Épreuve de mathématiques CRPE 2018 groupe 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Comment lire les informations inscrites sur un pneumatique ?

Partie A : lecture des informations sur un pneumatique.

1. (a) Calculons le diamètre d de la jante en centimètres.

En utilisant la notation québécoise, po, pour les pouces :

$$\begin{aligned} d &= 15 \text{ po} \\ &= 15 \times 1 \text{ po} \\ &= 15 \times 2{,}54 \text{ cm} \\ &= 38{,}1 \text{ cm} \end{aligned}$$

La jante a un diamètre de 38,1 cm.

(b) Déterminons la hauteur h du pneu.

La largeur du pneu est de 195 mm.
Or la hauteur égale 65 % de la largeur, donc

$$\begin{aligned} h &= \frac{65}{100} \times 195 \text{ mm} \\ &= 126{,}75 \text{ mm} \\ &= 126{,}75 \times 1 \text{ mm} \\ &= 126{,}75 \times 0{,}1 \text{ cm} \\ &= 12{,}675 \text{ cm} \end{aligned}$$

La hauteur du pneu est de 12,675 cm.

(c) Déterminons le diamètre total D de la roue.

D'après le schéma le diamètre total de la roue s'obtient en faisant

$$\begin{aligned} D &= h + d + h \\ &= 2h + d \\ &= 2 \times 38{,}1 \text{ cm} + 12{,}675 \text{ cm} \\ &= (2 \times 38{,}1 + 12{,}675) \text{ cm} \\ &= 88{,}875 \text{ cm} \end{aligned}$$

Le diamètre total de la roue mesure 88,875 cm.

2. Déterminons les différents éléments que l'on doit inscrire sur le pneu.

* La largeur est de 20,5 cm = 205 mm.
* Comme nous l'avons déjà remarqué

$$D = h + d + h$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} D - d &= 2h + d - d \\ D - d &= 2h \\ \frac{D-d}{2} &= \frac{2h}{2} \\ \frac{D-d}{2} &= h \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} h &= \frac{63{,}19 \text{ cm} - 40{,}64 \text{ cm}}{2} \\ &= \frac{63{,}19 - 40{,}64}{2} \text{ cm} \\ &= 11{,}275 \end{aligned}$$

Nous pouvons donc trouver le pourcentage de la largeur correspondant

$$\begin{aligned} p &= \frac{11{,}275 \text{ cm}}{20{,}5 \text{ cm}} \times 100 \\ &= \frac{11{,}275}{20{,}5} \times 100 \\ &= 55 \end{aligned}$$

Le nombre indiqué pour la largeur est donc 55.

* Le diamètre de la jante est

$$\begin{aligned} d &= 40{,}64 \text{ cm} \\ &= 40{,}64 \times 1 \text{ cm} \\ &= 40{,}64 \times \frac{1}{2{,}54} \text{ po} \\ &= 40{,}64 \times \frac{1}{2{,}54} \text{ po} \\ &= 16 \text{ po} \end{aligned}$$

Le diamètre indiqué est donc 16.

* D'après le tableau 1, l'indice de poids toléré correspondant à une masse de 412 kg et 77.
* D'après le tableau 2, l'indice de vitesse correspondant à une vitesse de 270 km/h et W.

Les informations inscrites sur le pneu sont donc : « 205/55 R16 77W ».

Partie B : distance d'arrêt.

1. Calculons d_A.

Sa vitesse est

$$\begin{aligned} V &= 90 \text{ km/h} \\ &= 90 \ \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} \\ &= 90 \ \frac{1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} \\ &= 90 \cdot \frac{1000}{60 \times 60} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 25 \text{ m/s} \end{aligned}$$

D'après l'énoncé la distance d'arrêt en mètres est

$$\begin{aligned} d_A &= d_R + d_F \\ &= V \times t_R + kV^2 \end{aligned}$$

La route étant mouillée :

$$\begin{aligned} d_A &= 25 \times 0{,}75 + 0{,}14 \times 25^2 \\ &= 106{,}25 \text{ m} \end{aligned}$$

Dans les conditions de l'énoncé la distance d'arrêt est de 106,25 m.

