Épreuve de mathématiques CRPE 2018 groupe 2.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.
5 *points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.*
Une note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.

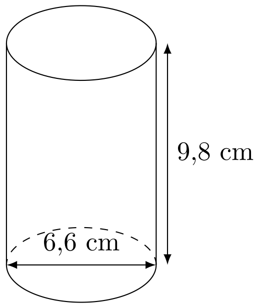
I Première partie (13 points).

Dans cette partie, on cherche à optimiser la quantité de métal nécessaire à la fabrication de canettes de 33 centilitres (cL).

Partie A : canette classique.

On modélise une « canette classique » par le cylindre de révolution représenté ci-contre. Le volume d'un tel cylindre s'obtient en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur.

Vérifier que le volume de ce cylindre, de diamètre 6,6 cm et de hauteur 9,8 cm, est supérieur à 33 cL.



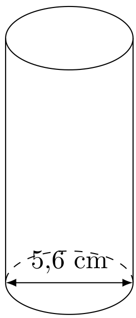
Déterminons le volume $\mathscr{V}_1$ de la canette.

Puisque la base de la canette est un disque de diamètre $d = 6{,}6$ cm, et donc de raton $r = \frac{6{,}6}{2} = 3{,}3$ cm, et de hauteur $h = 9{,}8$ cm, son volume est

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_1 &= \left(\pi r^2\right) \times h \\
&= \pi(3{,}3\text{ cm})^2 \times (9{,}8\text{ cm}) \\
&= \pi 3{,}3^2 \times 9{,}8\text{ cm}^3 \\
&= 106{,}722\pi\text{ cm}^3 \\
&= 106{,}722\pi \times 1\text{ cm}^3 \\
&= 106{,}722\pi \times 0{,}001\text{ dm}^3 \\
&= 0{,}106722\pi\text{ dm}^3 \\
&= 0{,}106722\pi \times 1\text{ dm}^3 \\
&= 0{,}106722\pi \times 1\text{ L} \\
&= 0{,}106722\pi \times 100\text{ cL} \\
&\approx 33{,}527\text{ cL}
\end{aligned}$$

Le volume de la canette est supérieur à 33 cL.

Partie B : canette « slim ».



Un nouveau format de canette est apparu dernièrement sur le marché. Ces canettes allongées, dites « slim », sont plus hautes et plus fines que les précédentes, pour une même contenance.
Le cylindre représenté ci-contre en modélise une. Son diamètre est de 5,6 cm.

Déterminer au millimètre près la plus petite hauteur possible du cylindre pour que la canette contienne au moins 33 cL.

Déterminons la hauteur minimale.

Remarquons que : 33 cL $= 33 \times 0{,}01$ L $= 0{,}33$ dm^3 $= 0{,}33 \times 1000$ cm^3 $= 330$ cm^3.
Nous souhaitons que le volume $\mathscr{V}_2(h)$ de la canette, exprimé en cm^3, vérifie :

$$\mathscr{V}_2(h) \geqslant 330$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\pi\left(\frac{5{,}6}{2}\right)^2 \times h \geqslant 330$$
$$7{,}84\pi h \geqslant 330$$

Il s'agit d'une inéquation du premier degré que nous résolvons en isolant l'inconnue.
Puisque $7{,}84\pi > 0$:

$$\frac{7{,}84\pi h}{7{,}84\pi} \geqslant \frac{330}{7{,}84\pi}$$
$$h \geqslant \frac{330}{7{,}84\pi}$$

Or $\frac{330}{7{,}84\pi} \approx 13{,}398$ donc, en arrondissant au millimètre

la plus petite hauteur possible du cylindre est 13,4 cm.

Partie C : étude du lien entre le rayon de la base d'une canette de 33 cL et l'aire de son patron.

On appelle r le rayon, en centimètre, de la base du cylindre modélisant une canette de 33 cL et h sa hauteur, en centimètre.

1. Vérifier que $h = \dfrac{330}{\pi r^2}$.

   Exprimons h en fonction de r.

