Épreuve de mathématiques CRPE 2018 groupe 3.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

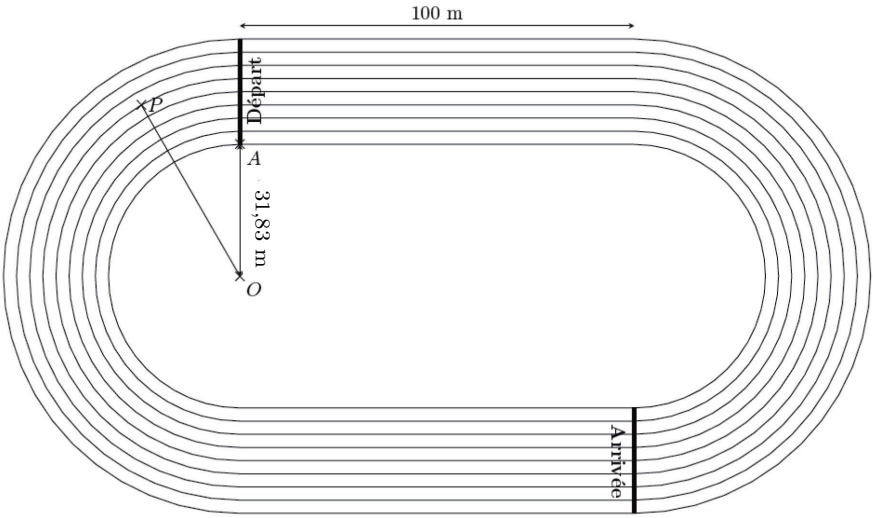
Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.
5 *points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.*
Une note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.

I Première partie (13 points).

Une piste d'athlétisme est formée de huit couloirs. La largeur de chaque couloir est de 1,22 mètre. Chacun des neuf bords des huit couloirs est composé de deux lignes droites de 100 mètres et de deux demi-cercles. Le couloir 1 est celui le plus à l'intérieur, le 8 étant celui le plus à l'extérieur. Le bord intérieur du couloir 1 est composé de deux lignes droites de 100 mètres et de deux demi-cercles de rayon 31,83 mètres.

Dans tout l'exercice on négligera la largeur des bandes de peinture délimitant les couloirs. Pour les courses de sprint (100 m, 200 m ou 400 m), il y a huit coureurs et chacun occupe un couloir.

Un coureur devant rester dans son couloir tout au long de la course, on considère que la distance qu'il parcourt est celle correspondant à la ligne la plus intérieure de son couloir.



1. Vérifier que la distance d'un tour de piste complet parcourue par le coureur du couloir 1 est d'environ 400 m.

   Calculons la longueur, L_1, d'un tour complet de la piste 1.

   La piste 1 est formée d'un cercle de rayon $r = 31{,}83$ m et de deux lignes droites de longueurs 100 m.
   Donc

$$\begin{aligned} L_1 &= 2\pi r + 2 \times 100 \\ &= 2\pi \times (31{,}83 \text{ m}) + 2 \times (100 \text{ m}) \\ &= 2\pi \times 31{,}83 + 2 \times 100 \text{ m}) \\ &\approx 399{,}993 \text{ m} \end{aligned}$$

   $L_1 \approx 400$ m.

2. Dessiner le couloir $n°1$ (avec ses deux bords) à l'échelle 1/1200. Indiquer les calculs effectués pour réaliser la construction.

   Dessinons le premier couloir à l'échelle.

La longueur 31,83 m en taille réelle est représentée par la longueur

$$\begin{aligned}\frac{1}{1200}\times 31{,}83\text{ m} &= \frac{1}{1200}\times 31{,}83\times 1\text{ m}\\ &= \frac{1}{1200}\times 31{,}83\times 100\text{ cm}\\ &= \frac{1}{12}\times 31{,}83\text{ cm}\\ &= 2{,}6525\text{ cm}\end{aligned}$$

