Épreuve de mathématiques CRPE 2018 groupe 3.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

1. Calculons la longueur, L_1, d'un tour complet de la piste 1.

   La piste 1 est formée d'un cercle de rayon $r = 31{,}83$ m et de deux lignes droites de longueurs 100 m.
   Donc

$$\begin{aligned} L_1 &= 2\pi r + 2 \times 100 \\ &= 2\pi \times (31{,}83 \text{ m}) + 2 \times (100 \text{ m}) \\ &= 2\pi \times 31{,}83 + 2 \times 100 \text{ m}) \\ &\approx 399{,}993 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\boxed{L_1 \approx 400 \text{ m.}}$$

2. Dessinons le premier couloir à l'échelle.

   La longueur 31,83 m en taille réelle est représentée par la longueur

$$\begin{aligned} \frac{1}{1200} \times 31{,}83 \text{ m} &= \frac{1}{1200} \times 31{,}83 \times 1 \text{ m} \\ &= \frac{1}{1200} \times 31{,}83 \times 100 \text{ cm} \\ &= \frac{1}{12} \times 31{,}83 \text{ cm} \\ &= 2{,}6525 \text{ cm} \end{aligned}$$

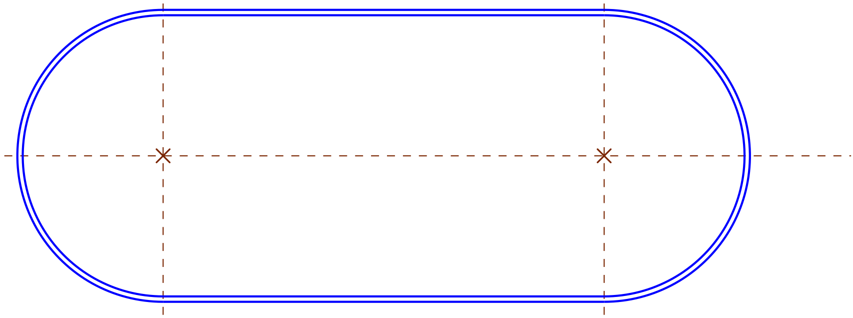
   De même le rayon incluant la largeur du couloir devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{1200} \times (31{,}83 + 1{,}22) \text{ m} &= \frac{1}{12} \times 33{,}05 \text{ cm} \\ &\approx 2{,}75416 \text{ cm} \end{aligned}$$

   De même les 100 m seront représentés par une longueur de

$$\begin{aligned}\frac{1}{1200} \times 100 \text{ m} &= \frac{1}{12} \times 100 \text{ cm}\\ &= \frac{25}{3} \text{ cm}\\ &= 8{,}333\ldots \text{ cm}\end{aligned}$$

Enfin voici la représentation de la piste 1 à l'échelle 1/1200. En fait ce dessin est encore réduit à l'échelle 7/10 par rapport à ce qui est attendu par le sujet.



3. Les coureur situés à l'extérieur du virage parcourent une plus grande distance, dans le virage, que les coureurs situés plus à l'intérieur.

4. (a) Déterminons le décalage sur la ligne 6.

Puisqu'il y a 5 couloirs de largeur 1,22 m avant d'atteindre le point P

$$\begin{aligned}OP &= OA + (6-1) \times 1{,}22\\ &= 31{,}83 + 5 \times 1{,}22\\ &= 37{,}93\end{aligned}$$

Le demi-cercle de rayon $[OP]$ a donc une longueur, en mètres, de

$$\begin{aligned}L_2 &= \frac{1}{2} \times 2\pi \times OP\\ &= \pi 37{,}93 \text{ m}\\ &\approx 119{,}1606 \text{ m}\end{aligned}$$

Puisque la longueur du demi-cercle de rayon $[OA]$ est de 100 m, le décalage, Δ_6, exprimé en mètres, pour la ligne 6 est

$$\begin{aligned}\Delta_6 &= L_2 - 100\\ &\approx 119{,}1606 - 100 \text{ m}\\ &\approx 19{,}1606 \text{ m}\end{aligned}$$

Le décalage pour le couloir 6 est de 19,16 m.

(b) Déterminons une mesure de α en degré.