   Nous avons déjà effectué ce travail à la question précédente. Reprenons-le.

   Remarquons que : 33 cL $= 33 \times 0{,}01$ L $= 0{,}33$ dm^3 $= 0{,}33 \times 1000$ cm^3 $=$ 330 cm^3.
   Notons $\mathscr{V}$ le volume de la canette, exprimé en cm^3. Si r et h sont exprimés en centimètres alors :

$$\mathscr{V} = 330$$

   Ce qui équivaut à

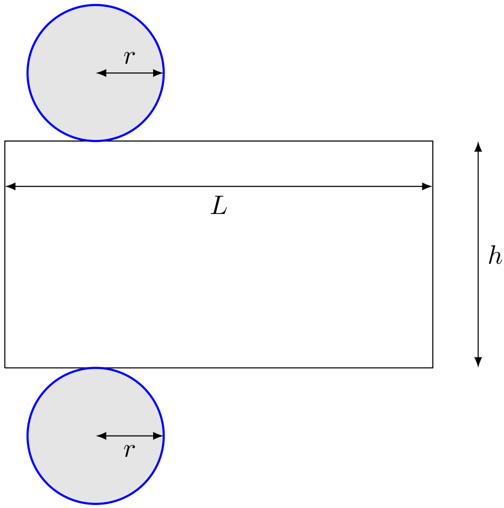
$$\pi r^2 \times h = 330$$

Si $r \neq 0$:

$$\frac{\pi r^2 h}{\pi r^2} = \frac{330}{\pi r^2}$$
$$h = \frac{330}{\pi r^2}$$

Si r et h sont exprimés en centimètres et $r \neq 0$, alors : $h = \dfrac{330}{\pi r^2}$.

2. La figure ci-dessus représente le patron du cylindre.



Cette figure n'est pas à l'échelle.

Celui-ci est formé de deux disques, et d'un rectangle de largeur h et de longueur L, exprimée en centimètre.
Exprimer la longueur L en fonction de r.

Exprimons L en fonction de r.

Puisqu'il s'agit du patron d'un cylindre de révolution L est la circonférence du disque formant sa base. Par conséquent, avec les notations de l'énoncé

$$L = 2\pi r.$$

3. Vérifier que l'aire, en centimètre carré, de la partie rectangulaire du patron est $\dfrac{660}{r}$.

Déterminons l'aire, $\mathscr{A}$, de la partie rectangulaire en cm^2.

Évidemment

$$\mathscr{A} = L \times h$$

D'après la question 2 :

$$\mathscr{A} = 2\pi r \times h$$

D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= 2\pi r \times \frac{330}{\pi r^2} \\ &= \frac{2 \times \pi \times r \times 330}{\pi \times r \times r}\end{aligned}$$

Nous remarquons des facteurs communs au numérateur et au dénominateur :

$$\mathscr{A} = \frac{2 \times 330}{r}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{660}{r}.}$$

4. Exprimer l'aire totale A du patron du cylindre, en centimètre carré, en fonction de r.

Déterminons A en fonction de r.

En décomposant le patron suivant les deux disques et le rectangle de la figure proposée :

$$A = 2 \times \pi r^2 + \mathscr{A}$$

D'après la question précédente :