2. Montrons que d_A n'est pas proportionnelle à V.

En procédant comme précédemment, pour une vitesse de 100 m/s,

$$\begin{aligned} d_A(100) &= 100 \times 0{,}75 + 0{,}073 \times 100^2 \\ &= 805 \text{ m/s} \end{aligned}$$

et pour une vitesse de 10 m/s

$$\begin{aligned} d_A(10) &= 10 \times 0{,}75 + 0{,}073 \times 10^2 \\ &= 14{,}8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Nous pouvons résumer ces informations sous forme de tableau :

V	10	100
d_A	14,8	805

Or

$$\begin{cases} 10 \times 805 = 8050 \\ 14{,}8 \times 100 = 1480 \end{cases}$$

donc $10 \times 805 \neq 14{,}8 \times 100$. Le produit en croix n'est pas vérifié et ce contre-exemple démontre qu'

il n'y a pas proportionnalité entre V et d_A.

3. (a)

(b) à 110 km/h la distance d'arrêt est de 101 m.

(c) à 130 km/h le véhicule met 6,30 s à s'arrêter.

(d) La vitesse correspondant à une distance de réaction de 25 m est 120 km/h.

(e) En roulant à 27,8 m/s la distance d'arrêt est de 85,4 m, donc

le conducteur s'arrêtera à temps pour éviter l'obstacle situé à 100 m.

Partie C : au cinéma.

1. Calculons la circonférence, c, de la roue.

   Si r désigne le rayon de la roue et d son diamètre alors

$$\begin{aligned} c &= 2\pi r \\ &= 2\pi \frac{d}{2} \\ &= 2\pi \times \frac{54}{2} \text{ cm} \\ &= 54\pi \text{ cm} \\ &\approx 169{,}64 \text{ cm} \end{aligned}$$

La circonférence de la roue est de 169,4 cm.

2. (a) Déterminons le nombre de tour par seconde.

Exprimons la vitesse, v du véhicule, en mètre par seconde.

$$\begin{aligned} v &= 110 \text{ km/h} \\ &= 110 \ \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} \\ &= 110 \ \frac{1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} \\ &= 110 \cdot \frac{1000}{60 \times 60} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= \frac{275}{9} \text{ m/s} \\ &\approx 30{,}556 \text{m/s} \end{aligned}$$

Par conséquent en 1 s le nombre de tours effectué par la roue est

$$\begin{aligned} \frac{v}{c} &\approx \frac{30{,}556 \text{ m/s}}{169{,}4 \text{ cm}} \\ &\approx \frac{30{,}556 \text{ m/s}}{169{,}4 \times 1 \text{ cm}} \\ &\approx \frac{30{,}556 \text{ m/s}}{169{,}4 \times 0{,}01 \text{ m}} \\ &\approx \frac{30{,}556}{169{,}4 \times 0{,}01} \ \frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m}} \\ &\approx 18{,}037 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Nous pourrions aussi bien utiliser l'unité de fréquence le hertz : Hz.

La roue fait 18 tours par seconde.

(b) Déterminons le nombre de tours de roue, N_t, par image.

$$\begin{aligned} N_t &= \frac{18}{24} \\ &= \frac{3}{4} \\ &= 0{,}75 \end{aligned}$$

Entre deux images le pneu aura fait les $\frac{3}{4}$ d'un tour.

