

### Situation 2.

Lors d'une séance de calcul, l'enseignant relève ces quatre réponses d'élèves :

| | |
|---|---|
| a. $2{,}3 \times 10 = 2{,}30$ | b. $\frac{1}{4} = 1{,}4$ |
| c. $45{,}6 < 45{,}13$ | d. $2{,}15 + 17{,}2 = 19;17$ |

1. Pour chaque réponse d'élève, émettre une conjecture sur le raisonnement erroné qui a pu conduire à l'erreur faite.
2. Proposer deux situations de remédiation pour amener l'élève qui a donné la réponse c. à comprendre son erreur.

### Situation 3.

Dans une classe de CM2, un enseignant propose le problème ci-dessous :


En utilisant les informations données par ces trois dessins, détermine combien pèsent Dédé, le petit Francis et le chien Boudin.

D'après Deledicq A. et Missenard C., *Encyclopédie Kangourou des mathématiques au collège*, ACL éditions, 1996.

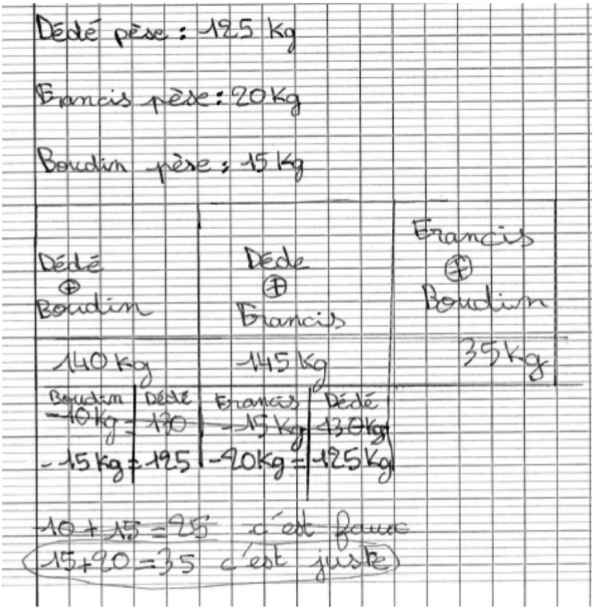
Dans les programmes de mathématiques pour le cycle 3, les six compétences travaillées en mathématiques sont les suivantes : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

Deux productions d'élèves sont présentées ci-dessous.

1. Analyser les productions de chaque élève au regard des deux compétences communiquer et raisonner.

2. En quoi les deux élèves ont-ils mobilisé la compétence modéliser ?

Production de Nina :



Dédé pèse : 125 Kg

Francis pèse : 20 Kg

Boudin pèse : 15 Kg

| Dédé + Boudin | Dédé + Francis | Francis + Boudin |
|---|---|---|
| 140 Kg | 145 Kg | 35 Kg |

Boudin −10 Kg = Dédé 130 −15 Kg = 125 | Francis −15 Kg = Dédé 130 Kg −20 Kg = 125 Kg

~~10 + 15 = 25 c'est faux~~

15 + 20 = 35 c'est juste

Production de Yohan :

Réponse : le grand Dédé fait 125 Kg petit francis fait 20 Kg et le chien Boudin fait 15 Kg

Justification : Je me suis dit que petit francis faisait 5 Kg de plus que chien Boudin parce que peti francis et Grand Dédé faisaient en tout 145 Kg et Grand Dédé et chien Boudin faisaient en tout 140 Kg ~~alors~~. Et je me dit que peut-être petit francis faisai 20 Kg ~~et~~ et chien Boudin 15 Kg et j'ai fait 145 Kg - 20Kg = 125 et 140 - 15 = 125 et j'ai trouvé que Grand Dédé faisaient 125 Kg petit francis faisai 20 et chien Boudin faisai 15 Kg.