Épreuve de mathématiques CRPE 2018 groupe 2.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Partie A : canette classique.

Déterminons le volume $\mathscr{V}_1$ de la canette.

Puisque la base de la canette est un disque de diamètre $d = 6{,}6$ cm, et donc de raton $r = \frac{6{,}6}{2} = 3{,}3$ cm, et de hauteur $h = 9{,}8$ cm, son volume est

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_1 &= \left(\pi r^2\right) \times h \\
&= \pi(3{,}3 \text{ cm})^2 \times (9{,}8 \text{ cm}) \\
&= \pi 3{,}3^2 \times 9{,}8 \text{ cm}^3 \\
&= 106{,}722\pi \text{ cm}^3 \\
&= 106{,}722\pi \times 1 \text{ cm}^3 \\
&= 106{,}722\pi \times 0{,}001 \text{ dm}^3 \\
&= 0{,}106722\pi \text{ dm}^3 \\
&= 0{,}106722\pi \times 1 \text{ dm}^3 \\
&= 0{,}106722\pi \times 1 \text{ L} \\
&= 0{,}106722\pi \times 100 \text{ cL} \\
&\approx 33{,}527 \text{ cL}
\end{aligned}$$

Le volume de la canette est supérieur à 33 cL.

Partie B : canette « slim ».

Déterminons la hauteur minimale.

Remarquons que : $33 \text{ cL} = 33\times 0{,}01 \text{ L} = 0{,}33 \text{ dm}^3 = 0{,}33\times 1000 \text{ cm}^3 = 330 \text{ cm}^3$.
Nous souhaitons que le volume $\mathscr{V}_2(h)$ de la canette, exprimé en cm^3, vérifie :

$$\mathscr{V}_2(h) \geqslant 330$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\pi\left(\frac{5{,}6}{2}\right)^2 \times h \geqslant 330$$
$$7{,}84\pi h \geqslant 330$$

Il s'agit d'une inéquation du premier degré que nous résolvons en isolant l'inconnue.
Puisque $7{,}84\pi > 0$:

$$\frac{7{,}84\pi h}{7{,}84\pi} \geqslant \frac{330}{7{,}84\pi}$$
$$h \geqslant \frac{330}{7{,}84\pi}$$

Or $\frac{330}{7{,}84\pi} \approx 13{,}398$ donc, en arrondissant au millimètre

la plus petite hauteur possible du cylindre est 13,4 cm.

Partie C : étude du lien entre le rayon de la base d'une canette de 33 cL et l'aire de son patron.

1. Exprimons h en fonction de r.

   Nous avons déjà effectué ce travail à la question précédente. Reprenons-le.

   Remarquons que : 33 cL $= 33 \times 0{,}01$ L $= 0{,}33$ dm^3 $= 0{,}33 \times 1000$ cm^3 $=$ 330 cm^3.
   Notons $\mathscr{V}$ le volume de la canette, exprimé en cm^3. Si r et h sont exprimés en centimètres alors :

$$\mathscr{V} = 330$$

   Ce qui équivaut à

$$\pi r^2 \times h = 330$$

   Si $r \neq 0$:

$$\frac{\pi r^2 h}{\pi r^2} = \frac{330}{\pi r^2}$$
$$h = \frac{330}{\pi r^2}$$

Si r et h sont exprimés en centimètres et $r \neq 0$, alors : $h = \dfrac{330}{\pi r^2}$.

2. Exprimons L en fonction de r.

   Puisqu'il s'agit du patron d'un cylindre de révolution L est la circonférence du disque formant sa base. Par conséquent, avec les notations de l'énoncé

   $$L = 2\pi r.$$

3. Déterminons l'aire, $\mathscr{A}$, de la partie rectangulaire en cm^2.

   Évidemment

   $$\mathscr{A} = L \times h$$

   D'après la question 2 :

   $$\mathscr{A} = 2\pi r \times h$$

   D'après la question 1 :

   $$\begin{aligned}\mathscr{A} &= 2\pi r \times \frac{330}{\pi r^2} \\ &= \frac{2 \times \pi \times r \times 330}{\pi \times r \times r}\end{aligned}$$

   Nous remarquons des facteurs communs au numérateur et au dénominateur :

   $$\mathscr{A} = \frac{2 \times 330}{r}$$

   $$\mathscr{A} = \frac{660}{r}.$$

4. Déterminons A en fonction de r.

   En décomposant le patron suivant les deux disques et le rectangle de la figure proposée :

