Épreuve de mathématiques CRPE 2018 groupe 4.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Un grand merci à M. Journot pour ses corrections.

I Première partie (13 points).

Partie A : une construction.

1. (a) Nous allons ici déterminer AD comme si l'énoncé ne nous avait pas donné sa valeur, cependant il est tout à fait possible de simplement vérifier que la valeur proposée fonctionne en s'assurant que les rapports de proportionnalité sont les mêmes.

Déterminons AD.

Les longueurs réelles et les longueurs sur le plan doivent toutes être dans le même rapport de proportionnalité.

$$\frac{AD}{AD_{\text{réelle}}} = \frac{AB}{AB_{\text{réelle}}}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{AD_{\text{réelle}}} \times AD_{\text{réelle}} &= \frac{AB}{AB_{\text{réelle}}} \times AD_{\text{réelle}} \\
AD &= \frac{AB}{AB_{\text{réelle}}} \times AD_{\text{réelle}} \\
AD &= \frac{7{,}7 \text{ cm}}{308 \text{ m}} \times (132 \text{ cm}) \\
&= \frac{7{,}7 \times 132}{308} \, \frac{\text{cm} \cdot \text{m}}{\text{m}} \\
&= 3{,}3 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Nous avons bien vérifié que $AD = 3{,}3$ cm.

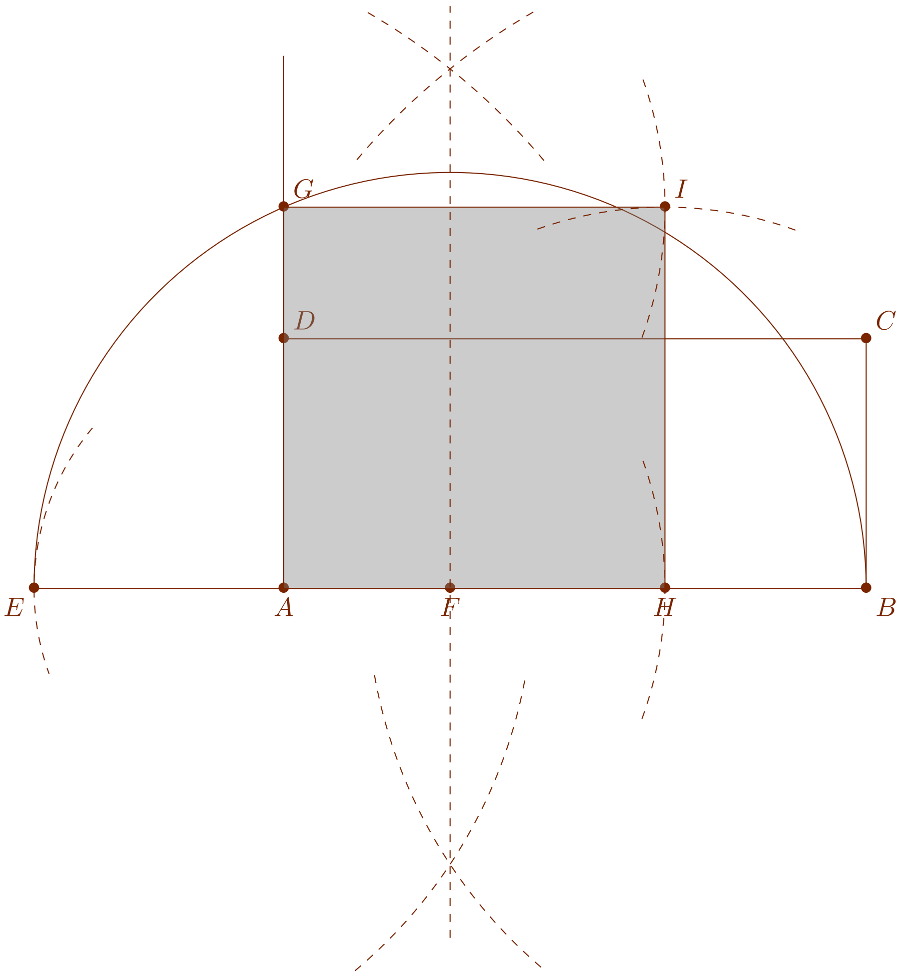
(b) Déterminons l'échelle de ce plan.

