Épreuve de mathématiques CRPE 2018 groupe 2.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.
5 *points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.*
Une note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.

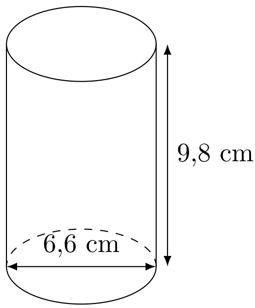
I Première partie (13 points).

Dans cette partie, on cherche à optimiser la quantité de métal nécessaire à la fabrication de canettes de 33 centilitres (cL).

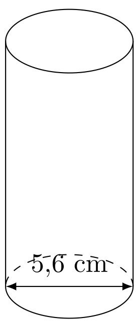
Partie A : canette classique.

On modélise une « canette classique » par le cylindre de révolution représenté ci-contre. Le volume d'un tel cylindre s'obtient en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur.

Vérifier que le volume de ce cylindre, de diamètre 6,6 cm et de hauteur 9,8 cm, est supérieur à 33 cL.



Partie B : canette « slim ».



Un nouveau format de canette est apparu dernièrement sur le marché. Ces canettes allongées, dites « slim », sont plus hautes et plus fines que les précédentes, pour une même contenance.
Le cylindre représenté ci-contre en modélise une. Son diamètre est de 5,6 cm.

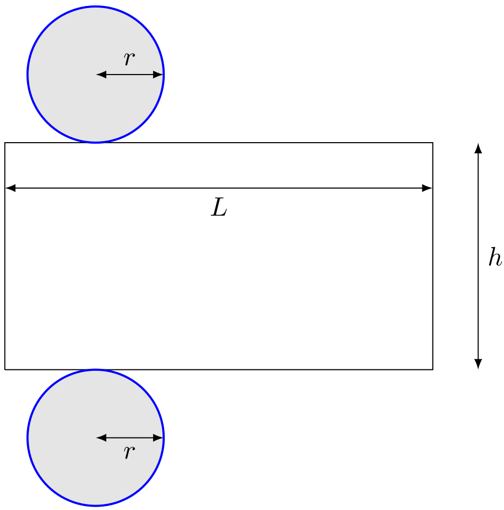
Déterminer au millimètre près la plus petite hauteur possible du cylindre pour que la canette contienne au moins 33 cL.

Partie C : étude du lien entre le rayon de la base d'une canette de 33 cL et l'aire de son patron.

On appelle r le rayon, en centimètre, de la base du cylindre modélisant une canette de 33 cL et h sa hauteur, en centimètre.

1. Vérifier que $h = \dfrac{330}{\pi r^2}$.

2. La figure ci-dessus représente le patron du cylindre.



Cette figure n'est pas à l'échelle.

   Celui-ci est formé de deux disques, et d'un rectangle de largeur h et de longueur L, exprimée en centimètre.
   Exprimer la longueur L en fonction de r.

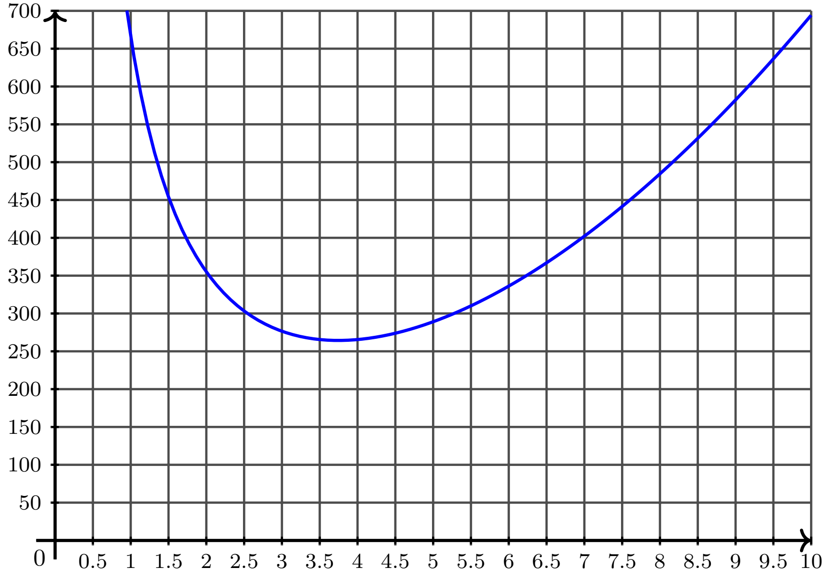
3. Vérifier que l'aire, en centimètre carré, de la partie rectangulaire du patron est $\dfrac{660}{r}$.

4. Exprimer l'aire totale A du patron du cylindre, en centimètre carré, en fonction de r.

Partie D : lecture graphique.