Nous utilisons le fait que la longueur de l'arc de cercle est proportionnelle à l'angle de l'arc.

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{\Delta_6}{L_2}$$

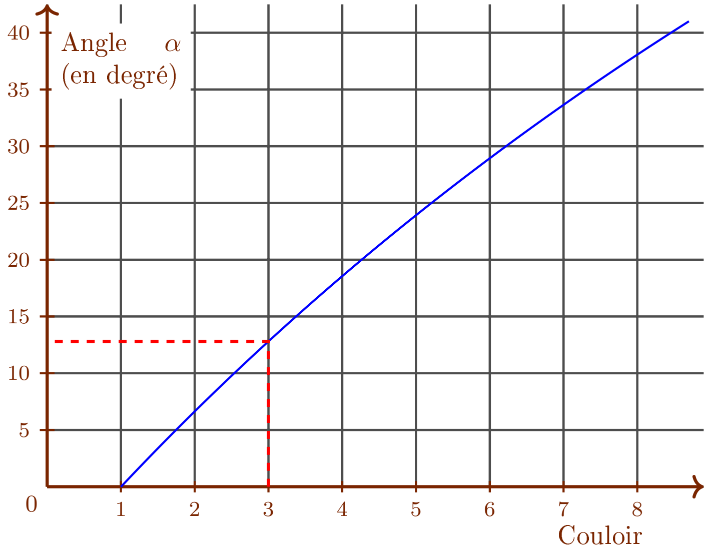
Ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{180}\times 180 &= \frac{\Delta_6}{L_2}\times 180\\ \alpha &= \frac{\Delta_6 \times 180}{L_2}\\ &= \frac{180 \times (L_2 - 100)}{L_2}\\ &\approx \frac{180 \times 19{,}16}{119{,}16}\\ &\approx 28{,}94\end{aligned}$$

$\alpha \approx 29°$.

(c) La courbe représentative de la fonction donnant l'angle en fonction du couloir n'est pas une droite (ou ne passe pas par l'origine du repère) donc ce n'est pas une fonction linéaire. Et nous pouvons conclure :

α n'est pas proportionnel au numéro du couloir.



(d)

Pour le couloir 3 : $12° \leqslant \alpha \leqslant 14°$.

(e) En reprenant le travail effectué à la question 4.(a) nous obtenons pour le couloir p :

$$\begin{aligned}\Delta_p &= \pi \times [OA + (p-1) \times 1{,}22] - 100 \\ &= \pi((p-1) \times 1{,}22 + 31{,}83) - 100\end{aligned}$$

Par conséquent la formule qui convient est

```
=PI()*((A2-1)*1,22+31,83)-100
```

5. (a) Exprimons sa vitesse, v_u, en km/h.

$$\begin{aligned}
v_u &= \frac{200 \text{ m}}{19{,}19 \text{ s}} \\
&= \frac{200 \times 1 \text{ m}}{19{,}19 \times 1 \text{ s}} \\
&= \frac{200 \times \frac{1}{1000} \text{ km}}{19{,}19 \times \frac{1}{60 \times 60} \text{ h}} \\
&= \frac{\frac{200}{1000}}{\frac{19{,}19}{60 \times 60}} \frac{\text{km}}{\text{h}} \\
&\approx 37{,}519 \text{ km/h}
\end{aligned}$$

Sa vitesse moyenne est de 37,5 km/h.

(b) Déterminons le temps, t_u, mis pour faire un marathon.

$$\begin{aligned}
\frac{42{,}195 \text{ km}}{37{,}5 \text{ km/h}} &= \frac{42{,}195}{37{,}5} \frac{\text{km} \cdot \text{h}}{\text{km}} \\
&= 1{,}1252 \text{ h} \\
&= 1 \text{ h} + 60 \times 0{,}1252 \text{ mn} \\
&= 1 \text{ h} + 7{,}512 \text{ mn} \\
&= 1 \text{ h} + 7 \text{ mn} + 60 \times 0{,}512 \text{ s} \\
&= 1 \text{ h} + 7 \text{ mn} + 30{,}72 \text{ s}
\end{aligned}$$

Il parcourrait le marathon en 1 h 7mn 31 s.