L'échelle est le rapport de proportionnalité entre les longueurs dessinées et les longueurs réelles donc elle vaut

$$\begin{aligned}
e &= \frac{AB}{AB_{\text{réelle}}}\\
&= \frac{7{,}7\ \text{cm}}{308\ \text{m}}\\
&= \frac{7{,}7}{308}\ \frac{\text{cm}}{\text{m}}\\
&= 0{,}025\ \frac{\text{cm}}{100\ \text{cm}}\\
&= \frac{0{,}025}{100}\ \frac{\text{cm}}{\text{cm}}\\
&= 0{,}00025\\
&= \frac{1}{4000}
\end{aligned}$$

Le plan est à l'échelle $\frac{1}{4000}$.

(c) Je n'ai pas laissé les traits de constructions du rectangle initial $ABCD$.



(d) * Calculons EB.

$$\begin{aligned} EB &= EA + AB \\ &= AD + AB \\ &= BC + AB \\ &= 3{,}3 \text{ cm} + 7{,}7 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{EB = 11 \text{ cm.}}$$

* Calculons EF.

$$\begin{aligned} EF &= \frac{1}{2} EB \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{EF = 5{,}5 \text{ cm.}}$$

* Calculons AF.

$$\begin{aligned} AF &= EF - EA \\ &= EF - BC \\ &= 5{,}5 \text{ cm} - 3{,}3 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{AF = 2{,}2 \text{ cm.}}$$

* Calculons FG.

$$FG = EF$$

$$\boxed{FG = 5{,}5 \text{ cm.}}$$

(e) Calculons l'aire $\mathscr{A}(AGIH)$ de $AGIH$.

$$\mathscr{A}(AGIH) = AG^2$$

AFG étant rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore

$$FG^2 = AF^2 + AG^2,$$

donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AIGH) &= FG^2 - AF^2\\ &= (5{,}5\text{ cm})^2 - (2{,}2\text{ cm})^2\\ &= 5{,}5^2\text{ cm}^2 - 2{,}2^2\text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(AIGH) = 25{,}41\text{ cm}^2.}$$

(f) Question classique : si les longueurs sont multipliées par x les aires sont multipliées par ? La réponse est alors x^2. Cependant nous allons procéder naïvement en recalculant l'aire du carré.

Calculons l'aire, $\mathscr{A}_1$ du carré correspondant dans la réalité.

En reprenant le raisonnement de la question précédente nous obtenons :

$$\begin{aligned}AG &= \sqrt{FG^2 - AF^2}\\ &= \sqrt{5{,}5^2 - 2{,}2^2}\\ &= \sqrt{25{,}41}\end{aligned}$$

Donc la longueur réelle du côté du carré est

$$\ell = 4000\sqrt{25{,}41}\text{ cm}$$

Nous en déduisons l'aire du carré :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1 &= \left(4000\sqrt{25{,}41}\right)^2\text{ cm}^2\\ &= 406\,560\,000\text{ cm}^2\\ &= 406\,560\,000\left(\frac{1}{100}\text{ m}\right)^2\\ &= 406\,560\,000 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2\text{ m}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = 40\,656\text{ m}^2.}$$

Calculons l'aire $\mathscr{A}_2$ du terrain rectangulaire initial.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_2 &= (308 \text{ m}) \times (132 \text{ m}) \\ &= 308 \times 132 \text{ m}^2 \\ &= 40\,656 \text{ m}^2\end{aligned}$$

Nous avons bien $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$.

2. Soient a et b des réels positifs avec $a > b$.
Posons $AB = a$ et $BC = b$.

En raisonnant comme précédemment :

$$\begin{aligned}AF &= EF - BC \\ &= \frac{1}{2}EB - b \\ &= \frac{1}{2}(a+b) - b\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}AG &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(a+b) - b\right)^2} \\ &= \sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) - \left(\frac{1}{2}(a+b) - b\right)\right] \times \left[\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) + \left(\frac{1}{2}(a+b) - b\right)\right]} \\ &= \sqrt{ba}\end{aligned}$$

Donc l'aire $\mathscr{A}_3$ du carré est :

$$\mathscr{A}_3 = ab$$

Nous retrouvons bien l'aire du rectangle initial.

L'affirmation de l'architecte est vraie.