On s'intéresse à la réalisation d'un cylindre de révolution de base de rayon r, exprimé en centimètre, et de contenance 33 cL. L'aire, exprimée en centimètre carré, de la surface de métal nécessaire est modélisé par la fonction f qui, à tout nombre r strictement positif, associe $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$.

La fonction f est représentée ci-dessous :



Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

1. Quelle est l'aire de la surface de métal nécessaire pour un cylindre dont la base a pour rayon 1,5 cm ?

2. À quelle(s) valeur(s) du rayon du cylindre correspond une aire de 300 cm^2 ?

3. Déterminer laquelle de la canette « classique » ou de la canette « slim » utilise le moins de surface de métal pour sa réalisation. Justifier la réponse en donnant les lectures graphiques effectuées.

4. À quelle valeur du rayon correspond la surface minimale de métal nécessaire à la fabrication d'une canette de 33 cL ?

Partie E : utilisation d'un tableur.

On souhaite, à l'aide d'un tableur, affiner la réponse obtenue à la question D.4 par lecture graphique.

Voici une copie d'écran de la feuille de calcul utilisée :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
r	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
f(r)	276,55	273,28	270,59	268,42	266,75	265,54	264,76	264,40	264,41	264,80	265,53

1. Écrire une formule qui, entrée dans la cellule B2 et étirée vers la droite, permet d'obtenir les valeurs de $f(r)$ sur la ligne 2.
   Note : la fonction PI() du tableur renvoie la valeur de π avec une précision de 15 décimales.

2. Utiliser cette feuille de calcul pour déterminer un encadrement, le plus précis possible, du rayon du cylindre permettant de minimaliser l'aire de la surface de métal nécessaire à la réalisation d'une canette de 33 cL.

3. Déterminer la hauteur de la canette de 33 cL ayant une base de rayon 3,7 cm. Arrondir le résultat au dixième de centimètre.

Partie F.

Les canettes sont fabriquées à partir d'une feuille plane de tôle d'aluminium d'épaisseur 130 micromètres (μm). Un micromètre est égal à un millionième de mètre. La masse volumique de l'aluminium est 2 700 kg/m^3.

On s'intéresse aux canettes classiques dont le rayon est de 3,3 cm et dont la surface de métal nécessaire est de 268,42 cm^2, selon le tableau précédent.

On admet que l'anneau pour ouvrir la canette et le rivet de liaison entre l'anneau et le couvercle ont une masse de 1,4 g et que la masse d'aluminium nécessaire pour souder le couvercle au reste de la canette est 1,9 g.

1. Déterminer, au dixième de gramme près, la masse d'aluminium nécessaire pour fabriquer une cannette classique.

2. Il faut 9 kg d'aluminium pour fabriquer un certain type de vélo. Estimer le nombre de cannettes classiques nécessaires pour obtenir l'aluminium pour fabriquer un tel vélo.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Les informations présentées dans cet exercice sont extraites du site de l'Établissement Français du Sang qui gère le don du sang en France (https://www.dondusang.net/).

Tableau 1 : répartition de la population française selon le groupe sanguin et le rhésus.

	O	A	B	AB
Rhésus +	36 %	37 %	9 %	3 %
Rhésus -	6 %	7 %	1 %	1 %

Quel que soit le groupe ABO du donneur, son sang sera toujours très utile pour un malade.

Tableau 2 : compatibilité sanguine des donneurs et des receveurs.

DONNEURS \ RECEVEURS	O+	O-	A+	A-	B+	B-	AB+	AB-	
O+	●		●		●		●		
O-	●	●	●	●	●	●	●	●	DONNEUR UNIVERSEL
A+			●				●		
A-			●	●			●	●	
B+					●		●		
B-					●	●	●	●	
AB+							●		
AB-							●	●	
							RECEVEUR UNIVERSEL		

Lecture : une personne de groupe A rhésus négatif (A−) peut recevoir du sang d'un donneur du groupe O rhésus négatif ou du groupe A rhésus négatif. Il peut donner son sang à des personnes des groupes et rhésus A+, A−, AB+ et AB−.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit « donneur universel » ?

2. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit « receveur universel » ?

3. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française puisse donner son sang à une personne du groupe B, rhésus $+$?

4. On choisit au hasard une personne parmi les personnes du groupe O dans la population française. Quelle est la probabilité que cette personne soit « donneur universel » ?

   Arrondir le résultat au centième.