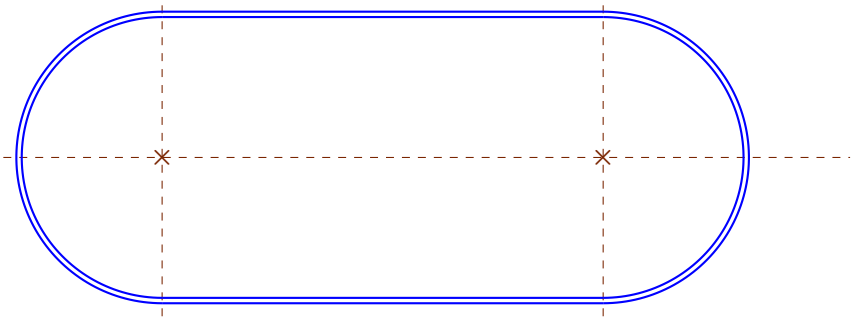
De même le rayon incluant la largeur du couloir devient

$$\begin{aligned}\frac{1}{1200}\times (31{,}83+1{,}22)\text{ m} &= \frac{1}{12}\times 33{,}05\text{ cm}\\ &\approx 2{,}75416\text{ cm}\end{aligned}$$

De même les 100 m seront représentés par une longueur de

$$\begin{aligned}\frac{1}{1200}\times 100\text{ m} &= \frac{1}{12}\times 100\text{ cm}\\ &= \frac{25}{3}\text{ cm}\\ &= 8{,}333\ldots\text{ cm}\end{aligned}$$

Enfin voici la représentation de la piste 1 à l'échelle 1/1200. En fait ce dessin est encore réduit à l'échelle 7/10 par rapport à ce qui est attendu par le sujet.



On étudie dans les questions ci-dessous la configuration d'une course de 200 m.

3. Expliquer pourquoi il y a un décalage au départ d'une course de 200 m comme sur la photographie ci-dessous :

Les coureur situés à l'extérieur du virage parcourent une plus grande distance, dans le virage, que les coureurs situés plus à l'intérieur.

4. Sur la représentation précédente,
   - le point A correspond à la position de départ du coureur dans le couloir 1 ;
   - le point P correspond à la position de départ du coureur dans le couloir 6. Pour ce coureur, le décalage correspond à la longueur de l'arc de cercle de centre O et qui a pour extrémités le point P et le point de la ligne 6 situé sur la ligne « Départ ».

   (a) Calculer le décalage du coureur du couloir 6 au centimètre près.

   Déterminons le décalage sur la ligne 6.

   Puisqu'il y a 5 couloirs de largeur 1,22 m avant d'atteindre le point P

$$\begin{aligned} OP &= OA + (6-1) \times 1{,}22 \\ &= 31{,}83 + 5 \times 1{,}22 \\ &= 37{,}93 \end{aligned}$$

   Le demi-cercle de rayon $[OP]$ a donc une longueur, en mètres, de

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2} \times 2\pi \times OP \\ &= \pi 37{,}93 \text{ m} \\ &\approx 119{,}1606 \text{ m} \end{aligned}$$

Puisque la longueur du demi-cercle de rayon $[OA]$ est de 100 m, le décalage, Δ_6, exprimé en mètres, pour la ligne 6 est

$$\begin{aligned} \Delta_6 &= L_2 - 100 \\ &\approx 119{,}1606 - 100 \text{ m} \\ &\approx 19{,}1606 \text{ m} \end{aligned}$$

Le décalage pour le couloir 6 est de 19,16 m.

On peut repérer la position de départ dans le couloir par l'angle $\widehat{AOP}$ que l'on appelle α. Cet angle dépend du numéro n du couloir.

(b) Calculer la mesure de l'angle α pour le couloir $n°6$. On donnera la mesure de l'angle arrondie au dixième de degré.

Déterminons une mesure de α en degré.

Nous utilisons le fait que la longueur de l'arc de cercle est proportionnelle à l'angle de l'arc.