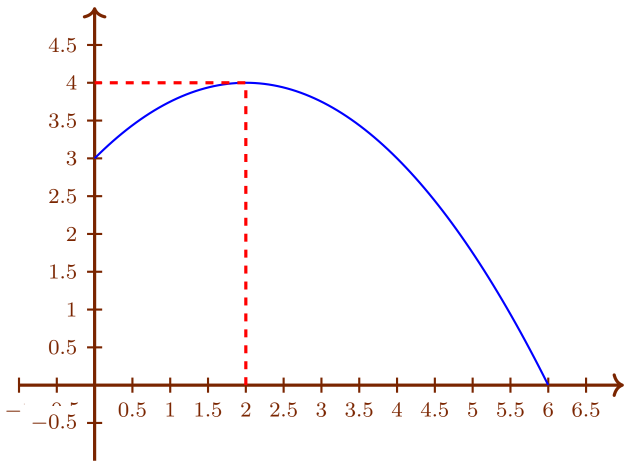
Partie B : aménagement d'une fontaine.

1. (a) D'après l'énoncé $(0;3)$ est un point de la courbe. Par conséquent

   la goutte sort à une hauteur de 3 m.

   (b) D'après l'énoncé $(6;0)$ est un point de la courbe. Par conséquent

   la goutte retombe à 6 m du centre du carré.



   (c)

   La goutte atteint une hauteur de 4 m.

2. (a) Déterminons $f(0)$.

$$f(0) = -\frac{1}{4} \times 0^2 + b \times 0 + c$$

   donc

   $f(0) = c$.

   Déterminons $f(6)$.

$$f(6) = -\frac{1}{4} \times 6^2 + b \times 6 + c$$

donc

$$\boxed{f(6) = 6b + c - 9.}$$

(b) Déterminons b et c.

$(0;3)$ et $(6;0)$ sont des points de la courbe représentative de f ce qui équivaut successivement à

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(6) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 3 \\ 6b + c - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 3 \\ 6b + 3 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 3 \\ 6b = 6 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} c = 3 \\ b = 1 \end{cases}.}$$

(c) Vérifions que, pour tout $x \in [0;6]$, $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$.

Soit $x \in [0;6]$.

Pour démontrer l'égalité nous allons partir du membre de gauche pour arriver à celui de droite (en fait la forme développée de f).

$$\begin{aligned}
-(x-2)^2+4 &= -\frac{1}{4}(x^2-2\times x\times 2+2^2)+4\\
&= -\frac{1}{4}(x^2-4x+4)+4\\
&= \left(-\frac{1}{4}\right)\times x^2+\left(-\frac{1}{4}\right)\times(-4x)+\left(-\frac{1}{4}\right)\times 4+4\\
&= -\frac{1}{4}x^2+x-1+4\\
&= -\frac{1}{4}x^2+x+3\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que,

$$\boxed{\text{quelque soit } x\in[0;6],\ -\tfrac{1}{4}\left(x-2)\right)^2+4=f(x).}$$

Nous pouvions également remarquer qu'il s'agissait de déterminer la forme canonique de la fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ qui est polynomiale de degré deux et utiliser le fait que $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ et donc $f(x) = -a(x-\alpha)^2+\beta$.

(d) Déterminons la hauteur maximale atteinte par une goutte d'eau.

$f : x \mapsto -\frac{1}{4}(x-2)^2+4$ est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous canonique avec $a=-\frac{1}{4}$, $\alpha=2$ et $\beta=4$.
Puisque $a<0$ la courbe représentative de f est une parabole orientée vers le bas.
Nous en déduisons le tableau de variation de f.

x	0		2		6
f			4		
	3	$\nearrow$		$\searrow$	0

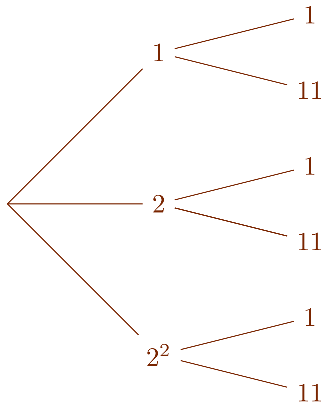
D'après ce tableau de variation f admet un maximum égale à 4 qui est atteint pour $x=2$.

$$\boxed{\text{La hauteur maximale atteinte par la goutte est de 4 m.}}$$

Partie C : un peu de verdure.