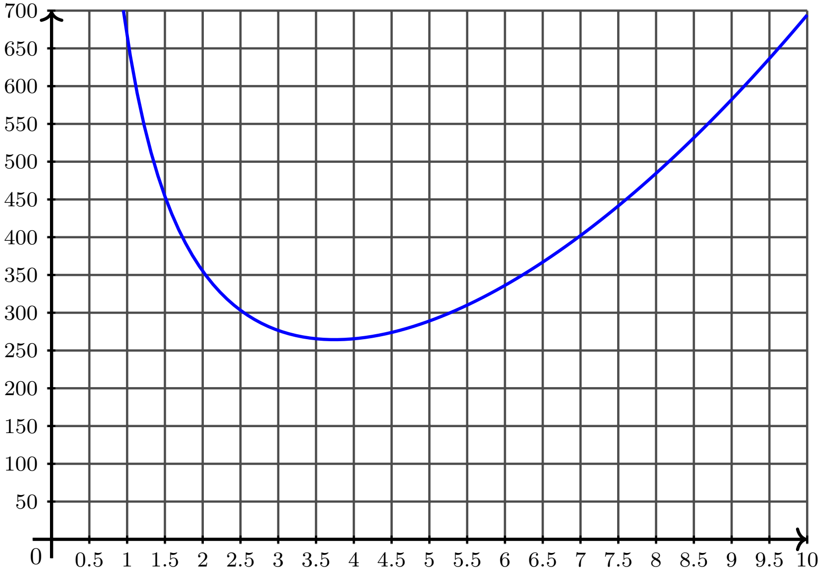
$$= 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$$

L'aire en fonction de r est, si $r \neq 0$: $A = 2\pi r^2 + \dfrac{660}{r}$.

Partie D : lecture graphique.

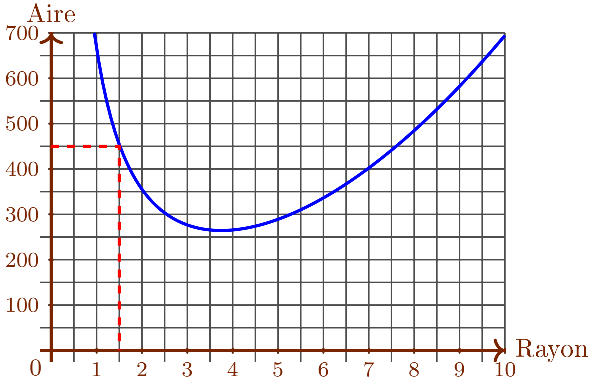
On s'intéresse à la réalisation d'un cylindre de révolution de base de rayon r, exprimé en centimètre, et de contenance 33 cL. L'aire, exprimée en centimètre carré, de la surface de métal nécessaire est modélisé par la fonction f qui, à tout nombre r strictement positif, associe $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$.

La fonction f est représentée ci-dessous :



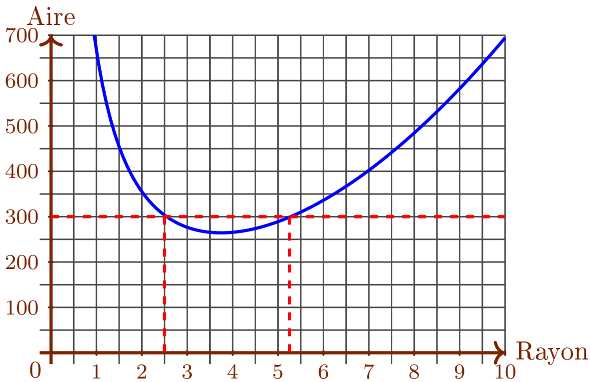
Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

1. Quelle est l'aire de la surface de métal nécessaire pour un cylindre dont la base a pour rayon 1,5 cm ?



Un cylindre de rayon 1,5 cm a une aire de 450 cm^2.

2. À quelle(s) valeur(s) du rayon du cylindre correspond une aire de 300 cm^2 ?

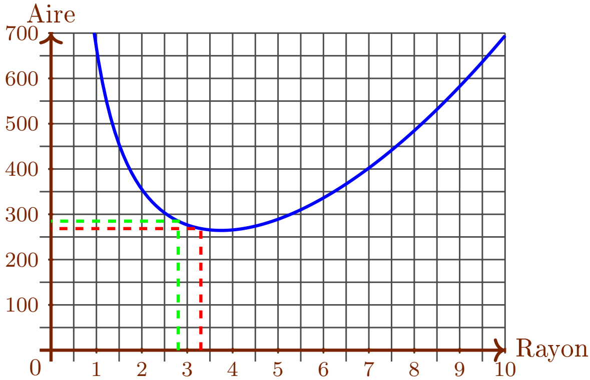


Une aire de 300 cm^2 correspond à un rayon de 2,5 cm ou de 5,25 cm.