(c) Déterminons le taux, t_x, d'évolution entre les deux temps.

$$\begin{aligned}
t_x &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \\
&= \frac{19{,}19 - 19{,}32}{19{,}32} \times 100 \\
&\approx -0{,}672 \text{ \%}
\end{aligned}$$

Usain Bolt a réduit le temps du précédente record de 0,67 %.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Déterminons la nature de OMB.

   * Puisque M appartient à la médiatrice de $[OB]$, $OM = MB$, autrement dit OMB est isocèle en M.
   * Puisque $[OB]$ et $[OM]$ sont des rayons de $\mathcal{C}$, OMB est isocèle en O.

   Finalement

   OMB est équilatéral.

2. Déterminons la nature du quadrilatère $AMBS$.

   Il est possible de démontrer que les triangles MBS et SAM sont rectangles avec une hypoténuse commune mais il reste alors des cas particuliers possibles (cerf-volant, quadrilatère croisé) dont il faut discuter.

   * S étant le symétrique de M par rapport à O, $[SM]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.
   * Par construction $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.

   $[AB]$ et $[SM]$ sont des diamètres de $\mathcal{C}$ donc ils ont même longueur et se coupent en leur milieu O.
   Or un un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu est un rectangle, donc

   $AMBS$ est un rectangle.

3. Déterminons l'aire $\mathscr{A}(AMBS)$ de $AMBS$.

   $AMBS$ étant un rectangle :

$$\mathscr{A}(AMBS) = 2 \times \mathscr{A}(AMB)$$

(IM) étant une hauteur de AMB :

$$\mathscr{A}(AMBS) = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times AB \times IM\right)$$

Déterminons IM.
IBM est rectangle en I, donc, d'après le théorème de Pythagore : $IB^2 + IM^2 = MB^2$.
Nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned} IB^2 + IM^2 - IB^2 &= MB^2 - IB^2 \\ IM^2 &= MB^2 - IB^2 \end{aligned}$$

Or OMB étant équilatéral $MB = OB = 5$ cm, et I étant le milieu de $[OB]$, $IB = \frac{5}{2} = 2{,}5$ cm, donc

$$\begin{aligned} IM^2 &= 5^2 - 2{,}5^2 \\ &= 18{,}75 \end{aligned}$$

IM est une longueur donc un nombre positif d'où, nécessairement, $IM = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm.

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(AMBS) &= AB \times IM \\ &= 10 \times \frac{5}{2}\sqrt{3} \\ &= 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(AMBS) = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2.}$$

4. Démontrons que $OMBN$ est un losange.

   $[OB]$ et $[MN]$ sont les médiatrices l'un de l'autre, donc
   - $[OB]$ et $[MN]$ se coupent en leur milieu et par conséquent $OMBN$ est un parallélogramme,
   - (OB) et (MN) sont perpendiculaires et le parallélogramme $OMBN$ est donc un losange.

   $$\boxed{OMBN \text{ est un losange.}}$$

Exercice 2.

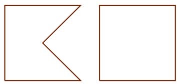
1. Il y a plusieurs façons d'aborder cette question. La décomposition en facteurs premiers de 126 par exemple est : $126 = 2^1 \times 3^2 \times 7^1$. Les diviseurs de 126 sont donc les nombres de la forme $2^{p_2} \times 3^{p_3} \times 7^{p_7}$ avec $0 \leqslant p_2 \leqslant 1$, $0 \leqslant p_3 \leqslant 2$ et $0 \leqslant p_7 \leqslant 1$. Il y a 2 choix pour l'exposant de 2, 3 choix pour celui de 3 et 2 pour celui de 7. D'après le principe multiplicatif (lemme des bergers) il y a $2 \times 3 \times 2 = 12$ possibilités de diviseurs de 126.

   1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126 sont des diviseurs de 126 et il y en a 12.

   L'affirmation 1 est fausse.

2. Le résultat est clairement faux en considérant des polygones éventuellement aplatis.

   Dans l'exemple ci-dessous A a un périmètre supérieur à celui de B et pourtant son aire est plus petite.

   A  B

   L'affirmation 2 est fausse.