1. Déterminons toutes les distances entre arbustes possibles.

   Puisque la distance est un nombre entier nécessairement il s'agit d'un diviseur de 308 et de 132. Déterminons donc tous les diviseurs communs à ces deux entiers autrement dit il faut trouver les diviseurs de leur pgcd.
   Nous avons les décompositions en facteurs premiers suivantes : $308 = 2^2 \times 7 \times 11$ et $132 = 2^2 \times 3 \times 11$. Donc le pgcd de 308 et 132 est $2^2 \times 11$.
   représentons tous les diviseurs communs sous forme d'un arbre.

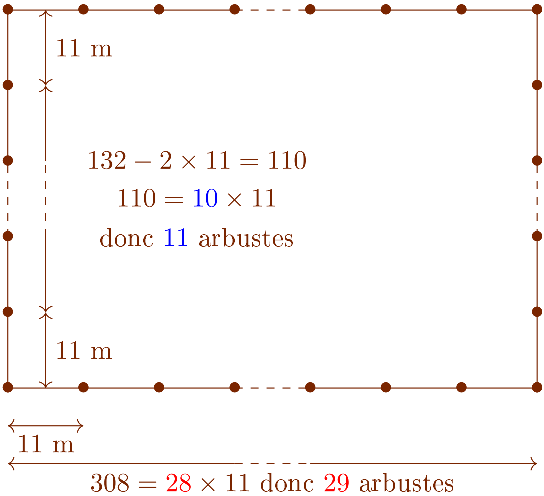


   $$\boxed{\text{La distance entre deux arbustes est dans } \{1, 11, 2, 22, 4, 44\}.}$$

2. Déterminons le nombre d'arbustes.

   La distance entre deux arbustes est un nombre premier pris dans $\{1, 11, 2, 22, 4, 44\}$ il ne peut donc s'agir que de 2 ou de 11. Comme de plus la distance est supérieure à 3 il ne peut s'agir que de 11 m.

   Pour ne pas oublier de compter les arbres dans les coins faisons un schéma.



Il y a donc $2 \times 29 + 2 \times 11 = 80$ arbustes.

L'architecte dispose de 80 arbustes.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Nous pouvons imaginer un arbre (qui est un peu trop grand pour être dessiné) de quatre niveaux. De chaque nœud part un embranchement de sept branches. Cela fera au total $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$ chemins.

   Une autre façon de voir les choses : il faut choisir un premier chiffre parmi les 7 possibilités, pour chaque choix du premier chiffre il y aura 7 choix pour le deuxième, et ainsi de suite jusqu'à avoir choisi 4 chiffres. Donc il a 7^4 combinaisons possibles.

   Avec la calculatrice : $7^4 = 2\,401$.

   Réponse D.

2. Pour comprendre les programmes remarquons d'abord qu'ils sont chacun formé de deux boucles imbriquées. De plus les boucles peuvent être soit répétées trois fois avec des angles de 120°, ce qui trace un triangle équilatéral, soit répétées quatre fois avec des angles de 90°, ce qui trace un carré.

De plus les carrés et triangles tracés peuvent être soit grands (avancées de 200) soit petits (avancée de 80).
Nous obtenons ainsi que le programme 1 correspond à la figure C, le programme 3 à la B et le programme 2 à la A.

Réponse D.

3. La distance parcourue en 1 m 30 s est

$$\begin{aligned} d &= (1\text{ h } 30 \text{ min}) \times \left(70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right) \\ &= (1 \times 3600 \text{ s} + 30 \times 60 \text{ s}) \times \left(70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right) \\ &= ((3600 + 1800)\ \text{ s}) \times \left(70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right) \\ &= 5400 \times 70 \text{ s} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= 378\,000 \text{ m} \\ &= 378\,000\ \frac{1}{1000}\text{km} \\ &= 378 \text{ km} \end{aligned}$$

Nous avons la situation de proportionnalité

Distance	100 km	378 km
Essence	17 L	$\frac{17 \text{ L}}{100 \text{ km}} \times 378 \text{ km} = 64{,}26 \text{ L}$

Réponse D.

Exercice 2.

1. Calculons le rayon r_3 du gâteau n° 3.

Pour déterminer la quantité représentée par une proportion il suffit de multiplier la quantité totale par la proportion.

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{3}{4} \times r_2 \\ &= \frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{3} \times r_1\right) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 30 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$r_3 = 15 \text{ cm}.$$

2. Calculons le volume total, $\mathscr{V}_t$, de la pièce montée.

   Commençons par calculer le volume $\mathscr{V}_1$ du cylindre 1. Le volume d'un cylindre est le produit de la longueur de la hauteur par l'aire de la base qui est ici un disque.