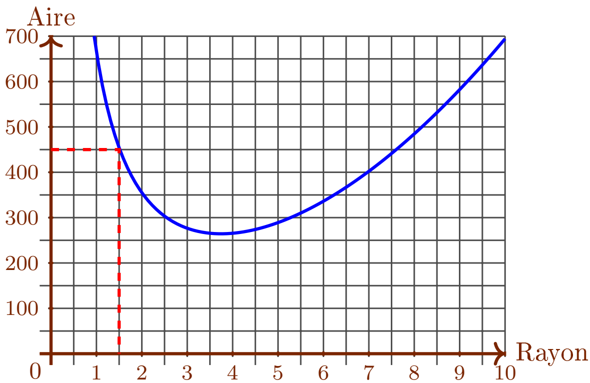
$$A = 2 \times \pi r^2 + \mathscr{A}$$

D'après la question précédente :

$$= 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$$

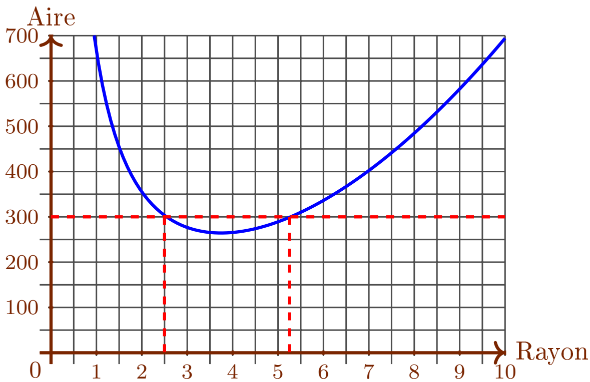
L'aire en fonction de r est, si $r \neq 0$: $A = 2\pi r^2 + \dfrac{660}{r}$.

Partie D : lecture graphique.



1.

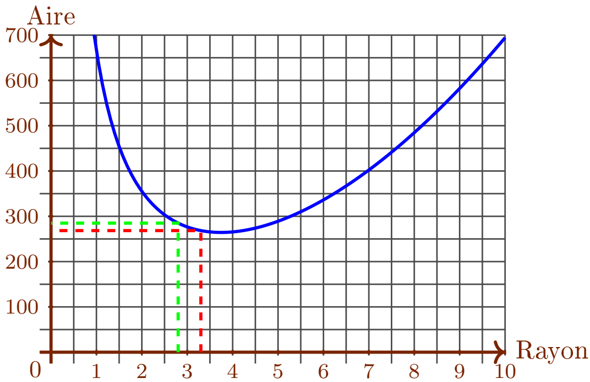
Un cylindre de rayon 1,5 cm a une aire de 450 cm^2.



2.

Une aire de 300 cm^2 correspond à un rayon de 2,5 cm ou de 5,25 cm.

3. Le rayon de la canette classique est $\frac{6{,}6}{2} = 3{,}3$ cm.
   Le rayon de la canette slim est $\frac{5{,}6}{=}2{,}8$ cm.

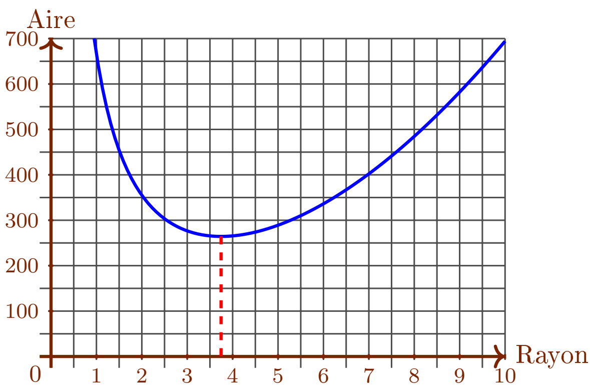


Canette classique

Canette slim

L'aire pour une canette classique est environ de 280 cm^2.
L'aire pour une canette slim est environ de 260 cm^2.

La canette classique utilise la plus petite surface de métal.

4. 

L'aire est minimale pour un rayon de 3,6 cm.

Partie E : utilisation d'un tableur.

1. Il y a diverses variantes :

   `=2*PI()*B1^2+660/B1`

   ou

   `=2*PI()*$B1*$B1+660/$B1`

   Nous retiendrons celle-ci :

   `=2*PI()*B1*B1+660/B1`

2. En s'inspirant de la courbe représentative qui nous indiquait un minimum et d'après le tableau de valeur de l'énoncé :

   l'aire semble minimale pour $r \in [3{,}6 ; 3{,}8]$.

3. Déterminons la hauteur correspondant à un rayon de 3,7 cm.

   D'après la question C.1. :

$$\begin{aligned} h &= \frac{330}{\pi r^2} \\ &= \frac{330}{\pi \times 3{,}7^2} \\ &\approx 7{,}67 \end{aligned}$$

   Enfin

   Une canette de rayon 3,7 cm a une hauteur de 7,7 cm.