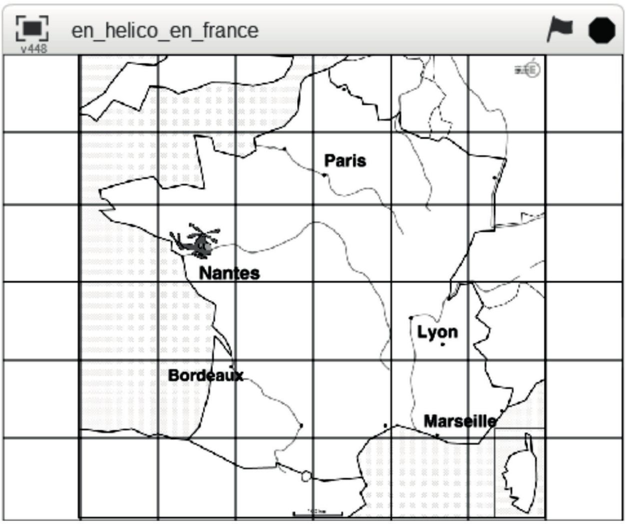
Au 1er janvier 2016, d'après l'INSEE, la population française était de 66 627 602 personnes.

Parmi ces personnes, 43 217 325 personnes avaient entre 18 et 70 ans, critère requis pour pouvoir donner son sang.

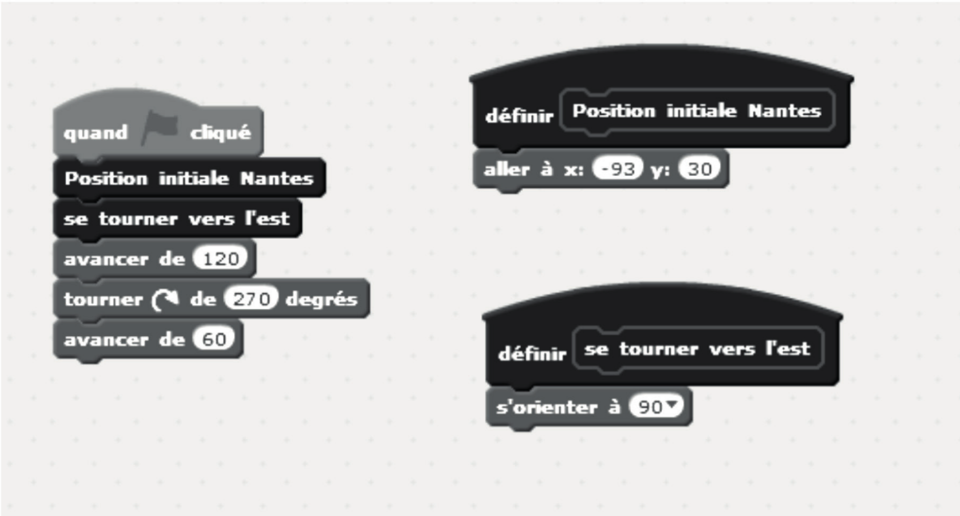
5. Estimer le nombre de « donneurs universels » en France au 1er janvier 2016.

6. Quel pourcentage de la population française représentait, au 1er janvier 2016, la population susceptible de donner son sang ?

Exercice 2.



Le programme ci-dessous a été écrit avec le logiciel Scratch pour faire se déplacer le lutin « hélicoptère » de la case « Nantes » à la case « Paris » sur l'arrière-plan ci-dessus, c'est-à-dire pour « avancer » de deux cases et « monter » d'une case.



Un élève souhaite modifier le programme pour que l'hélicoptère se déplace de la case « Nantes » à la case « Lyon ». Par quels nombres doit-il remplacer les nombres « 120 », « 270 » et « 60 » ? Justifier votre réponse.

Exercice 3.

Pour calculer de tête le carré d'un nombre entier se terminant par 5 :

— on prend le nombre de dizaines et on le multiplie par l'entier qui suit ce nombre de dizaines, cela donne le nombre de centaines du résultat ;

— on écrit ensuite 25 à droite du nombre de centaines pour obtenir le résultat.

Par exemple, 105 est composé de 10 dizaines et 5 unités, son carré s'obtient :

— étape 1 : en calculant $10 \times 11 = 110$, ce qui donne le nombre de centaines du résultat ;

— étape 2 : on écrit ensuite 25 à droite de 110 pour obtenir le résultat.

On a donc $105^2 = 11025$.

1. Montrer comment calculer mentalement 45^2.

2. Soit n un nombre entier se terminant par 5, n peut s'écrire : $10d + 5$ avec d le nombre de dizaines.
   Établir la relation :
   $$n^2 = 100d(d+1) + 25.$$

3. Expliquer en quoi le résultat de la question 2 permet d'établir la technique de calcul mental présentée dans l'énoncé.

4. Comment, par extension de la technique de calcul mental présentée, calculer mentalement le carré de 3,5 ?

Exercice 4.

ABE est un triangle rectangle en E.
$AE = 5$ cm, $AB = 13$ cm.

La droite (BE) et la droite perpendiculaire à (AB) passant par A se coupent en C.
La droite (AE) et la droite perpendiculaire à (AC) passant par C se coupent en D.

1. Réaliser la figure en vraie grandeur.

2. Déterminer l'aire du triangle CEA ; on donnera l'arrondi au dixième de mm^2.