3. Déterminons, par exemple, la vitesse v_1 pour qu'entre deux images la roue ait fait un tour.

   Autrement dit la roue fait 24 tours par seconde, ce qui correspond à une vitesse de :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{24 \times c}{1 \text{ s}} \\ &\approx \frac{24 \times 169{,}4 \text{ cm}}{1 \text{ s}} \\ &\approx \frac{24 \times 169{,}4}{1} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\ &\approx 4065{,}6 \frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ s}} \\ &\approx 4065{,}6 \frac{0{,}000\,01 \text{ km}}{\frac{1}{60 \times 60} \text{ h}} \\ &\approx 4065{,}6 \times 60 \times 60 \times 0{,}000\,01 \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &\approx 146{,}361\,6 \text{ km/h} \end{aligned}$$

   Du fait de la forme de la roue qui a 5 rayons il suffit que la roue effectue de un quatre cinquième d'un tour pour que nous ayons l'impression d'immobilité.

Ainsi les vitesses

$$\begin{aligned} v_{\frac{1}{5}} &\approx 29{,}27 \text{ km/h} \\ v_{\frac{2}{5}} &\approx 58{,}54 \text{ km/h} \\ v_{\frac{3}{5}} &\approx 87{,}82 \text{ km/h} \\ v_{\frac{4}{5}} &\approx 117{,}01 \text{ km/h} \end{aligned}$$

conviennent également (en se limitant aux vitesses autorisées par le code de la route).

Pour avoir l'impression que les roues ne tournent pas il faudrait que le véhicule roule à une vitesse multiple de 29,27 km/h.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

1. Déterminons le volume du silo.

   Puisque le cylindre est de révolution, sa base est un disque dont un rayon est $[AB]$ et une hauteur $[AD]$.
   Par conséquent le volume du cylindre est

$$\begin{aligned} V_{cylindre} &= (\pi \times AB^2) \times AD \\ &= \pi \times 1{,}30^2 \times 2{,}40 \\ &= 4{,}056\pi \end{aligned}$$

   De même le cône étant de révolution sa hauteur est $[SA]$ et $[AB]$ est un rayon de sa base.
   Par conséquent le volume du cône est

$$\begin{aligned} V_{cône} &= \frac{1}{3} \times (\pi AB^2) \times SA \\ &= \frac{1}{3} \times 1{,}30^2 \times 1{,}60 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2{,}704\pi \end{aligned}$$

Le volume du silo est donc

$$\begin{aligned} V_{silo} &= V_{cylindre} + V_{cône} \\ &= 4{,}056\pi + \frac{1}{3} \times 2{,}704\pi \\ &= \left(4{,}056 + \frac{1}{3} \times 2{,}704\right)\pi \\ &\approx 15{,}573 \end{aligned}$$

Le silo a un volume de 15,57 m^3.

2. Déterminons le volume consommé par 48 vaches en 90 jours avec un silo rempli au $\frac{6}{7}$.

   Le volume de farine est

$$\begin{aligned} V_{farine} &= \frac{6}{7} V_{silo} \\ &\approx \frac{6}{7} \times 15{,}57 \\ &\approx 13{,}35 \end{aligned}$$

   Le volume de farine consommé par les 90 vaches en 48 jours est :

$$\begin{aligned} V_{consommé} &= 48 \times 90 \times 3 \text{ L} \\ &= 12960 \times 1 \text{ L} \\ &= 12960 \times 1 \text{ dm}^3 \\ &= 12960 \times \frac{1}{1000} \text{ m}^3 \\ &= \frac{12960}{1000} \text{ m}^3 \\ &= 12{,}960 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

   Puisque $V_{consommé} V_{farine}$ nous pouvons affirmer que

   l'éleveur aura assez de farine.

3. Il s'agit de vérifier un parallélisme à partir de longueurs connues. Nous pouvons donc utiliser le théorème de Thalès.

   Démontrons que (BM) et (CN) sont parallèles.