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= (10 \text{ cm}) \times \pi r_1^2 \\ &= (10 \text{ cm}) \times \pi\,(30 \text{ cm})^2 \\ &= 10 \times \pi \times 30^2 \text{ cm} \cdot \text{cm}^2 \\ &= 9\,000\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

   De même :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= (10 \text{ cm}) \times \pi r_2^2 \\ &= (10 \text{ cm}) \times \pi \left(\frac{2}{3} r_1\right)^2 \\ &= (10 \text{ cm}) \times \pi \left(\frac{2}{3} \times 30 \text{ cm}\right)^2 \\ &= 10 \times \pi \times \left(\frac{2}{3} \times 30\right)^2 \text{ cm} \cdot \text{cm}^2 \\ &= 4\,000\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

   et :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_3 &= (10 \text{ cm}) \times \pi r_3^2 \\ &= (10 \text{ cm}) \times \pi\,(15 \text{ cm})^2 \\ &= 10 \times \pi \times 15^2 \text{ cm} \cdot \text{cm}^2 \\ &= 2\,250\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

   Nous en déduisons le volume total :

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \mathscr{V}_1 + \mathscr{V}_2 + \mathscr{V}_3 \\ &= 9\,000 \text{ cm}^3 + 4\,000 \text{ cm}^3 + 2\,250 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$9\,000 \text{ cm}^3 + 4\,000 \text{ cm}^3 + 2\,250 \text{ cm}^3 = 15\,250 \text{ cm}^3.$$

3. Calculons la proportion, p_3, représentée par le gâteau 3 par rapport à l'ensemble.

$$p_3 = \frac{\mathscr{V}_3}{\mathscr{V}} = \frac{2\,250 \text{ cm}^3}{15\,250 \text{ cm}^3}$$

En procédant à la décomposition en facteurs premiers des numérateurs et dénominateurs :

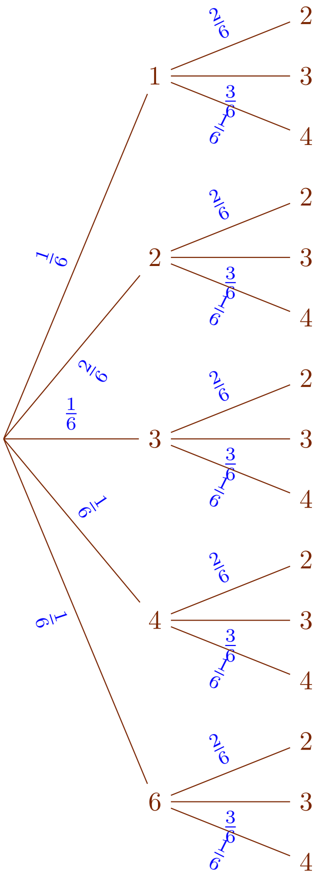
$$p_3 = \frac{2 \times 3^2 \times 5^3}{2 \times 5^3 \times 61} = \frac{3^2}{61}$$

$$p_3 = \frac{9}{61}.$$

Exercice 3.

Notons Ω l'ensemble des couples formés d'un élément pris dans $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ et d'un autre élément pris dans $\{2, 3, 4\}$.

Schématisons l'expérience par l'arbre suivant :



Issues.	Sommes.	Jetons.
(1; 2)	3	0
(1; 3)	4	1
(1; 4)	5	0
(2; 2)	4	1
(2; 3)	5	0
(2; 4)	6	3
(3; 2)	5	0
(3; 3)	6	3
(3; 4)	7	0
(4; 2)	6	3
(4; 3)	7	0
(4; 4)	8	1
(6; 2)	8	1
(6; 3)	9	0
(6; 4)	10	1

Notons X la variable aléatoire qui à chaque lancé associe le nombre de jetons obtenus.

Il est possible ici de choisir une schématisation plus simple avec un tableau double entrée avec en entrées les faces des deux dés et dans le tableau le nombre de jetons gagnés :

	1	2	2	3	4	6
2	0	1	1	0	3	1
2	0	1	1	0	3	1
3	1	0	0	3	0	0
3	1	0	0	3	0	0
3	1	0	0	3	0	0
4	0	3	3	0	1	1

Remarquons que cette seconde schématisation utilise directement la loi d'équiprobabilité ce qui n'est pas le cas de la précédente modélisation.