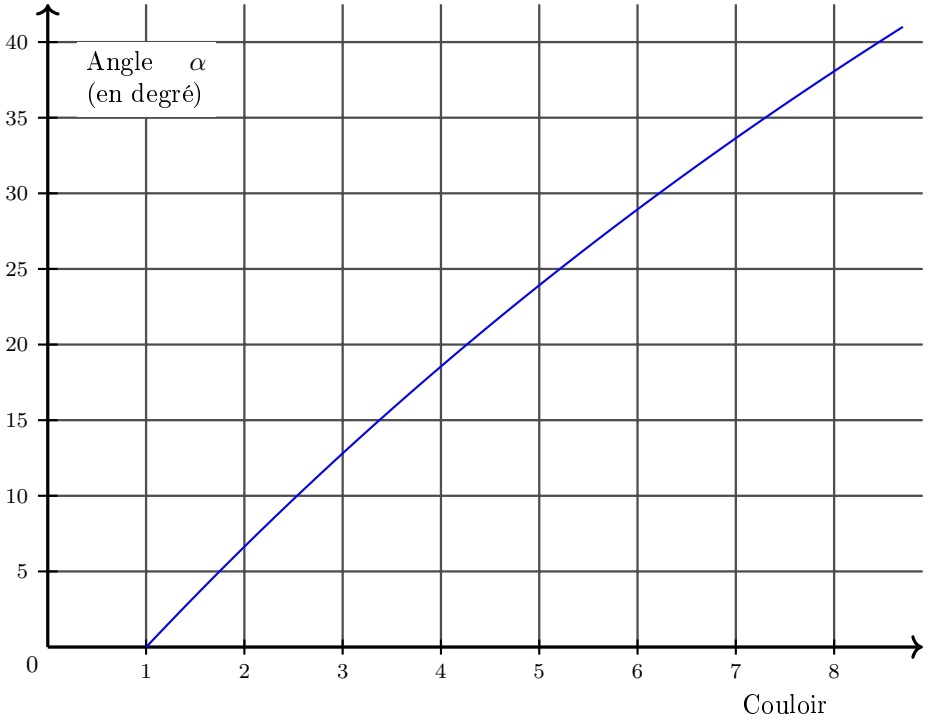
$$\frac{\alpha}{180} = \frac{\Delta_6}{L_2}$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{180} \times 180 &= \frac{\Delta_6}{L_2} \times 180 \\ \alpha &= \frac{\Delta_6 \times 180}{L_2} \\ &= \frac{180 \times (L_2 - 100)}{L_2} \\ &\approx \frac{180 \times 19{,}16}{119{,}16} \\ &\approx 28{,}94 \end{aligned}$$

$\alpha \approx 29°$.

Voici la courbe d'une fonction permettant de déterminer la valeur de α en fonction du couloir n.

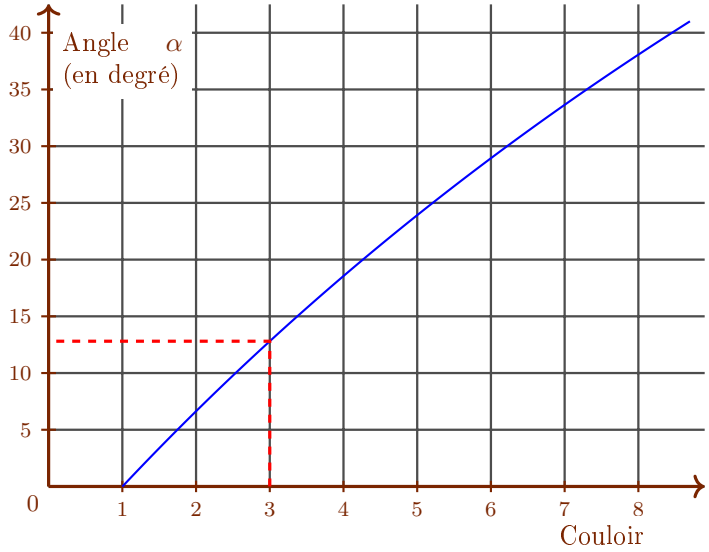


(c) Y a-t-il proportionnalité entre le numéro du couloir et la valeur de α ? Justifier.

La courbe représentative de la fonction donnant l'angle en fonction du couloir n'est pas une droite (ou ne passe pas par l'origine du repère) donc ce n'est pas une fonction linéaire. Et nous pouvons conclure :

α n'est pas proportionnel au numéro du couloir.

