Épreuve de mathématiques CRPE 2018 groupe 4.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Un grand merci à M. Journot pour ses corrections.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

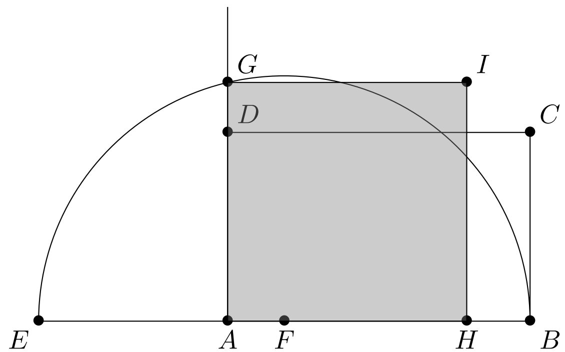
Une aire de détente.

Un architecte paysagiste est chargé de l'embellissement d'une aire de détente. Avant les travaux, il s'agit d'un terrain rectangulaire. L'architecte a notamment pour mission de construire une aire de détente de forme carrée ayant la même aire que l'aire de détente rectangulaire initiale.

Partie A : une construction.

Méthode de Samuel Marolois (1572-1627), mathématicien et ingénieur militaire hollandais.

Sur le plan de l'architecte, on peut voir la configuration suivante réalisée à partir du rectangle initial $ABCD$:



Le rectangle $ABCD$ étant donné, avec $AB > BC$, le protocole de cette construction est le suivant :

- construire E sur $[BA)$ tel que $AE = AD$ avec E n'appartenant pas à $[AB]$;

- construire F milieu de $[EB]$ et tracer le demi-cercle de diamètre $[EB]$ qui coupe la demi-droite $[AD)$ en G ;
- construire les points H et I tels que $AHIG$ soit un carré, avec H appartenant à $[AB)$.

1. On se place dans le cas où le terrain rectangulaire initial a une longueur de 308 mètres et une largeur de 132 mètres. On veut réaliser un plan à l'échelle de ce terrain, sous forme d'un rectangle $ABCD$, tel que la longueur du terrain soit représentée par un segment $[AB]$ mesurant 7,7 cm.

   (a) Montrer que la largeur $[AD]$ du rectangle doit mesurer 3,3 cm.

   Nous allons ici déterminer AD comme si l'énoncé ne nous avait pas donné sa valeur, cependant il est tout à fait possible de simplement vérifier que la valeur proposée fonctionne en s'assurant que les rapports de proportionnalité sont les mêmes.

   Déterminons AD.

   Les longueurs réelles et les longueurs sur le plan doivent toutes être dans le même rapport de proportionnalité.

$$\frac{AD}{AD_{\text{réelle}}} = \frac{AB}{AB_{\text{réelle}}}$$

   Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{AD_{\text{réelle}}} \times AD_{\text{réelle}} &= \frac{AB}{AB_{\text{réelle}}} \times AD_{\text{réelle}} \\
AD &= \frac{AB}{AB_{\text{réelle}}} \times AD_{\text{réelle}} \\
AD &= \frac{7{,}7 \text{ cm}}{308 \text{ m}} \times (132 \text{ cm}) \\
&= \frac{7{,}7 \times 132}{308} \, \frac{\text{cm} \cdot \text{m}}{\text{m}} \\
&= 3{,}3 \text{ cm}
\end{aligned}$$

   Nous avons bien vérifié que $AD = 3{,}3$ cm.

(b) Quelle est l'échelle de ce plan ?

Déterminons l'échelle de ce plan.

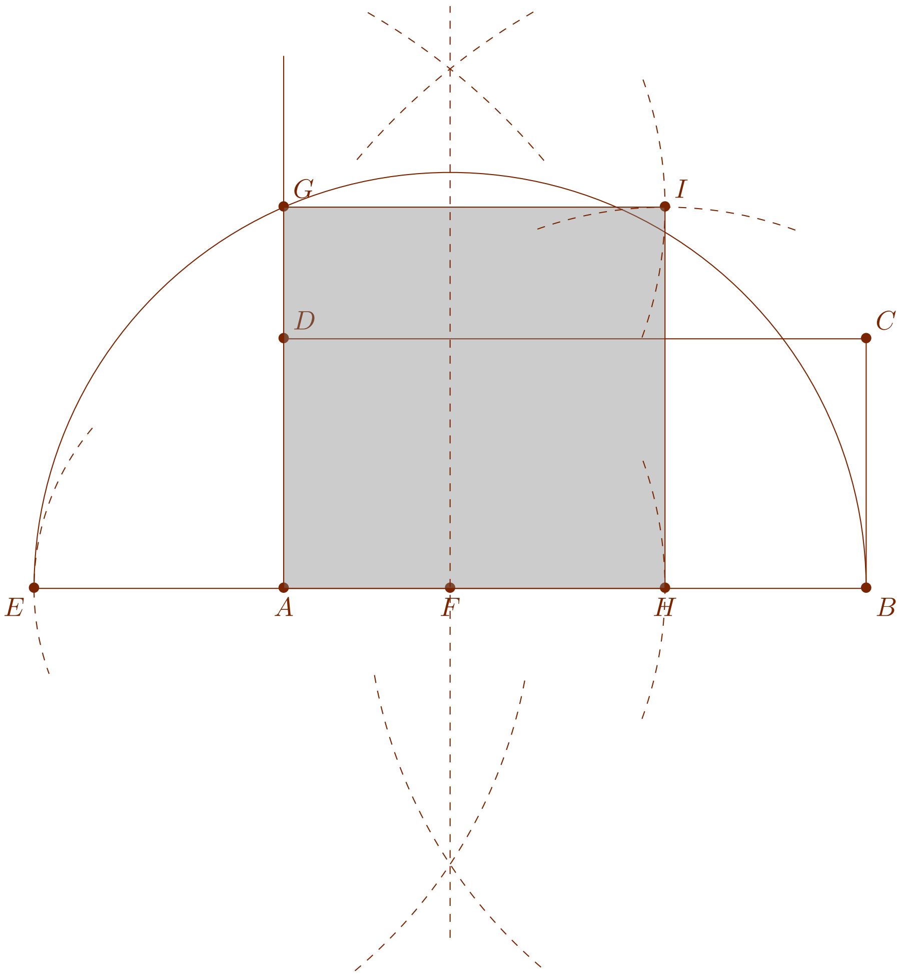
L'échelle est le rapport de proportionnalité entre les longueurs dessinées et les longueurs réelles donc elle vaut