3. Déterminer laquelle de la canette « classique » ou de la canette « slim » utilise le moins de surface de métal pour sa réalisation. Justifier la réponse en donnant les lectures graphiques effectuées.

Le rayon de la canette classique est $\frac{6,6}{2} = 3,3$ cm.

Le rayon de la canette slim est $\frac{5,6}{=}2,8$ cm.



Canette classique

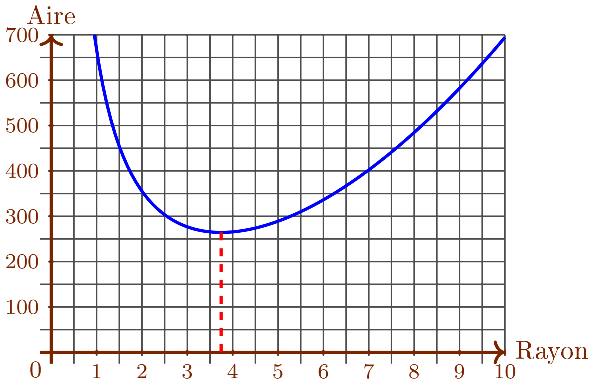
Canette slim

L'aire pour une canette classique est environ de 280 cm^2.

L'aire pour une canette slim est environ de 260 cm^2.

La canette classique utilise la plus petite surface de métal.

4. À quelle valeur du rayon correspond la surface minimale de métal nécessaire à la fabrication d'une canette de 33 cL ?



L'aire est minimale pour un rayon de 3,6 cm.

Partie E : utilisation d'un tableur.

On souhaite, à l'aide d'un tableur, affiner la réponse obtenue à la question D.4 par lecture graphique.

Voici une copie d'écran de la feuille de calcul utilisée :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	r	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
2	f(r)	276,55	273,28	270,59	268,42	266,75	265,54	264,76	264,40	264,41	264,80	265,53

1. Écrire une formule qui, entrée dans la cellule B2 et étirée vers la droite, permet d'obtenir les valeurs de $f(r)$ sur la ligne 2.
   Note : la fonction PI() du tableur renvoie la valeur de π avec une précision de 15 décimales.

   Il y a diverses variantes :

   `=2*PI()*B1^2+660/B1`

   ou

   `=2*PI()*$B1*$B1+660/$B1`

   Nous retiendrons celle-ci :

   `=2*PI()*B1*B1+660/B1`

2. Utiliser cette feuille de calcul pour déterminer un encadrement, le plus précis possible, du rayon du cylindre permettant de minimaliser l'aire de la surface de métal nécessaire à la réalisation d'une canette de 33 cL.

   En s'inspirant de la courbe représentative qui nous indiquait un minimum et d'après le tableau de valeur de l'énoncé :

   l'aire semble minimale pour $r \in [3{,}6 ; 3{,}8]$.

3. Déterminer la hauteur de la canette de 33 cL ayant une base de rayon 3,7 cm. Arrondir le résultat au dixième de centimètre.

   Déterminons la hauteur correspondant à un rayon de 3,7 cm.

   D'après la question C.1. :

$$\begin{aligned} h &= \frac{330}{\pi r^2} \\ &= \frac{330}{\pi \times 3{,}7^2} \\ &\approx 7{,}67 \end{aligned}$$

Enfin

Une canette de rayon 3,7 cm a une hauteur de 7,7 cm.

Partie F.

Les canettes sont fabriquées à partir d'une feuille plane de tôle d'aluminium d'épaisseur 130 micromètres (μm). Un micromètre est égal à un millionième de mètre. La masse volumique de l'aluminium est 2 700 kg/m^3.

On s'intéresse aux canettes classiques dont le rayon est de 3,3 cm et dont la surface de métal nécessaire est de 268,42 cm^2, selon le tableau précédent.