3. Déterminons le coefficient multiplicateur global.

   Une hausse de 5 % correspond à un coefficient multiplicateur de

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{5}{100} \\ &= 1{,}05 \end{aligned}$$

   Par conséquent le coefficient multiplicateur global au bout de 15 ans est

$$\begin{aligned} CM_g &= \underbrace{CM \times \cdots \times CM}_{15\ \text{facteurs}} \\ &= CM^{15} \\ &= 1{,}05^{15} \\ &\approx 2{,}0789 \end{aligned}$$

L'affirmation 3 est vraie.

4. Si les trois dimensions de l'espace sont cinq fois plus petite les volumes sont donc $5 \times 5 \times 5 = 125$ fois plus petits.

L'affirmation 4 est fausse.

Exercice 3.

Le saut pour dessiner un nouveau carré n'est pas suffisant.

Il faut que le saut en avant soit de 40 pixels et non pas seulement de 20.

Exercice 4.

1. Démontrons que IJK est équilatéral.

   IFK est rectangle en F donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$IK^2 = IF^2 + FK^2$$

   De plus IFK est isocèle en F donc :

$$\begin{aligned} IK^2 &= 2 \times IF^2 \\ &= 2 \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

   IK étant une longueur donc positive :

$$\begin{aligned} IK &= \sqrt{18} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

   De même $KJ = IJ = 3\sqrt{2}$ cm.

   IJK est équilatéral.

2. Déterminons le volume $\mathscr{V}(FIJK)$ de $FIJK$.

   (JF) est la hauteur issue de J et IFK est la base correspondante. Nous en déduisons

$$\mathscr{V}(FIJK) = \frac{1}{3}JF \times \mathscr{A}(IFK)$$

   Puisque IFK est isocèle rectangle en F :

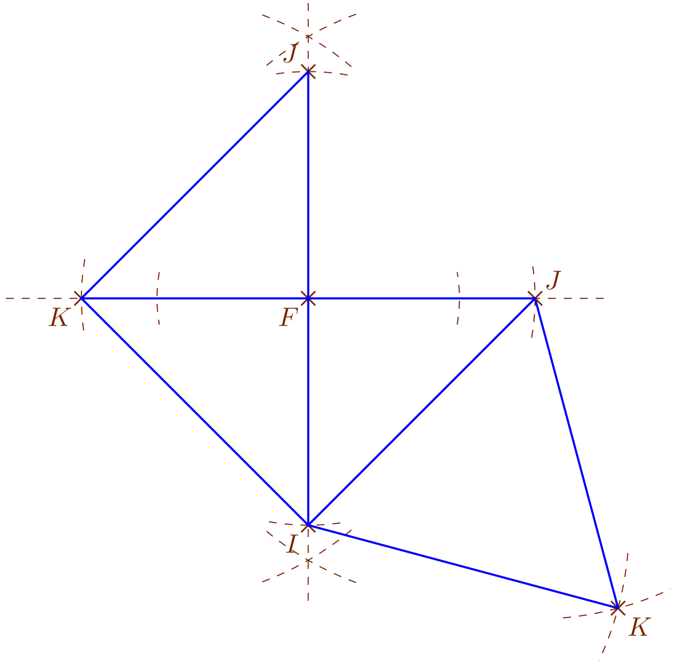
$$\mathscr{V}(FIJK) = \frac{1}{3}JF \times \frac{1}{2}IF \times FK$$

   Par construction :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(FIJK) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}FK^3 \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{6}{2}\right)^3 \text{ cm}^3 \\ &= \frac{27}{6} \text{ cm}^3 \\ &= 4{,}5 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}(FIJK) = 4{,}5 \text{ cm}^3.}$$

3. Voici un patron à l'échelle.



4. (a) Calculons le volume $\mathscr{V}_{cubo}$ du cuboctaèdre.

Ce solide s'obtient en retirant les tétraèdres formant ses sommets tels que $FIJK$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{cubo} &= 6^3 - 8 \times 4{,}5 \\ &= 180 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_{cuvo} = 180 \text{ cm}^3.}$$

(b) Déterminons la longueur totale, L_t, de ses arêtes.

Le cuboctaèdre a $6 \times 4 = 24$ arêtes qui toutes mesurent $IK = 3\sqrt{2}$. Donc

$$\begin{aligned}L_t &= 24 \times 3\sqrt{2} \\ &\approx 101{,}82337 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$L_t = 101{,}8 \text{ cm.}$$