   * Configuration de Thalès. Les points H, M et N d'une part, et H, B et C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Par construction $SHBA$ est un rectangle, donc $SH = BA$. Comme S, H et M (respectivement S, H et N) sont alignés dans cet ordre : $HM = SM - SH = 2{,}1 - 1{,}3 = 0{,}8$ m (resp. $HN = SN - SH = 3{,}3 - 1{,}3 = 2$ m). Donc

$$\begin{aligned}\frac{HM}{HN} &= \frac{0{,}8}{2}\\ &= 0{,}4\end{aligned}$$

   * Par construction nous avons également $HC = SD = SA + AD = 1{,}6 + 2{,}4 = 4$ m et $HB = AS = 1{,}6$ m.
     Donc

$$\begin{aligned}\frac{HB}{HC} &= \frac{1{,}6}{4}\\ &= 0{,}4\end{aligned}$$

   * Égalité des rapports de longueurs. Des deux points précédents nous déduisons
$$\frac{HM}{HN} = \frac{HB}{HC}.$$
   * Il y a une configuration de Thalès et les rapports des longueurs sont égaux, donc, d'après le théorème dr Thalès, (BM) et (CN) sont parallèles.

   Les échelles sont parallèles.

Exercice 2.

1. Modélisons l'expérience aléatoire :
   * l'univers Ω est formé des trois cents billets,
   * la loi de probabilité est l'équiprobabilité, les tickets ayant tous la même probabilité.

Notons A : « Gagner la télévision. ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

La loi de probabilité est l'équiprobabilité, l'événement A est réalisé par 2 billets et l'univers comporte 300 issues donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{300}$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \tfrac{1}{150}.}$$

2. Notons B : « Gagner un bon d réduction. ».

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

   La loi de probabilité est l'équiprobabilité, l'événement B est réalisé par $5 + 10 = 15$ billets et l'univers comporte 300 issues donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{15}{300}$$

   Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = 0{,}05.}$$

3. (a) Déterminons le prix d'un billet.

   Pour que ce jeu ne lui fasse pas perdre d'argent il faut que les gains occasionnés par la vente es billets dépasse les dépenses liées à l'achat des lots.
   Autrement dit en notant p le prix de vente d'un billet

$$300 \times p \geqslant 2 \times 500 + 5 \times 100 + 10 \times 50 + 20 \times 0{,}50.$$

   Il s'agit d'une inéquation du premier degré. Nus la résolvons en isolant l'inconnue d.
   Cette inégalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 300d &\geqslant 2010 \\ \frac{300d}{300} &\geqslant \frac{2010}{300}, \qquad \text{car } 300 > 0 \\ d &\geqslant 6{,}7 \end{aligned}$$

Finalement

pour être sûr de ne pas perdre d'argent il doit vendre ses billets à au moins 6,7 €.

(b) Déterminons le nombre total de billet.

Si nous notons t le nombre total de billets, et puisque maintenant $d = 2$, la précédente inégalité s'écrit

$$t \times 2 \geqslant 2 \times 500 + 5 \times 100 + 10 \times 50 + 20 \times 0{,}50.$$

Cette inégalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 2t &\geqslant 2010 \\ \frac{2t}{2} &\geqslant \frac{2010}{2}, \qquad \text{car } 2 > 0 \\ t &\geqslant 1005 \end{aligned}$$

Finalement

pour être sûr de ne pas perdre d'argent il doit vendre 1 005 billets à 2 €.

Exercice 3.

1. Déterminons l'état des variables après deux boucles.

   Construisons le tableau d'état des variables.

Instruction	a	b	n
mettre a à 5	5		
mettre n à 0	5		0
mettre b à 1	5	1	0
ajouter à n 1	5	1	1
mettre b à $b * a$	5	5	1
ajouter à n 1	5	5	2
mettre b à $b * a$	5	25	2

À la fin du premier passage dans la boucle :
$a = 5$, $b = 5$ et $n = 1$.
À la fin du deuxième passage dans la boucle :
$a = 5$, $b = 25$ et $n = 2$.