Partie F.

1. Déterminons la masse d'une canette.

   Déterminons la masse de la feuille d'aluminium m_f.
   La feuille peut être vue comme un prisme dont la base a une surface de $268{,}42\ \text{cm}^2$ et dont la hauteur est $h = 130 \times 10^{-6}\ \text{m} = 130 \times 10^{-6} \times 100\ \text{cm} = 130 \times 10^{-4}\ \text{cm} = 0{,}013\ \text{cm}$. Donc son volume est :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_f &= (268{,}42\ \text{cm}^2) \times (0{,}013\ \text{cm}) \\ &= 268{,}42 \times 0{,}013\ \text{cm}^3 \\ &= 3{,}48946\ \text{cm}^3 \\ &= 3{,}48946 \times 1\ \text{cm}^3 \\ &= 3{,}48946 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

   Ce volume représente une masse de

$$\begin{aligned} m_f &= \rho_{\text{Al}} \times \mathscr{V}_f \\ &= (2700\ \text{kg/m}^3) \times (3{,}48946 \times 10^{-6}\ \text{m}^3) \\ &= 2700 \times 3{,}48946 \times 10^{-6}\ \text{kg} \\ &= 0{,}00942542\ \text{kg} \\ &= 0{,}00942542 \times 1\ \text{kg} \\ &= 0{,}00942542 \times 1000\ \text{g} \\ &= 9{,}42542\ \text{g} \end{aligned}$$

   En tenant compte de l'anneau et de la soudure, la masse de la canette est donc en gramme :

$$\begin{aligned} m_{\text{canette}} &= 9{,}42542 + 1{,}4 + 1{,}9 \\ &= 12{,}721542 \end{aligned}$$

   La masse du canette est donc 12,7 g.

2. Déterminons le nombre N_c de canettes qui égale la masse du vélo.

$$\begin{aligned} N_c &= \frac{9\text{ kg}}{m_{\text{canette}}} \\ &\approx \frac{9 \times 1\text{ kg}}{12{,}7\text{ g}} \\ &\approx \frac{9 \times 1000\text{ g}}{12{,}7\text{ g}} \\ &\approx \frac{9000}{12{,}7} \\ &\approx 708{,}66 \end{aligned}$$

Il faut 709 canettes pour fabriquer un vélo.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

1. Calculons la probabilité qu'une personne soit donneur universel.

   Puisqu'il y a 6 % $= \frac{6}{100} = 0{,}06$ de donneurs universels

   la probabilité qu'une personne soit donneur universel est 0,06.

2. Calculons la probabilité qu'une personne soit donneur universel.

   Puisqu'il y a 3 % $= \frac{3}{100} = 0{,}03$ de receveurs universels

   la probabilité qu'une personne soit receveur universel est 0,03.

3. Notons E_1 : « la personne peut donner à une personne du groupe $B+$ ».

   Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

Une personne réalise E_1 si elle est du groupe $O+$, $O-$, $B+$ ou $B-$. Les groupes de populations correspondants sont disjoints donc la proportion de la population qui réalise E_1 est

$$36 + 6 + 9 + 1 = 52\ \%.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = 0{,}52.}$$

4. Nous allons faire une rédaction utilisant les probabilités conditionnelles pour simplifier la rédaction. Un raisonnement semblable est possible avec les proportions.

   Notons E_2 : « la personne est de groupe O » et E_3 : « la personne est donneur universel ».

   Calculons $\mathbb{P}_{E_2}(E_3)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{E_2}(E_3) &= \frac{\mathbb{P}_(E_2 \cap E_3)}{\mathbb{P}_(E_2)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(E_3)}{\mathbb{P}(E_2)}\\ &= \frac{0{,}06}{0{,}36 + 0{,}06}\\ &= \frac{1}{7}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{E_2}(E_3) = \tfrac{1}{7}.}$$

5. Le nombre de donneurs universels parmi les Français âgés de 18 à 70 ans est

$$\begin{aligned}N_u &= \frac{6}{100} \times 43\,217\,325\\ &= 2\,593\,039{,}5\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il y a } 2\,593\,039 \text{ donneurs universels en France.}}$$

6. Déterminons la fréquence des potentiels donneurs de sang en France.

$$\begin{aligned} f &= \frac{43\,217\,325}{66\,627\,602} \\ &\approx 0{,}648639 \end{aligned}$$

Finalement

Les donneurs de sang pourraient représenter 64,86 % de la population.

Exercice 2.

Il faut avancer de $3 \times 60 = 180$, tourner de 90 degrés, avancer de 60.

Exercice 3.