(d) Par lecture graphique, donner un encadrement d'amplitude 2° de la valeur de l'angle α pour le couloir 3.



Pour le couloir 3 : $12° \leqslant \alpha \leqslant 14°$.

(e) Un élève utilise un tableur pour déterminer automatiquement le décalage et l'angle en fonction du couloir.

	A	B	C	D	E
1	**Couloir**	**Décalage**	**Angle α**		
2	1				
3	2				
4	3				
5	4				
6	5				
7	6				
8	7				
9	8				
10					

Parmi les formules suivantes, quelle formule, qu'il fera ensuite glisser dans toute la colonne, peut-il entrer dans la case B2 pour calculer le décalage ? On rappelle que « PI() » renvoie le nombre π.

Formule A :

```
=PI()*((A2)*1,22+31,83)-100
```

Formule B :

```
=PI()*((A2-1)*1,22+31,83)-100
```

Formule C :

```
=PI()*((A2)*1,22)-100
```

Formule D :

```
=PI()*((A2-1)*1,22)-100
```

Formule E :

```
=PI()*((A2)*1,22+31,83)
```

Formule F :

```
=PI()*((A2-1)*1,22+31,83)
```

Formule G :

```
=PI()*((A2)*1,22)
```

Formule H :

```
=PI()*((A2-1)*1,22)
```

En reprenant le travail effectué à la question 4.(a) nous obtenons pour le couloir p :

$$\begin{aligned}\Delta_p &= \pi \times [OA + (p-1) \times 1{,}22] - 100 \\ &= \pi((p-1) \times 1{,}22 + 31{,}83) - 100\end{aligned}$$

Par conséquent la formule qui convient est

```
=PI()*((A2-1)*1,22+31,83)-100
```

5. Au 1er janvier 2018, le Jamaïcain Usain Bolt détient le record du monde du 200 mètres en 19,19 secondes.

   (a) Déterminer sa vitesse moyenne en km/h. Arrondir au dixième.

   Exprimons sa vitesse, v_u, en km/h.

$$\begin{aligned} v_u &= \frac{200 \text{ m}}{19{,}19 \text{ s}} \\ &= \frac{200 \times 1 \text{ m}}{19{,}19 \times 1 \text{ s}} \\ &= \frac{200 \times \frac{1}{1000} \text{ km}}{19{,}19 \times \frac{1}{60 \times 60} \text{ h}} \\ &= \frac{\frac{200}{1000}}{\frac{19{,}19}{60 \times 60}} \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &\approx 37{,}519 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Sa vitesse moyenne est de 37,5 km/h.

(b) À cette vitesse-là, combien mettrait-il de temps pour effectuer un marathon dont la longueur est de 42,195 km ? On donnera la réponse en heures, minutes et secondes, arrondie à la seconde près.

Déterminons le temps, t_u, mis pour faire un marathon.

$$\begin{aligned} \frac{42{,}195 \text{ km}}{37{,}5 \text{ km/h}} &= \frac{42{,}195}{37{,}5} \ \frac{\text{km} \cdot \text{h}}{\text{km}} \\ &= 1{,}1252 \text{ h} \\ &= 1 \text{ h} + 60 \times 0{,}1252 \text{ mn} \\ &= 1 \text{ h} + 7{,}512 \text{ mn} \\ &= 1 \text{ h} + 7 \text{ mn} + 60 \times 0{,}512 \text{ s} \\ &= 1 \text{ h} + 7 \text{ mn} + 30{,}72 \text{ s} \end{aligned}$$

Il parcourrait le marathon en 1 h 7mn 31 s.

(c) Le précédent record du monde du 200 mètres était détenu par l'américain Michael Johnson, « La locomotive de Wako », avec un temps de 19,32 secondes aux Jeux Olympiques d'Atlanta en 1996. De quel pourcentage Usain Bolt a-t-il réduit le temps du record du monde du 200 mètres ?

Déterminons le taux, t_x, d'évolution entre les deux temps.