$$\begin{aligned} e &= \frac{AB}{AB_{\text{réelle}}} \\ &= \frac{7{,}7 \text{ cm}}{308 \text{ m}} \\ &= \frac{7{,}7}{308}\ \frac{\text{cm}}{\text{m}} \\ &= 0{,}025\ \frac{\text{cm}}{100 \text{ cm}} \\ &= \frac{0{,}025}{100}\ \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \\ &= 0{,}00025 \\ &= \frac{1}{4000} \end{aligned}$$

Le plan est à l'échelle $\frac{1}{4000}$.

(c) Construire le rectangle $ABCD$ et effectuer le protocole de construction donné ci-dessus. Laisser les traits de construction apparents.

Je n'ai pas laissé les traits de constructions du rectangle initial $ABCD$.



(d) Calculer les longueurs des segments $[EB]$, $[EF]$, $[AF]$ et $[FG]$ sur le plan.

* Calculons EB.

$$\begin{aligned} EB &= EA + AB \\ &= AD + AB \\ &= BC + AB \\ &= 3{,}3\text{ cm} + 7{,}7\text{ cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{EB = 11 \text{ cm.}}$$

* Calculons EF.

$$\begin{aligned} EF &= \frac{1}{2} EB \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{EF = 5{,}5 \text{ cm.}}$$

* Calculons AF.

$$\begin{aligned} AF &= EF - EA \\ &= EF - BC \\ &= 5{,}5 \text{ cm} - 3{,}3 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{AF = 2{,}2 \text{ cm.}}$$

* Calculons FG.

$$FG = EF$$

$$\boxed{FG = 5{,}5 \text{ cm.}}$$

(e) En déduire l'aire du carré $AGIH$ sur le plan.

Calculons l'aire $\mathscr{A}(AGIH)$ de $AGIH$.

$$\mathscr{A}(AGIH) = AG^2$$

AFG étant rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore

$$FG^2 = AF^2 + AG^2,$$

donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AIGH) &= FG^2 - AF^2\\ &= (5{,}5\text{ cm})^2 - (2{,}2\text{ cm})^2\\ &= 5{,}5^2\text{ cm}^2 - 2{,}2^2\text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(AIGH) = 25{,}41\text{ cm}^2.}$$

(f) En déduire l'aire du carré correspondant dans la réalité et la comparer à l'aire du terrain rectangulaire initial.

Question classique : si les longueurs sont multipliées par x les aires sont multipliées par ? La réponse est alors x^2. Cependant nous allons procéder naïvement en recalculant l'aire du carré.

Calculons l'aire, $\mathscr{A}_1$ du carré correspondant dans la réalité.

En reprenant le raisonnement de la question précédente nous obtenons :

$$\begin{aligned}AG &= \sqrt{FG^2 - AF^2}\\ &= \sqrt{5{,}5^2 - 2{,}2^2}\\ &= \sqrt{25{,}41}\end{aligned}$$

Donc la longueur réelle du côté du carré est

$$\ell = 4000\sqrt{25{,}41}\text{ cm}$$

Nous en déduisons l'aire du carré :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1 &= \left(4000\sqrt{25{,}41}\right)^2\ \text{cm}^2\\ &= 406\,560\,000\text{ cm}^2\\ &= 406\,560\,000\left(\frac{1}{100}\text{ m}\right)^2\\ &= 406\,560\,000\times\left(\frac{1}{100}\right)^2\ \text{m}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = 40\,656 \text{ m}^2.}$$

Calculons l'aire $\mathscr{A}_2$ du terrain rectangulaire initial.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_2 &= (308 \text{ m}) \times (132 \text{ m}) \\ &= 308 \times 132 \text{ m}^2 \\ &= 40\,656 \text{ m}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Nous avons bien } \mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2.}$$

2. L'architecte prétend que quelles que soient les dimensions du rectangle initial, le carré $AHIG$ obtenu a toujours la même aire que le rectangle $ABCD$. Démontrer que cette affirmation est vraie.
   On pourra poser $AB = a$ et $AD = b$ (avec $a > b$).

   Soient a et b des réels positifs avec $a > b$.
   Posons $AB = a$ et $BC = b$.