On admet que l'anneau pour ouvrir la canette et le rivet de liaison entre l'anneau et le couvercle ont une masse de 1,4 g et que la masse d'aluminium nécessaire pour souder le couvercle au reste de la canette est 1,9 g.

1. Déterminer, au dixième de gramme près, la masse d'aluminium nécessaire pour fabriquer une cannette classique.

   Déterminons la masse d'une canette.

   Déterminons la masse de la feuille d'aluminium m_f.
   La feuille peut être vue comme un prisme dont la base a une surface de 268,42 cm^2 et dont la hauteur est $h = 130 \times 10^{-6}$ m $= 130 \times 10^{-6} \times 100$ cm $=$ 130×10^{-4} cm $=$ 0,013 cm. Donc son volume est :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_f &= (268{,}42 \text{ cm}^2) \times (0{,}013 \text{ cm}) \\ &= 268{,}42 \times 0{,}013 \text{ cm}^3 \\ &= 3{,}48946 \text{ cm}^3 \\ &= 3{,}48946 \times 1 \text{ cm}^3 \\ &= 3{,}48946 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Ce volume représente une masse de

$$\begin{aligned} m_f &= \rho_{\text{Al}} \times \mathscr{V}_f \\ &= (2700\ \text{kg/m}^3) \times (3{,}48946 \times 10^{-6}\ \text{m}^3) \\ &= 2700 \times 3{,}48946 \times 10^{-6}\ \text{kg} \\ &= 0{,}00942542\ \text{kg} \\ &= 0{,}00942542 \times 1\ \text{kg} \\ &= 0{,}00942542 \times 1000\ \text{g} \\ &= 9{,}42542\ \text{g} \end{aligned}$$

En tenant compte de l'anneau et de la soudure, la masse de la canette est donc en gramme :

$$\begin{aligned} m_{\text{canette}} &= 9{,}42542 + 1{,}4 + 1{,}9 \\ &= 12{,}721542 \end{aligned}$$

La masse du canette est donc 12,7 g.

2. Il faut 9 kg d'aluminium pour fabriquer un certain type de vélo. Estimer le nombre de cannettes classiques nécessaires pour obtenir l'aluminium pour fabriquer un tel vélo.

Déterminons le nombre N_c de canettes qui égale la masse du vélo.

$$\begin{aligned} N_c &= \frac{9\ \text{kg}}{m_{\text{canette}}} \\ &\approx \frac{9 \times 1\ \text{kg}}{12{,}7\ \text{g}} \\ &\approx \frac{9 \times 1000\ \text{g}}{12{,}7\ \text{g}} \\ &\approx \frac{9000}{12{,}7} \\ &\approx 708{,}66 \end{aligned}$$

Il faut 709 canettes pour fabriquer un vélo.

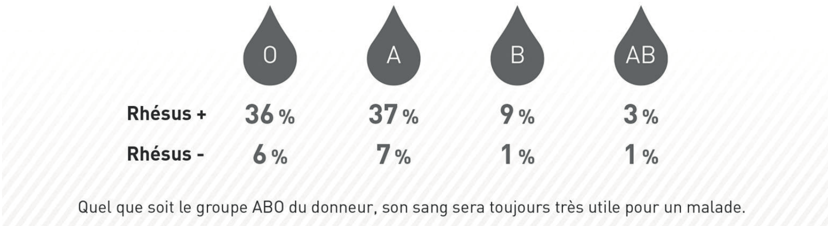
II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Les informations présentées dans cet exercice sont extraites du site de l'Établissement Français du Sang qui gère le don du sang en France (https://www.dondusang.net/).

Tableau 1 : répartition de la population française selon le groupe sanguin et le rhésus.



	O	A	B	AB
Rhésus +	36 %	37 %	9 %	3 %
Rhésus -	6 %	7 %	1 %	1 %

Quel que soit le groupe ABO du donneur, son sang sera toujours très utile pour un malade.