1. Puisque 4 est obtenu avec le premier dé et que 1 jeton a été obtenu nécessairement le seul résultat possible pour le second dé parmi $\{2, 3, 4\}$ est 4.

   Le résultat obtenu avec le deuxième fruit est 4.

2. Calculons $\mathbb{P}(X = 3)$.

   $\{X = 3\} = \{(2; 4), (3; 3), (4; 2)\}$
   Donc :

   $$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(2; 4) + \mathbb{P}(3; 3) + \mathbb{P}(4; 2)$$

   D'après le principe multiplicatif (probabilité conditionnelle) :

   $$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6}$$

   $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{7}{36}$.

   Calculons à nouveau $\mathbb{P}(X = 3)$ mais en nous appuyant sur la seconde modélisation.
   Il y a équiprobabilité entre les issues (les couples) et d'après le tableau double entrée $\{X = 3\}$ est réalisé par 7 issues alors que Ω contient 36 issues donc :

   $$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{7}{36}$$

3. Calculons $\mathbb{P}(X = 0)$.

$\{X = 0\} = \{(1;2), (1;4), (2;3), (3;2), (3;4), (4;3), (6;3)\}$
Donc :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(1;2) + \mathbb{P}(1;4) + \mathbb{P}(2;3) + \mathbb{P}(3;2) + \mathbb{P}(3;4) + \mathbb{P}(4;3) + \mathbb{P}(6;3)$$

D'après le principe multiplicatif :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 0) = \tfrac{1}{2}.}$$

4. Calculons $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 1) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{X \geqslant 1}\right)\\ &= 1 - \mathbb{P}\left(X < 1\right)\end{aligned}$$

Et puisque $X \in \{0;1;3\}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant 1) = \tfrac{1}{2}.}$$

Exercice 4.

1. (a)

Prendre un nombre	4
Ajouter 3 à ce nombre	$4 + 3 = 7$
Élevé la somme précédente au carré	$7^2 = 49$
Retranché le carré du nombre de départ au résultat précédent	$49 - 4^2 = 33$

Si on choisi 4 alors le programme renvoie 33.

(b) Nous pourrions recommencer comme à la question précédente mais nous allons plutôt généraliser.

Déterminons la valeur, $f(x)$, renvoyée par le programme si la valeur de départ est x.

Prendre un nombre	x
Ajouter 3 à ce nombre	$x+3$
Élevé la somme précédente au carré	$(x+3)^2$
Retranché le carré du nombre de départ au résultat précédent	$(x+3)^2 - x^2$

Donc $f(x) = (x+3)^2 - x^2$.
En particulier : $f(4{,}2) = (4{,}2+3)^2 - 4{,}2^2 = 34{,}2$.

Si on choisi 4,2 alors le programme renvoie 34,2.

(c) $f(x) = (x+3)^2 - x^2$.
En particulier : $f\left(\frac{7}{10}\right) = \left(\frac{7}{10}+3\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{66}{5}$.

Si on choisi $\frac{7}{10}$ alors le programme renvoie $\frac{66}{5}$.

2. En B3 : = B2 + 3.
En B4 : = B3 ∧ 3.
En B5 : = B4 − B2.

3. (a) Résolvons l'équation $f(x) = 0$.

Nous pourrions développer l'expression trouvée pour f et nous trouverions aussi bien la solution. Ceci dit a priori la recherche des solutions d'une équation consiste plutôt à faire apparaître une équation produit-nul. C'est ce que nous allons faire.

$$f(x) = 0 \leftrightarrow (x+3)^2 - x^2 = 0$$

En reconnaissant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow [(x+3) - x] \times [(x+3) + x] = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \times (2x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = -3 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\mathscr{S} = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

L'affirmation 1 est fausse.

(b) Démontrons que l'affirmation 2 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Incidemment, lors de la précédente question nous avons démontré que $f(n) = 3(2n+3)$. Et puisque n est un entier $2n+3$ en est aussi un et $f(n)$ est donc divisible par 3.

L'affirmation 2 est vraie.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2. (a)
   (b)
3.
4.

Situation 2.

1.
2.
3.

Situation 3.

1.

2.

3.

4.

5.