   En raisonnant comme précédemment :

$$\begin{aligned}AF &= EF - BC \\ &= \frac{1}{2}EB - b \\ &= \frac{1}{2}(a+b) - b\end{aligned}$$

   Donc :

$$\begin{aligned}AG &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(a+b) - b\right)^2} \\ &= \sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) - \left(\frac{1}{2}(a+b) - b\right)\right] \times \left[\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) + \left(\frac{1}{2}(a+b) - b\right)\right]} \\ &= \sqrt{ba}\end{aligned}$$

Donc l'aire $\mathscr{A}_3$ du carré est :

$$\mathscr{A}_3 = ab$$

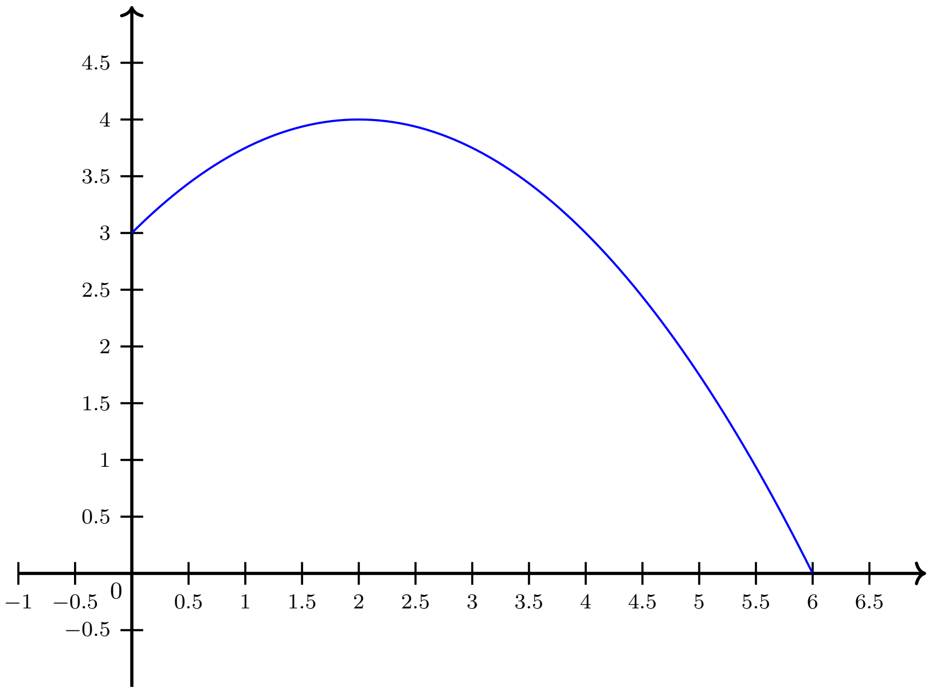
Nous retrouvons bien l'aire du rectangle initial.

$$\boxed{\text{L'affirmation de l'architecte est vraie.}}$$

Partie B : aménagement d'une fontaine.

L'architecte souhaite installer une fontaine d'eau au centre du carré $AHIG$ construit précédemment.

La figure ci-dessous représente la trajectoire d'une goutte d'eau dans un plan vertical.



L'abscisse 0 correspond au centre du carré et l'ordonnée 0 correspond au niveau du sol. L'axe des ordonnées donne la direction de la colonne de laquelle jaillit l'eau. Quand la goutte d'eau est au point de coordonnées $(x; y)$, cela signifie qu'elle est à la distance x, exprimée en mètre, de l'axe vertical situé au centre de la fontaine et à la hauteur y, exprimée en mètre, par rapport au sol. La courbe passe par les points de coordonnées $(0; 3)$ et $(6; 0)$.

Les graduations des axes expriment des mesures de longueurs en mètre.

1. (a) À quelle hauteur est la goutte d'eau quand elle sort de la colonne ?

   D'après l'énoncé $(0; 3)$ est un point de la courbe. Par conséquent

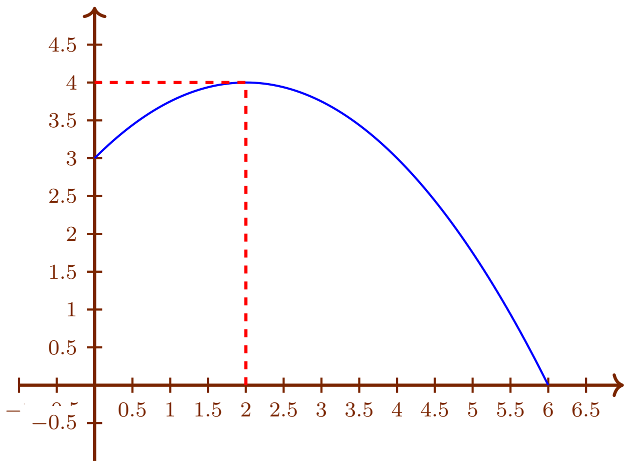
   la goutte sort à une hauteur de 3 m.

   (b) À quelle distance du centre du carré l'eau retombe-t-elle ?

   D'après l'énoncé $(6; 0)$ est un point de la courbe. Par conséquent

   la goutte retombe à 6 m du centre du carré.

   (c) Déterminer graphiquement la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine.



La goutte atteint une hauteur de 4 m.

2. La fonction représentée graphiquement ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0;6]$ par une expression de la forme :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$$

où b et c sont des nombres que nous allons chercher à déterminer.

(a) Donner, en fonction de b et c, les images respectives de 0 et de 6 par la fonction f.

Déterminons $f(0)$.

$$f(0) = -\frac{1}{4} \times 0^2 + b \times 0 + c$$

donc

$$\boxed{f(0) = c.}$$

Déterminons $f(6)$.

$$f(6) = -\frac{1}{4} \times 6^2 + b \times 6 + c$$

donc

$$\boxed{f(6) = 6b + c - 9.}$$

(b) En déduire les deux nombres b et c.

Déterminons b et c.

$(0;3)$ et $(6;0)$ sont des points de la courbe représentative de f ce qui équivaut successivement à

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(6) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 3 \\ 6b + c - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 3 \\ 6b + 3 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 3 \\ 6b = 6 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} c = 3 \\ b = 1 \end{cases}.}$$

(c) Prouver que pour tout x de l'intervalle $[0; 6]$, on a : $f(x) = -(x-2)^2+4$.

Vérifions que, pour tout $x \in [0; 6]$, $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$.