Tableau 2 : compatibilité sanguine des donneurs et des receveurs.

DONNEURS	RECEVEURS							
	O+	O-	A+	A-	B+	B-	AB+	AB-
O+	💧		💧		💧		💧	
O-	💧	💧	💧	💧	💧	💧	💧	💧
A+			💧				💧	
A-			💧	💧			💧	💧
B+					💧		💧	
B-					💧	💧	💧	💧
AB+							💧	
AB-							💧	💧

DONNEUR UNIVERSEL (O-)

RECEVEUR UNIVERSEL (AB+)

Lecture : une personne de groupe A rhésus négatif ($A-$) peut recevoir du sang d'un donneur du groupe O rhésus négatif ou du groupe A rhésus négatif. Il peut donner son sang à des personnes des groupes et rhésus $A+$, $A-$, $AB+$ et $AB-$.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit « donneur universel » ?

   Calculons la probabilité qu'une personne soit donneur universel.

   Puisqu'il y a $6\ \% = \frac{6}{100} = 0{,}06$ de donneurs universels

la probabilité qu'une personne soit donneur universel est 0,06.

2. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit « receveur universel » ?

   Calculons la probabilité qu'une personne soit donneur universel.

   Puisqu'il y a $3\ \% = \frac{3}{100} = 0{,}03$ de receveurs universels

la probabilité qu'une personne soit receveur universel est 0,03.

3. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française puisse donner son sang à une personne du groupe B, rhésus $+$?

   Notons E_1 : « la personne peut donner à une personne du groupe $B+$ ».

   Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

   Une personne réalise E_1 si elle est du groupe $O+$, $O-$, $B+$ ou $B-$. Les groupes de populations correspondants sont disjoints donc la proportion de la population qui réalise E_1 est

$$36 + 6 + 9 + 1 = 52~\%.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = 0{,}52.}$$

4. On choisit au hasard une personne parmi les personnes du groupe O dans la population française. Quelle est la probabilité que cette personne soit « donneur universel » ?
   Arrondir le résultat au centième.

   Nous allons faire une rédaction utilisant les probabilités conditionnelles pour simplifier la rédaction. Un raisonnement semblable est possible avec les proportions.

   Notons E_2 : « la personne est de groupe O » et E_3 : « la personne est donneur universel ».

   Calculons $\mathbb{P}_{E_2}(E_3)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{E_2}(E_3) &= \frac{\mathbb{P}_(E_2 \cap E_3)}{\mathbb{P}_(E_2)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(E_3)}{\mathbb{P}(E_2)}\\ &= \frac{0{,}06}{0{,}36 + 0{,}06}\\ &= \frac{1}{7}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{E_2}(E_3) = \tfrac{1}{7}.}$$

Au 1er janvier 2016, d'après l'INSEE, la population française était de 66 627 602 personnes.

Parmi ces personnes, 43 217 325 personnes avaient entre 18 et 70 ans, critère requis pour pouvoir donner son sang.

5. Estimer le nombre de « donneurs universels » en France au 1er janvier 2016.

   Le nombre de donneurs universels parmi les Français âgés de 18 à 70 ans est

$$\begin{aligned} N_u &= \frac{6}{100} \times 43\,217\,325 \\ &= 2\,593\,039{,}5 \end{aligned}$$

   Il y a 2 593 039 donneurs universels en France.

6. Quel pourcentage de la population française représentait, au 1er janvier 2016, la population susceptible de donner son sang ?