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \\ &= \frac{19{,}19 - 19{,}32}{19{,}32} \times 100 \\ &\approx -0{,}672\ \% \end{aligned}$$

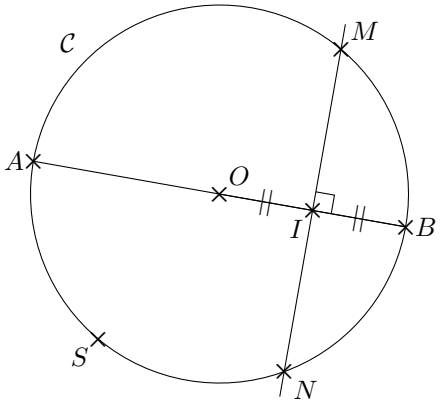
Usain Bolt a réduit le temps du précédente record de 0,67 %.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Sur la figure ci-dessous, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 5 cm. Le segment $[AB]$ est un diamètre de ce cercle. Les points M et N sont les intersections du cercle $\mathcal{C}$ avec la médiatrice du segment $[OB]$. Le point I est le milieu de $[OB]$. Le point S est le symétrique du point M par rapport au point O.



Cette figure n'est pas dessinée en vraie grandeur.

1. Quelle est la nature du triangle OMB ? Justifier.

   Déterminons la nature de OMB.

* Puisque M appartient à la médiatrice de $[OB]$, $OM = MB$, autrement dit OMB est isocèle en M.
* Puisque $[OB]$ et $[OM]$ sont des rayons de $\mathcal{C}$, OMB est isocèle en O.

Finalement

OMB est équilatéral.

2. Démontrer que le quadrilatère $AMBS$ est un rectangle.

Déterminons la nature du quadrilatère $AMBS$.

Il est possible de démontrer que les triangles MBS et SAM sont rectangles avec une hypoténuse commune mais il reste alors des cas particuliers possibles (cerf-volant, quadrilatère croisé) dont il faut discuter.

* S étant le symétrique de M par rapport à O, $[SM]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.
* Par construction $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.

$[AB]$ et $[SM]$ sont des diamètres de $\mathcal{C}$ donc ils ont même longueur et se coupent en leur milieu O.
Or un un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu est un rectangle, donc

$AMBS$ est un rectangle.

3. Calculer la valeur exacte de l'aire du rectangle $AMBS$.

Déterminons l'aire $\mathscr{A}(AMBS)$ de $AMBS$.

$AMBS$ étant un rectangle :

$$\mathscr{A}(AMBS) = 2 \times \mathscr{A}(AMB)$$

(IM) étant une hauteur de AMB :

$$\mathscr{A}(AMBS) = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times AB \times IM\right)$$

Déterminons IM.
IBM est rectangle en I, donc, d'après le théorème de Pythagore : $IB^2 + IM^2 = MB^2$.

Nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned} IB^2 + IM^2 - IB^2 &= MB^2 - IB^2 \\ IM^2 &= MB^2 - IB^2 \end{aligned}$$

Or OMB étant équilatéral $MB = OB = 5$ cm, et I étant le milieu de $[OB]$, $IB = \frac{5}{2} = 2{,}5$ cm, donc

$$\begin{aligned} IM^2 &= 5^2 - 2{,}5^2 \\ &= 18{,}75 \end{aligned}$$

IM est une longueur donc un nombre positif d'où, nécessairement, $IM = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm.

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(AMBS) &= AB \times IM \\ &= 10 \times \frac{5}{2}\sqrt{3} \\ &= 25\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$\mathscr{A}(AMBS) = 25\sqrt{3}$ cm^2.

4. Démontrer que le quadrilatère $OMBN$ est un losange.

Démontrons que $OMBN$ est un losange.

$[OB]$ et $[MN]$ sont les médiatrices l'un de l'autre, donc
— $[OB]$ et $[MN]$ se coupent en leur milieu et par conséquent $OMBN$ est un parallélogramme,
— (OB) et (MN) sont perpendiculaires et le parallélogramme $OMBN$ est donc un losange.

$OMBN$ est un losange.

Exercice 2.

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

Une réponse inexacte ou non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation 1** : 126 possède exactement 10 diviseurs.