Soit $x \in [0; 6]$.
Pour démontrer l'égalité nous allons partir du membre de gauche pour arriver à celui de droite (en fait la forme développée de f).

$$\begin{aligned}
-(x-2)^2 + 4 &= -\frac{1}{4}(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2) + 4 \\
&= -\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) + 4 \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right) \times x^2 + \left(-\frac{1}{4}\right) \times (-4x) + \left(-\frac{1}{4}\right) \times 4 + 4 \\
&= -\frac{1}{4}x^2 + x - 1 + 4 \\
&= -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que,

$$\boxed{\text{quelque soit } x \in [0; 6],\ -\tfrac{1}{4}\left(x-2)\right)^2 + 4 = f(x).}$$

Nous pouvions également remarquer qu'il s'agissait de déterminer la forme canonique de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ qui est polynomiale de degré deux et utiliser le fait que $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ et donc $f(x) = -a(x-\alpha)^2 + \beta$.

(d) En déduire la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine.
Justifier.

Déterminons la hauteur maximale atteinte par une goutte d'eau.

$f : x \mapsto -\frac{1}{4}(x-2)^2+4$ est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous canonique avec $a=-\frac{1}{4}$, $\alpha=2$ et $\beta=4$.
Puisque $a<0$ la courbe représentative de f est une parabole orientée vers le bas.
Nous en déduisons le tableau de variation de f.

x	0		2		6
f	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

D'après ce tableau de variation f admet un maximum égale à 4 qui est atteint pour $x=2$.

$$\boxed{\text{La hauteur maximale atteinte par la goutte est de 4 m.}}$$

Partie C : un peu de verdure.

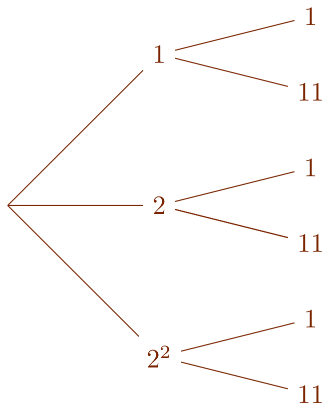
Par souci d'économie, il est décidé de récupérer les arbustes qui avaient été plantés de façon régulière sur le contour d'un terrain rectangulaire de longueur 308 mètres et de largeur 132 mètres.

Il y a un arbuste à chaque coin et la distance entre deux arbustes voisins est toujours la même, c'est un nombre entier de mètres.

1. De quelle(s) distance(s) peut-il s'agir ?

   Déterminons toutes les distances entre arbustes possibles.

   Puisque la distance est un nombre entier nécessairement il s'agit d'un diviseur de 308 et de 132. Déterminons donc tous les diviseurs communs à ces deux entiers autrement dit il faut trouver les diviseurs de leur pgcd.
   Nous avons les décompositions en facteurs premiers suivantes : $308 = 2^2 \times 7 \times 11$ et $132 = 2^2 \times 3 \times 11$. Donc le pgcd de 308 et 132 est $2^2 \times 11$.
   représentons tous les diviseurs communs sous forme d'un arbre.



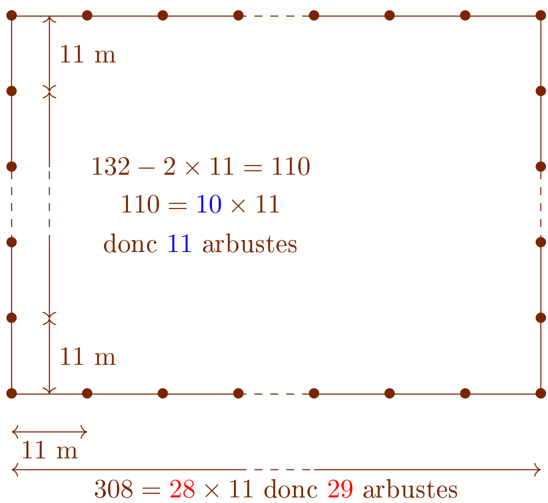
La distance entre deux arbustes est dans $\{1, 11, 2, 22, 4, 44\}$.

2. La distance, exprimée en mètre, entre chaque arbuste est un nombre premier supérieur à 3.
De combien d'arbustes l'architecte dispose-t-il ?

Déterminons le nombre d'arbustes.

La distance entre deux arbustes est un nombre premier pris dans $\{1, 11, 2, 22, 4, 44\}$ il ne peut donc s'agir que de 2 ou de 11. Comme de plus la distance est supérieure à 3 il ne peut s'agir que de 11 m.

Pour ne pas oublier de compter les arbres dans les coins faisons un schéma.



Il y a donc $2 \times 29 + 2 \times 11 = 80$ arbustes.

L'architecte dispose de 80 arbustes.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Pour chacun des problèmes suivants, indiquer laquelle des cinq réponses proposées est juste.

Aucune justification n'est attendue.

1. Amy dispose d'un cadenas dont la combinaison est un code à quatre chiffres. Chaque chiffre peut prendre une valeur de 0 à 6. Combien y a-t-il de combinaisons ?

   A : 720 B : 24 C : 28 D : 2 401 E : 16 384

   Nous pouvons imaginer un arbre (qui est un peu trop grand pour être dessiné) de quatre niveaux. De chaque nœud part un embranchement de sept branches. Cela fera au total $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$ chemins.

   Une autre façon de voir les choses : il faut choisir un premier chiffre parmi les 7 possibilités, pour chaque choix du premier chiffre il y aura 7 choix pour le deuxième, et ainsi de suite jusqu'à avoir choisi 4 chiffres. Donc il a 7^4 combinaisons possibles.

   Avec la calculatrice : $7^4 = 2\,401$.