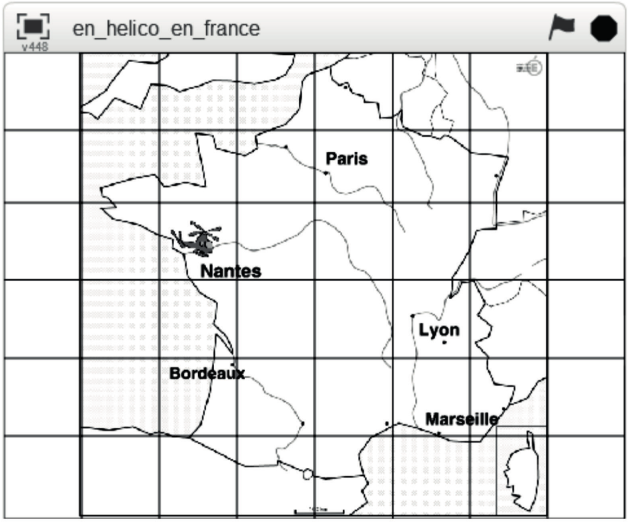
   Déterminons la fréquence des potentiels donneurs de sang en France.

$$\begin{aligned} f &= \frac{43\,217\,325}{66\,627\,602} \\ &\approx 0{,}648639 \end{aligned}$$

   Finalement

   Les donneurs de sang pourraient représenter 64,86 % de la population.

Exercice 2.



Le programme ci-dessous a été écrit avec le logiciel Scratch pour faire se déplacer le lutin « hélicoptère » de la case « Nantes » à la case « Paris » sur l'arrière-plan ci-dessus, c'est-à-dire pour « avancer » de deux cases et « monter » d'une case.

Un élève souhaite modifier le programme pour que l'hélicoptère se déplace de la case « Nantes » à la case « Lyon ». Par quels nombres doit-il remplacer les nombres « 120 », « 270 » et « 60 » ? Justifier votre réponse.

Il faut avancer de $3 \times 60 = 180$, tourner de 90 degrés, avancer de 60.

Exercice 3.

Pour calculer de tête le carré d'un nombre entier se terminant par 5 :
— on prend le nombre de dizaines et on le multiplie par l'entier qui suit ce nombre de dizaines, cela donne le nombre de centaines du résultat ;
— on écrit ensuite 25 à droite du nombre de centaines pour obtenir le résultat.
Par exemple, 105 est composé de 10 dizaines et 5 unités, son carré s'obtient :
— étape 1 : en calculant $10 \times 11 = 110$, ce qui donne le nombre de centaines du résultat ;
— étape 2 : on écrit ensuite 25 à droite de 110 pour obtenir le résultat.
On a donc $105^2 = 11025$.

1. Montrer comment calculer mentalement 45^2.

Calculons 45^2.

$4 \times 5 = 20$, donc :

$$45^2 = 2025.$$

2. Soit n un nombre entier se terminant par 5, n peut s'écrire : $10d + 5$ avec d le nombre de dizaines.
Établir la relation :
$$n^2 = 100d(d+1) + 25.$$

Démontrons le résultat proposé.

$$n^2 = (10d+5)^2$$

Avec une identité remarquable :

$$\begin{aligned} n^2 &= (10d)^2 + 2 \times (10d) \times 5 + 5^2 \\ &= 10^2 \times d^2 + 2 \times 10 \times 5 \times d + 25 \\ &= 100d^2 + 100d + 25 \\ &= 100d \times d + 100d \times 1 + 25 \\ &= 100d \times (d+1) + 25 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{n^2 = 100d(d+1) + 25.}$$

3. Expliquer en quoi le résultat de la question 2 permet d'établir la technique de calcul mental présentée dans l'énoncé.

   Le nombre de centaine de n^2 est obtenu en multipliant le nombre de dizaine d par l'entier qui le suit $d+1$, auquel il faut ajouter 25.

4. Comment, par extension de la technique de calcul mental présentée, calculer mentalement le carré de 3,5 ?

   $3{,}5 = \frac{35}{10}$ donc $3{,}5^2 = \left(\frac{35}{10}\right)^2 = \frac{35^2}{100}$.
   Pour calculer $3{,}5^2$ il suffit d'utiliser la technique appliquée à 35 est diviser par 100 le résultat ainsi obtenu.