   Il y a plusieurs façons d'aborder cette question. La décomposition en facteurs premiers de 126 par exemple est : $126 = 2^1 \times 3^2 \times 7^1$. Les diviseurs de 126 sont donc les nombres de la forme $2^{p_2} \times 3^{p_3} \times 7^{p_7}$ avec $0 \leqslant p_2 \leqslant 1$, $0 \leqslant p_3 \leqslant 2$ et $0 \leqslant p_7 \leqslant 1$. Il y a 2 choix pour l'exposant de 2, 3 choix pour celui de 3 et 2 pour celui de 7. D'après le principe multiplicatif (lemme des bergers) il y a $2 \times 3 \times 2 = 12$ possibilités de diviseurs de 126.

   1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126 sont des diviseurs de 126 et il y en a 12.

   L'affirmation 1 est fausse.

2. **Affirmation 2** : si un polygone non croisé A a un périmètre supérieur au périmètre du polygone non croisé B alors l'aire du polygone A est supérieure à l'aire du polygone B.

   Le résultat est clairement faux en considérant des polygones éventuellement aplatis.

   Dans l'exemple ci-dessous A a un périmètre supérieur à celui de B et pourtant son aire est plus petite.

   L'affirmation 2 est fausse.

3. **Affirmation 3** : si des prix augmentent de 5 % par an, ils auront plus que doublé en 15 ans.

   Déterminons le coefficient multiplicateur global.

   Une hausse de 5 % correspond à un coefficient multiplicateur de

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{5}{100} \\ &= 1{,}05 \end{aligned}$$

Par conséquent le coefficient multiplicateur global au bout de 15 ans est

$$\begin{aligned} CM_g &= \underbrace{CM \times \cdots \times CM}_{\text{15 facteurs}} \\ &= CM^{15} \\ &= 1{,}05^{15} \\ &\approx 2{,}0789 \end{aligned}$$

L'affirmation 3 est vraie.

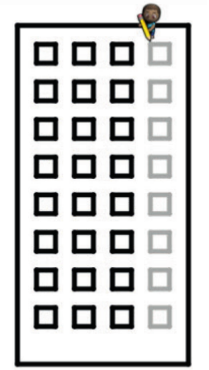
4. **Affirmation 4** : les dimensions de mon échantillon de parfum sont cinq fois plus petites que celles de mon flacon habituel. Il y a donc 25 fois moins de parfum dans l'échantillon que dans le flacon habituel.

   Si les trois dimensions de l'espace sont cinq fois plus petites les volumes sont donc $5 \times 5 \times 5 = 125$ fois plus petits.

   L'affirmation 4 est fausse.

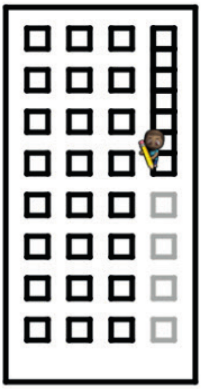
Exercice 3.

Un élève qui utilise le site « code.org » doit écrire un programme pour repasser au crayon noir les petits carrés en gris sur le dessin ci-contre.



Il propose le programme ci-dessous :

Quand il lance le programme, le dessin obtenu est le dessin ci-contre :



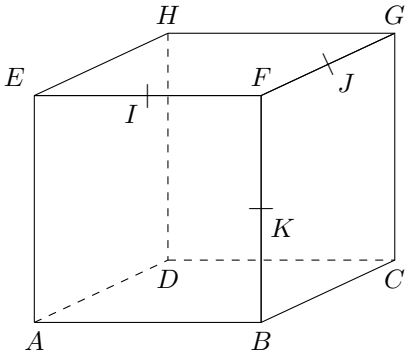
Que faut-il modifier dans le programme pour obtenir le dessin attendu ?

Le saut pour dessiner un nouveau carré n'est pas suffisant.

Il faut que le saut en avant soit de 40 pixels et non pas seulement de 20.

Exercice 4.

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 6 cm.



1. Soit I, J et K les milieux respectifs des arêtes $[FE]$, $[FG]$ et $[FB]$. Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier.

   Démontrons que IJK est équilatéral.