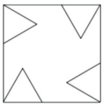
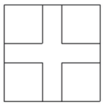
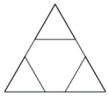
   Réponse D.

2. Parmi les quatre figures ci-dessous, laquelle n'est pas obtenue avec un des trois programmes proposés ?

Programme 1

Programme 2

Programme 3

A :  B :  C :  D : 

Pour comprendre les programmes remarquons d'abord qu'ils sont chacun formé de deux boucles imbriquées. De plus les boucles peuvent être soit répétées trois fois avec des angles de 120°, ce qui trace un triangle équilatéral, soit répétées quatre fois avec des angles de 90°, ce qui trace un carré.

De plus les carrés et triangles tracés peuvent être soit grands (avancées de 200) soit petits (avancée de 80).

Nous obtenons ainsi que le programme 1 correspond à la figure C, le programme 3 à la B et le programme 2 à la A.

Réponse D.

3. Un constructeur annonce qu'une voiture de course consomme 17 litres d'essence aux 100 km lorsqu'elle roule sur circuit à la vitesse de 70 m/s.
   Quelle sera sa consommation en 1 h 30 min de trajet à cette vitesse ?
   A : 17,85 L   B : 19,83 L   C : 42,84 L   D : 64,26 L   E : 107,1 L

La distance parcourue en 1 m 30 s est

$$\begin{aligned} d &= (1\ \mathrm{h}\ 30\ \mathrm{min}) \times \left(70\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right) \\ &= (1\ \times 3600\ \mathrm{s} + 30\times 60\ \mathrm{s}) \times \left(70\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right) \\ &= ((3600+1800)\ \ \mathrm{s}) \times \left(70\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right) \\ &= 5400 \times 70\ \mathrm{s}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \\ &= 378\,000\ \mathrm{m} \\ &= 378\,000\ \frac{1}{1000}\mathrm{km} \\ &= 378\ \mathrm{km} \end{aligned}$$

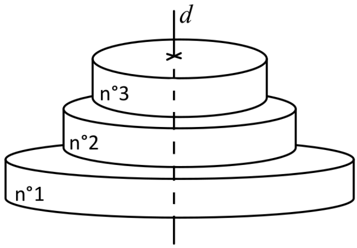
Nous avons la situation de proportionnalité

Distance	100 km	378 km
Essence	17 L	$\frac{17\ \mathrm{L}}{100\ \mathrm{km}} \times 378\ \mathrm{km} = 64{,}26\ \mathrm{L}$

Réponse D.

Exercice 2.

Un élève pâtissier doit présenter, pour son projet de fin d'études, une pièce montée composée de 3 gâteaux cylindriques superposés, tous centrés sur l'axe d comme l'indique la figure ci-dessous :



- Les trois gâteaux cylindriques sont de même hauteur : 10 cm ;
- Le plus grand gâteau cylindrique, gâteau n° 1, a pour rayon 30 cm.
- Le rayon du gâteau n° 2 est égale aux $\frac{2}{3}$ de celui du gâteau n° 1.
- Le rayon du gâteau n° 3 est égale aux $\frac{3}{4}$ de celui du gâteau n° 2.

1. Calculer le rayon du gâteau n° 3.

   Calculons le rayon r_3 du gâteau n° 3.

   Pour déterminer la quantité représentée par une proportion il suffit de multiplier la quantité totale par la proportion.

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{3}{4} \times r_2 \\ &= \frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{3} \times r_1\right) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 30 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{r_3 = 15 \text{ cm.}}$$

2. Montrer que le volume total exact de la pièce montée est égal à $15\,250\pi$ cm^3.

   Calculons le volume total, $\mathscr{V}_t$, de la pièce montée.

   Commençons par calculer le volume $\mathscr{V}_1$ du cylindre 1. Le volume d'un cylindre est le produit de la longueur de la hauteur par l'aire de la base qui est ici un disque.

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_1 &= (10 \text{ cm}) \times \pi r_1^2 \\ &= (10 \text{ cm}) \times \pi\,(30 \text{ cm})^2 \\ &= 10 \times \pi \times 30^2 \text{ cm} \cdot \text{cm}^2 \\ &= 9\,000\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

   De même :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_2 &= (10 \text{ cm}) \times \pi r_2^2 \\ &= (10 \text{ cm}) \times \pi \left(\frac{2}{3} r_1\right)^2 \\ &= (10 \text{ cm}) \times \pi \left(\frac{2}{3} \times 30 \text{ cm}\right)^2 \\ &= 10 \times \pi \times \left(\frac{2}{3} \times 30\right)^2 \text{ cm} \cdot \text{cm}^2 \\ &= 4\,000\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_3 &= (10\text{ cm}) \times \pi r_3^2\\ &= (10\text{ cm}) \times \pi\,(15\text{ cm})^2\\ &= 10 \times \pi \times 15^2\text{ cm}\cdot\text{cm}^2\\ &= 2\,250\pi\text{ cm}^3\end{aligned}$$

Nous en déduisons le volume total :

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \mathscr{V}_1 + \mathscr{V}_2 + \mathscr{V}_3\\ &= 9\,000\text{ cm}^3 + 4\,000\text{ cm}^3 + 2\,250\text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$9\,000\text{ cm}^3 + 4\,000\text{ cm}^3 + 2\,250\text{ cm}^3 = 15\,250\text{ cm}^3.$$

3. Quelle fraction du volume total représente le volume du gâteau n° 3 ? Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Calculons la proportion, p_3, représentée par le gâteau 3 par rapport à l'ensemble.

$$\begin{aligned}p_3 &= \frac{\mathscr{V}_3}{\mathscr{V}}\\ &= \frac{2\,250\text{ cm}^3}{15\,250\text{ cm}^3}\end{aligned}$$