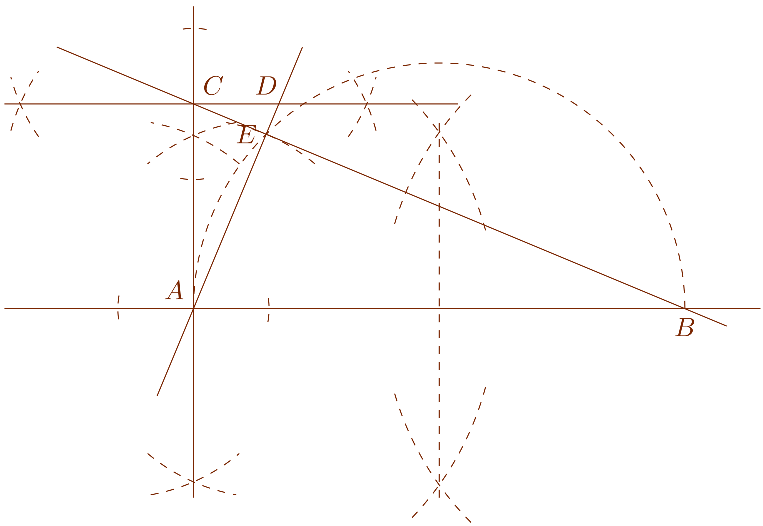
Exercice 4.

ABE est un triangle rectangle en E.
$AE = 5$ cm, $AB = 13$ cm.

La droite (BE) et la droite perpendiculaire à (AB) passant par A se coupent en C.
La droite (AE) et la droite perpendiculaire à (AC) passant par C se coupent en D.

1. Réaliser la figure en vraie grandeur.

   Voici une construction uniquement à la règle et au compas.



2. Déterminer l'aire du triangle CEA ; on donnera l'arrondi au dixième de mm^2.

Déterminons l'aire de AEC.

La démonstration qui suit est longue, mais elle n'utilise que des outils mathématiques élémentaires.

* Montrons d'abord que CEA est une réduction de AEB (les triangles sont semblables).

  Notons $\widehat{EBA} = \theta$.
  Puisque EAB est rectangle en E, $\widehat{BAE} = 90 - \theta$.
  Puisque ABC est rectangle en A, $\widehat{EAC} = 90 - \widehat{BAE} = 90 - (90 - \theta) = \theta$.
  Puisque CEA est rectangle en E, $\widehat{ACE} = 180 - \widehat{CEA} - \widehat{EAC} = 180 - 90 - \theta = 90 - \theta$.
  Ainsi CEA et AEB ont des angles de mêmes mesures.

* Déterminons EB.

  AEB étant rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore,

$$AE^2 + EB^2 = AB^2$$

d'où :

$$\begin{aligned} EB^2 &= AB^2 - AE^2 \\ &= 13^2 - 5^2 \\ &= 144 \end{aligned}$$

et puisque EB est une longueur c'est un nombre positif, donc

$$\begin{aligned} EB &= \sqrt{144} \\ &= 12 \end{aligned}$$

* Déterminons l'aire, $\mathscr{A}$, de AEB.

  Puisque AEB est rectangle en E :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \frac{1}{2} \times AE \times EB \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 \\ &= 30 \end{aligned}$$

* Déterminons le coefficient de réduction α.

$$\frac{AE}{EB} = \frac{5}{12}$$

* Déterminons l'aire $\mathscr{A}'$ de CEA.

  Puisque CEA est rectangle en E :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}' &= \frac{1}{2} \times CE \times EA \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{12} AE\right) \times \left(\frac{5}{12} EB\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{12} \times 5\right) \times \left(\frac{5}{12} \times 12\right) \\ &= \frac{125}{24} \end{aligned}$$

EN tenant compte des unités :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}' &= \frac{125}{24}1\ \text{cm}^2\\ &= \frac{125}{24}100\ \text{mm}^2\\ &= 520{,}8333\ldots\ \text{mm}^2\end{aligned}$$

Le triangle CEA a une aire de 520,8 mm^2.