   IFK est rectangle en F donc, d'après le théorème de Pythagore :

   $$IK^2 = IF^2 + FK^2$$

   De plus IFK est isocèle en F donc :

   $$\begin{aligned} IK^2 &= 2 \times IF^2 \\ &= 2 \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

IK étant une longueur donc positive :

$$\begin{aligned} IK &= \sqrt{18} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

De même $KJ = IJ = 3\sqrt{2}$ cm.

IJK est équilatéral.

2. Montrer que le volume du tétraèdre $FIJK$ est 4,5 cm^3. On rappelle que le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire d'une base par la hauteur associée.

Déterminons le volume $\mathscr{V}(FIJK)$ de $FIJK$.

(JF) est la hauteur issue de J et IFK est la base correspondante. Nous en déduisons

$$\mathscr{V}(FIJK) = \frac{1}{3} JF \times \mathscr{A}(IFK)$$

Puisque IFK est isocèle rectangle en F :

$$\mathscr{V}(FIJK) = \frac{1}{3} JF \times \frac{1}{2} IF \times FK$$

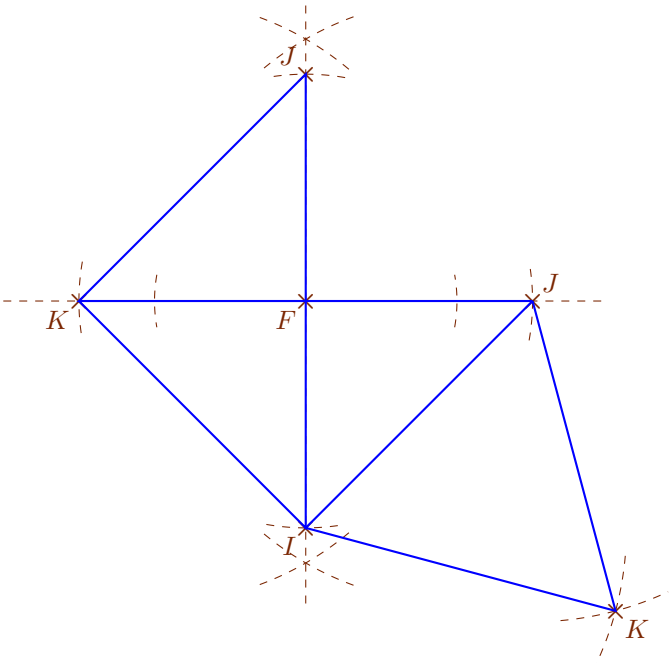
Par construction :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}(FIJK) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} FK^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{6}{2}\right)^3 \text{ cm}^3 \\ &= \frac{27}{6} \text{ cm}^3 \\ &= 4{,}5 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

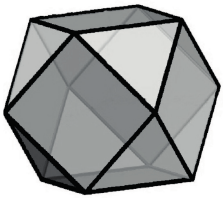
$\mathscr{V}(FIJK) = 4{,}5$ cm^3.

3. Construire, en vraie grandeur, un patron du tétraèdre $FIJK$. On laissera les traits de construction.

   Voici un patron à l'échelle.



4. On coupe le cube en suivant le plan (IJK), afin d'ôter le tétraèdre $FIJK$. On procède de la même façon avec chacun des sept autres sommets du cube.



   Le solide obtenu après ces différentes coupes s'appelle un « cuboctaèdre ».

   (a) Calculer le volume de ce cuboctaèdre.

   Calculons le volume $\mathscr{V}_{cubo}$ du cuboctaèdre.

Ce solide s'obtient en retirant les tétraèdres formant ses sommets tels que $FIJK$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{cubo} &= 6^3 - 8 \times 4{,}5 \\ &= 180 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$\mathscr{V}_{cuvo} = 180 \text{ cm}^3$.

(b) Calculer la longueur totale de ses arêtes.
On donnera le résultat arrondi au millimètre.

Déterminons la longueur totale, L_t, de ses arêtes.

Le cuboctaèdre a $6 \times 4 = 24$ arêtes qui toutes mesurent $IK = 3\sqrt{2}$.
Donc

$$\begin{aligned}L_t &= 24 \times 3\sqrt{2} \\ &\approx 101{,}82337 \text{ cm}\end{aligned}$$

$L_t = 101{,}8$ cm.