1. Calculons 45^2.

$4 \times 5 = 20$, donc :

$$45^2 = 2025.$$

2. Démontrons le résultat proposé.

$$n^2 = (10d + 5)^2$$

Avec une identité remarquable :

$$\begin{aligned} n^2 &= (10d)^2 + 2 \times (10d) \times 5 + 5^2 \\ &= 10^2 \times d^2 + 2 \times 10 \times 5 \times d + 25 \\ &= 100d^2 + 100d + 25 \\ &= 100d \times d + 100d \times 1 + 25 \\ &= 100d \times (d + 1) + 25 \end{aligned}$$

Ainsi :

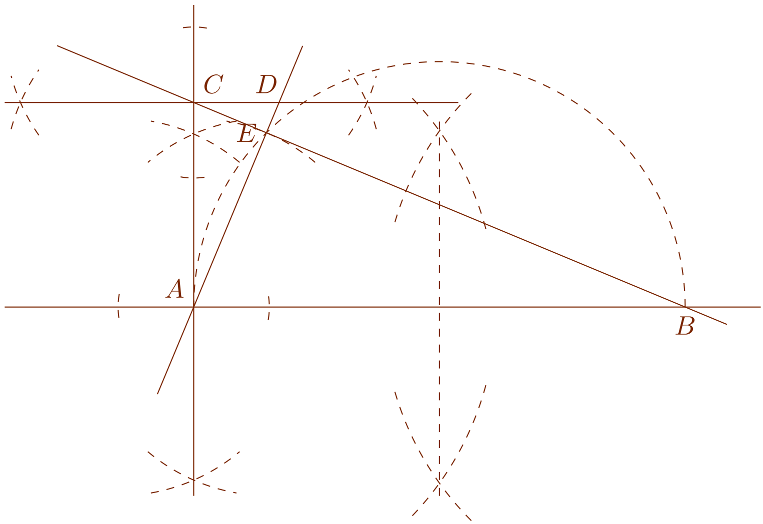
$$n^2 = 100d(d+1) + 25.$$

3. Le nombre de centaine de n^2 est obtenu en multipliant le nombre de dizaine d par l'entier qui le suit $d+1$, auquel il faut ajouter 25.

4. $3{,}5 = \frac{35}{10}$ donc $3{,}5^2 = \left(\frac{35}{10}\right)^2 = \frac{35^2}{100}$.
Pour calculer $3{,}5^2$ il suffit d'utiliser la technique appliquée à 35 est diviser par 100 le résultat ainsi obtenu.

Exercice 4.

1. Voici une construction uniquement à la règle et au compas.



2. Déterminons l'aire de AEC.

La démonstration qui suit est longue, mais elle n'utilise que des outils mathématiques élémentaires.

* Montrons d'abord que CEA est une réduction de AEB (les triangles sont semblables).

Notons $\widehat{EBA} = \theta$.
Puisque EAB est rectangle en E, $\widehat{BAE} = 90 - \theta$.

Puisque ABC est rectangle en A, $\widehat{EAC} = 90 - \widehat{BAE} = 90 - (90 - \theta) = \theta$.
Puisque CEA est rectangle en E, $\widehat{ACE} = 180 - \widehat{CEA} - \widehat{EAC} = 180 - 90 - \theta = 90 - \theta$.
Ainsi CEA et AEB ont des angles de mêmes mesures.

* Déterminons EB.

AEB étant rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore,

$$AE^2 + EB^2 = AB^2$$

d'où :

$$\begin{aligned} EB^2 &= AB^2 - AE^2 \\ &= 13^2 - 5^2 \\ &= 144 \end{aligned}$$

et puisque EB est une longueur c'est un nombre positif, donc

$$\begin{aligned} EB &= \sqrt{144} \\ &= 12 \end{aligned}$$

* Déterminons l'aire, $\mathscr{A}$, de AEB.

Puisque AEB est rectangle en E :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \frac{1}{2} \times AE \times EB \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 \\ &= 30 \end{aligned}$$

* Déterminons le coefficient de réduction α.

$$\frac{AE}{EB} = \frac{5}{12}$$

* Déterminons l'aire $\mathscr{A}'$ de CEA.

Puisque CEA est rectangle en E :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}' &= \frac{1}{2} \times CE \times EA \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{12}AE\right) \times \left(\frac{5}{12}EB\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{12} \times 5\right) \times \left(\frac{5}{12} \times 12\right) \\
&= \frac{125}{24}
\end{aligned}$$

EN tenant compte des unités :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}' &= \frac{125}{24} 1\ \text{cm}^2 \\
&= \frac{125}{24} 100\ \text{mm}^2 \\
&= 520{,}8333\ldots\ \text{mm}^2
\end{aligned}$$

Le triangle CEA a une aire de 520,8 mm^2.