2. À chaque passage de boucle a reste inchangé. n qui joue un rôle de compteur indique le nombre de boucle effectuées. b à chaque boucle est multiplié par 5.
De proche en proche nous voyons que $b = a^n$ à chaque boucle.
Enfin, puisqu'il y a 10 boucles

ce programme calcul 5^{10}.

Exercice 4.

1. Si c désigne la longueur d'une arête du cube, sa surface est

$$\mathcal{S} = 6 \times c^2$$

puisque qu'un cube à 6 faces carrées.
Donc on doit avoir

$$6c^2 = 576$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de de degré deux nous allons la résoudre en nous ramenant à une équation produit en factorisant. Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
6c^2 - 576 &= 576 - 576\\
6c^2 - 576 &= 0\\
6 \times c^2 - 6 \times 96 &= 0\\
6 \times (c^2 - 96) &= 0\\
6(c^2 - \sqrt{96}^2) &= 0\\
6(c - \sqrt{96})(c + \sqrt{96}) &= 0\\
c - \sqrt{96} = 0 \quad &\text{ou} \quad c + \sqrt{96} = 0\\
c = \sqrt{96} \quad &\text{ou} \quad c = -\sqrt{96}
\end{aligned}$$

Puisque c désigne une longueur c'est un nombre positif, donc, nécessairement $c = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.
Le volume du cube est donc

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= c^3 \\ &= (4\sqrt{6}\ \text{cm})^3 \\ &= (4\sqrt{6})^3\ \text{cm}^3 \\ &\approx 940{,}604\ \text{cm}^3 \\ &\approx 940{,}604 \times 1\ \text{cm}^3 \\ &\approx 940{,}604 \times 0{,}001\ \text{dm}^3 \\ &\approx 0{,}940{,}604\ \text{dm}^3 \\ &\approx 0{,}940604 \times 1\ \text{dm}^3 \\ &\approx 0{,}940604 \times 1\ \text{L}\end{aligned}$$

Ainsi l'aire du cube est bien inférieure à 1 L.

L'affirmation est vraie.

2. Pour démontrer qu'une propriété universelle est fausse il suffit d'exhiber un contre-exemple.

   * $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$.
   * $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

   Donc $\frac{1}{1+2} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$.

   L'affirmation est fausse.

3. Le plus simple, à mon sens, est d'utiliser les coefficients multiplicateurs.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisses de 30 % est

$$\begin{aligned}CM_1 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-30}{100} \\ &= 0{,}70\end{aligned}$$

et celui correspondant à une hausse de 50 % est

$$\begin{aligned} CM_2 &= 1 + \frac{50}{100} \\ &= 1{,}50 \end{aligned}$$

Le coefficient multiplicateur global pour ces deux évolutions est donc

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_1 \times CM_2 \\ &= 0{,}7 \times 1{,}5 \\ &= 1{,}05 \end{aligned}$$

Le taux d'évolution correspondant en pourcentage est

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM_g - 1) \\ &= 100 \times (1{,}05 - 1) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Globalement, à l'issue des deux évolutions successives, le prix à augmenté e 5 %.

L'affirmation est vraie.

4. Déterminons une mesure en degré de $\widehat{EDC}$.

* La somme des mesures des angles d'un triangle égale 180°. En considérant EDC : $25 + 90 + \widehat{EDB} = 180$. Donc $\widehat{EDB} = 65°$.
* ABD étant isocèle en B : $\widehat{BDA} = \widehat{DAB} = 50°$.
* La somme des mesures des angles d'un triangle égale 180°. ADC étant isocèle rectangle en C, $\widehat{ADC} = \frac{1}{2}(180 - 90) = 45°$.

Nous déduisons des trois points précédents que

$$\widehat{EDC} = 65 + 50 + 45 = 160°.$$

L'angle $\widehat{EDC}$ n'est donc pas plat, et les points E, D et C ne sont pas alignés.

L'affirmation est fausse.