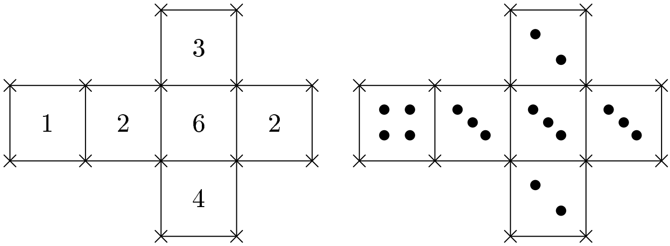
En procédant à la décomposition en facteurs premiers des numérateurs et dénominateurs :

$$\begin{aligned}p_3 &= \frac{2 \times 3^2 \times 5^3}{2 \times 5^3 \times 61}\\ &= \frac{3^2}{61}\end{aligned}$$

$$p_3 = \frac{9}{61}.$$

Exercice 3.

On lance deux dés équilibrés. Le premier dé indique un nombre à l'aide des chiffres de 1 à 6 et le deuxième dé indique un nombre à l'aide des constellations de 2 à 4, comme indiqué sur les patrons ci-dessous.



On additionne ensuite les deux nombres obtenus :

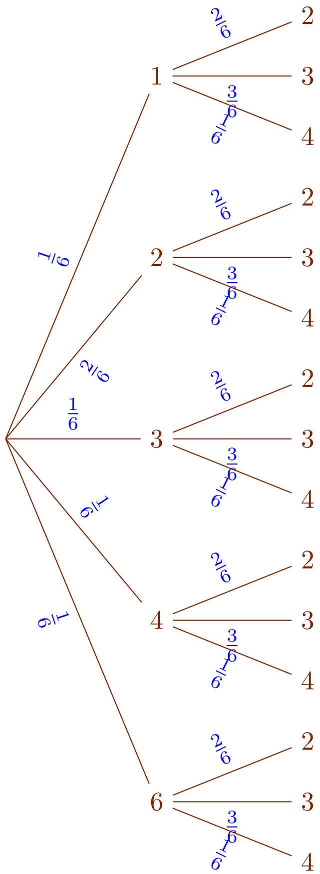
— si la somme est 6 on gagne 3 jetons ;

— si la somme est un nombre pair différent de 6 on gagne 1 jeton ;

— si la somme est un nombre impair on ne gagne rien.

Notons Ω l'ensemble des couples formés d'un élément pris dans $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ et d'un autre élément pris dans $\{2, 3, 4\}$.

Schématisons l'expérience par l'arbre suivant :



Issues.	Sommes.	Jetons.
$(1;2)$	3	0
$(1;3)$	4	1
$(1;4)$	5	0
$(2;2)$	4	1
$(2;3)$	5	0
$(2;4)$	6	3
$(3;2)$	5	0
$(3;3)$	6	3
$(3;4)$	7	0
$(4;2)$	6	3
$(4;3)$	7	0
$(4;4)$	8	1
$(6;2)$	8	1
$(6;3)$	9	0
$(6;4)$	10	1

Notons X la variable aléatoire qui à chaque lancé associe le nombre de jetons obtenus.

Il est possible ici de choisir une schématisation plus simple avec un tableau double entrée avec en entrées les faces des deux dés et dans le tableau le nombre de jetons gagnés :

	1	2	2	3	4	6
2	0	1	1	0	3	1
2	0	1	1	0	3	1
3	1	0	0	3	0	0
3	1	0	0	3	0	0
3	1	0	0	3	0	0
4	0	3	3	0	1	1

Remarquons que cette seconde schématisation utilise directement la loi d'équiprobabilité ce qui n'est pas le cas de la précédente modélisation.

1. Un joueur a gagné 1 jeton. Il a obtenu « 4 » avec le premier dé. Que peut-on dire sur le résultat obtenu avec le deuxième dé ? Justifier.

   Puisque 4 est obtenu avec le premier dé et que 1 jeton a été obtenu nécessairement le seul résultat possible pour le second dé parmi $\{2, 3, 4\}$ est 4.

   Le résultat obtenu avec le deuxième fruit est 4.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 jetons ? Justifier.

   Calculons $\mathbb{P}(X = 3)$.

   $\{X = 3\} = \{(2; 4), (3; 3), (4; 2)\}$
   Donc :

   $$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(2; 4) + \mathbb{P}(3; 3) + \mathbb{P}(4; 2)$$

   D'après le principe multiplicatif (probabilité conditionnelle) :

   $$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6}$$

   $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{7}{36}$.

   Calculons à nouveau $\mathbb{P}(X = 3)$ mais en nous appuyant sur la seconde modélisation.
   Il y a équiprobabilité entre les issues (les couples) et d'après le tableau double entrée $\{X = 3\}$ est réalisé par 7 issues alors que Ω contient 36 issues donc :

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{7}{36}$$

3. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir de jetons ? Justifier.

   Calculons $\mathbb{P}(X=0)$.

   $\{X=0\}=\{(1;2),\ (1;4),\ (2;3),\ (3;2),\ (3;4),\ (4;3),\ (6;3)\}$
   Donc :

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(1;2)+\mathbb{P}(1;4)+\mathbb{P}(2;3)+\mathbb{P}(3;2)+\mathbb{P}(3;4)+\mathbb{P}(4;3)+\mathbb{P}(6;3)$$

   D'après le principe multiplicatif :

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=0)=\tfrac{1}{2}.}$$

4. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un jeton ? Justifier.

   Calculons $\mathbb{P}(X\geqslant 1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\geqslant 1)&=1-\mathbb{P}\left(\overline{X\geqslant 1}\right)\\&=1-\mathbb{P}\left(X<1\right)\end{aligned}$$

   Et puisque $X\in\{0;1;3\}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\geqslant 1)&=1-\mathbb{P}(X=0)\\&=1-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X\geqslant 1)=\tfrac{1}{2}.}$$

Exercice 4.

Voici un programme de calcul, appliqué sur un tableur :

	A	B
1	**Programme**	**Résultat**
2	Prendre un nombre	5
3	Ajouter 3 à ce nombre	8
4	Élever la somme précédente au carré	64
5	Retrancher le carré du nombre de départ au résultat précédent	39
6		
7		

1. (a) Vérifier qu'on obtient 33 en choisissant 4 comme nombre de départ.

Prendre un nombre	4
Ajouter 3 à ce nombre	$4+3=7$
Élevé la somme précédente au carré	$7^2=49$
Retranché le carré du nombre de départ au résultat précédent	$49-4^2=33$

Si on choisi 4 alors le programme renvoie 33.

(b) Quel résultat obtient-on si on choisit 4,2 comme valeur de départ ?

Nous pourrions recommencer comme à la question précédente mais nous allons plutôt généraliser.

Déterminons la valeur, $f(x)$, renvoyée par le programme si la valeur de départ est x.

Prendre un nombre	x
Ajouter 3 à ce nombre	$x+3$
Élevé la somme précédente au carré	$(x+3)^2$
Retranché le carré du nombre de départ au résultat précédent	$(x+3)^2-x^2$

Donc $f(x)=(x+3)^2-x^2$.
En particulier : $f(4{,}2)=(4{,}2+3)^2-4{,}2^2=34{,}2$.

Si on choisi 4,2 alors le programme renvoie 34,2.

(c) Quel résultat obtient-on si on choisit $\frac{7}{10}$ comme valeur de départ ? On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

$f(x) = (x+3)^2 - x^2$.
En particulier : $f\left(\frac{7}{10}\right) = \left(\frac{7}{10}+3\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{66}{5}$.

Si on choisi $\frac{7}{10}$ alors le programme renvoie $\frac{66}{5}$.

2. Quelles formules peut-on écrire dans les cases B3 ; B4 et B5 pour obtenir cette feuille de calcul ?

En B3 : $=$ B2 $+ 3$.
En B4 : $=$ B3 $\wedge 3$.
En B5 : $=$ B4 $-$ B2.

3. Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est exacte et justifier la réponse.

(a) Affirmation 1 : « Aucun nombre ne permet d'obtenir 0 comme résultat final. »

Résolvons l'équation $f(x) = 0$.

Nous pourrions développer l'expression trouvée pour f et nous trouverions aussi bien la solution. Ceci dit a priori la recherche des solutions d'une équation consiste plutôt à faire apparaître une équation produit-nul. C'est ce que nous allons faire.

$$f(x) = 0 \leftrightarrow (x+3)^2 - x^2 = 0$$

En reconnaissant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow [(x+3)-x] \times [(x+3)+x] = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \times (2x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x+3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = -3 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\mathscr{S} = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

L'affirmation 1 est fausse.

(b) Affirmation 2 : « Si on prend un nombre entier positif, le résultat est toujours divisible par 3. »

Démontrons que l'affirmation 2 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Incidemment, lors de la précédente question nous avons démontré que $f(n) = 3(2n + 3)$. Et puisque n est un entier $2n + 3$ en est aussi un et $f(n)$ est donc divisible par 3.

L'affirmation 2 est vraie.

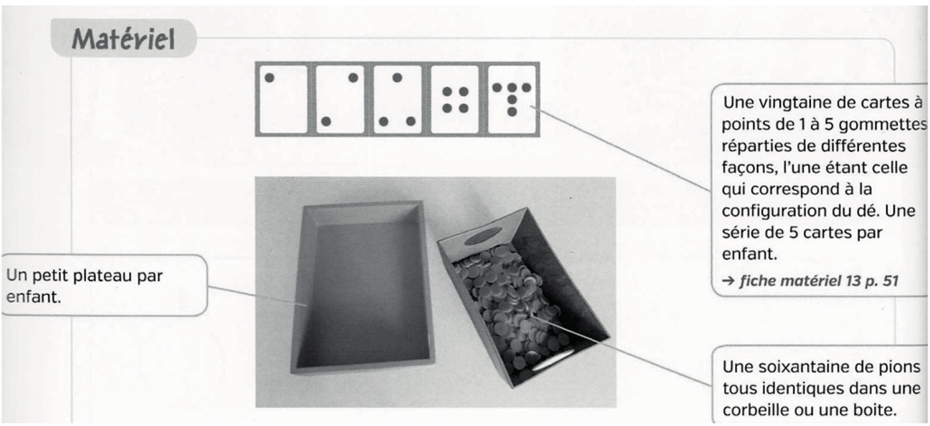
III Troisième partie (14 points).

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

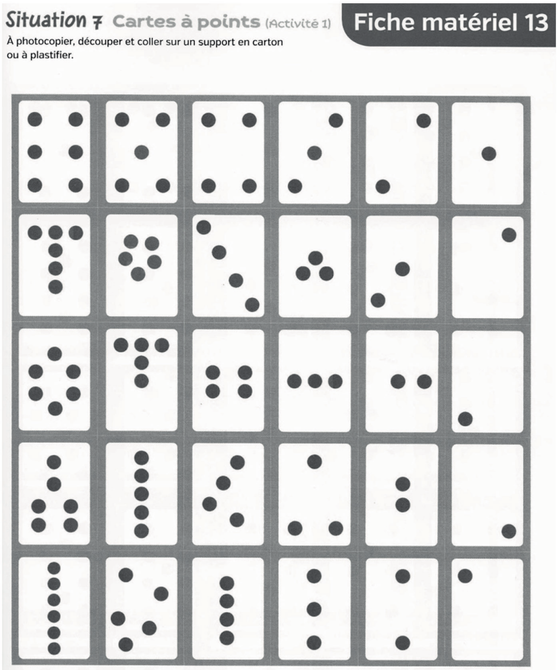
Situation 1.

L'activité suivante intitulée « Cartes à points » est extraite de l'ouvrage « Découvrir les maths, Situations MS, Nouvelle édition, Programme 2015, Dominique Valentin, Hatier 2015 ».

Voici le matériel utilisé :



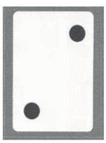
Les jetons sont d'une taille proche des points sur la carte.



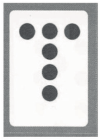
La règle du jeu est la suivante :

Les cartes sont disposées en tas à l'envers devant quatre ou cinq joueurs. Chaque enfant tire une carte et prend dans la corbeille « autant de pions qu'il y a de gommettes sur la carte ». S'il a réussi, il verse les pions dans son plateau et garde la carte ; sinon, il remet les pions dans la corbeille et remet la carte, à l'envers, sous le paquet commun. On joue cinq tours : le gagnant est celui qui a le plus de cartes.

1. Décrire deux procédures que les élèves peuvent utiliser pour quantifier la collection de gommettes sur la carte ci-dessous.



2. (a) Décrire deux procédures que les élèves peuvent utiliser pour quantifier la collection de gommettes sur la carte ci-dessous.



   (b) Pour chacune des procédures données, décrire une erreur que les élèves sont susceptibles de faire.

3. Comment les élèves peuvent-ils valider leur réussite ?

4. Donner trois variables de différenciation sur lesquelles les concepteurs du jeu se sont appuyés pour construire les différentes cartes.

Situation 2.

Un enseignant propose les problèmes suivants à ses élèves de cycle 2.

Problème 1. Paul a gagné 8 billes pendant la récréation. Il a maintenant 22 billes. Combien avait-il de billes avant la récréation ?

Problème 2. Marie mesure 135 cm. C'est 45 cm de moins que son papa. Quelle est la taille du papa de Marie ?

1. De quel type de problèmes relèvent ces deux énoncés ?

2. Décrire deux procédures que l'on peut attendre d'élèves de CE1 pour le problème 1.

3. Quelles erreurs peuvent être induites par les formulations de ces deux problèmes ?

Situation 3.

Voici quatre énoncés de problèmes proposés lors d'une séance par une enseignante de CM2.

> *Problème 1 :*
> Pour faire 8 brioches, il faut 500 g de farine, 6 œufs et 200 g de beurre.
> Quelles quantités d'ingrédients sont nécessaires pour fabriquer 16 brioches ? 4 brioches ?
>
> *Problème 2 :*
> Un bébé pèse 4 kilos à 1 mois.
> Combien pèsera-t-il à 12 mois ?
>
> *Problème 3 :*
> Pour une sortie scolaire, on réserve des bus pouvant transporter 40 personnes maximum.
> Combien faut-il réserver de bus pour 50 personnes ?
> Pour 100 personnes ?
>
> *Problème 4 :*
> Arthur a 6 piles identiques qui pèsent 18 g en tout.
> Combien pèsent 8 piles ?

1. Quelle notion de mathématique ces problèmes permettent-ils de consolider ?
2. Donner un argument pour justifier la pertinence de proposer les problèmes 2 et 3 dans cette séance.
3. Analyser la production d'Ethan (procédures, réussites et erreurs) au problème 1 (cf. Annexe 1).
4. Analyser les productions (procédures, réussites et erreurs) de Léandre et Aboubakr au problème 3 (cf. Annexe 2).
5. Décrire deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour résoudre le problème 4.

<u>Annexe 1.</u>

Problème 1 : Prénom : Ethan

Pour faire 8 brioches, il faut 500g de farine, 6 œufs et 200g de beurre.
Quelles quantités d'ingrédients sont nécessaires pour fabriquer 16 brioches ? 4 brioches ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches et écrire tes réponses

500 | 8 → 62 ; 62 × 16 = 372 + 620 = 992

200 | 8 → 25 ; 25 × 16 = 150 + 250 = 400

6 | 8 → 0,7 ; 0,7 × 16 = 42 + 070 = 11,2

62 × 4 = 248 ; 0,7 × 4 = 2,8 ; 25 × 4 = 100

Il faudra pour 4 brioche 248 g de farine, 2,8 oeufs et 100g de beurre

Il faudra pour 16 brioche 992 g de farine, 11,2 oeufs et 400g de beurre

<u>Annexe 2.</u>

Problème 3 : Prénom : Léandre

Pour une sortie scolaire, on réserve des bus pouvant transporter 40 personnes maximum.
Combien faut-il réserver de bus pour 50 personnes ?
Pour 100 personnes ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches et écrire tes réponses

un bus 40 perssones

desxièmes 10 perssonnes

deux autres bus 100 personnes

Il faudras deux bus pour 50 perssones et quatres bus pour 100 perssones

Problème 3 :

Prénom : Aboubakr

Pour une sortie scolaire, on réserve des bus pouvant transporter 40 personnes maximum.
Combien faut-il réserver de bus pour 50 personnes ?
Pour 100 personnes ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches et écrire tes réponses

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times\ 40 \\ \hline 00 \\ +\ 2000 \\ \hline 2000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times\ 40 \\ \hline 000 \\ +\ 4000 \\ \hline 4000 \end{array}$$

Pour 50 persoinn il faut reservé 2000 bus.

Pour 100 personne : 4000 bus.