Épreuve de mathématiques CRPE 2018 groupe 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

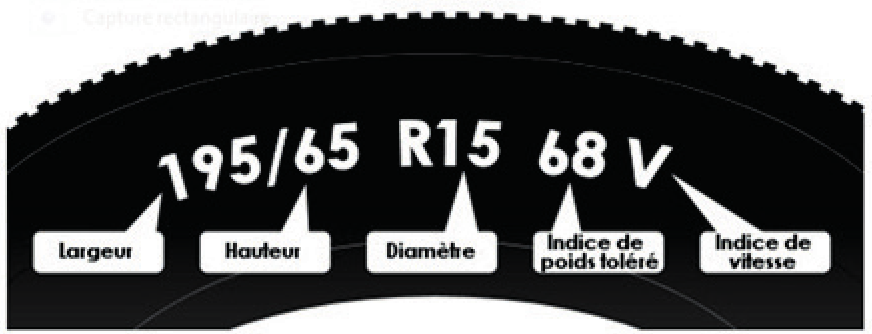
Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Mme Lara pour toutes les corrections apportées sur ce sujet et d'autres.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.
5 *points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.*
Une note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.

I Première partie (13 points).

Comment lire les informations inscrites sur un pneumatique ?



La largeur	La largeur est exprimée en millimètres.
La hauteur	Ce nombre ne donne pas directement la mesure de la hauteur : il indique à quel pourcentage de la largeur correspond la hauteur (ici, la hauteur vaut 65% de la largeur).
La diamètre	Le diamètre est exprimé en pouce. Il correspond au diamètre de la jante (le R signifie Radial).
L'indice de poids toléré (tableau 1)	L'indice de poids toléré est un code numérique qui correspond à la charge maximale qu'un pneu peut supporter.
L'indice de vitesse (tableau 2)	L'indice de vitesse est un code alphabétique qui correspond à la vitesse maximale à laquelle un pneu peut rouler. V correspond à 240 km/h.

Tableau 1

Indice de poids toléré	Poids en kg.
55	218
58	236
59	243
60	250
61	257
62	265
63	272
64	280
65	290
66	300
67	307
68	315
69	325
70	335
71	345
72	355
73	365
74	375
75	387
76	400
77	412
78	425

Tableau 2

Indice de vitesse	Vitesse en km/h
Q	160
R	170
S	180
T	190
U	200
H	210
V	240
ZR	> 240
W	270
Y	300

Sources : http://www.fiches-auto.fr/articles-auto/pneu/s-630-indice-de-vitesse.php et http://www.pneus-online.fr/indices-charge-et-vitesse-conseils.html

Partie A : lecture des informations sur un pneumatique.

Pour répondre aux questions suivantes on utilisera les informations contenues dans les documents précédents.

1. On considère un pneumatique sur lequel est inscrit « **195/65 R15 68V** ».

   (a) Sachant que 1 pouce vaut 2,54 cm, calculer le diamètre de la jante en centimètre.

   Calculons le diamètre d de la jante en centimètres.

   En utilisant la notation québécoise, po, pour les pouces :

$$\begin{aligned} d &= 15 \text{ po} \\ &= 15 \times 1 \text{ po} \\ &= 15 \times 2{,}54 \text{ cm} \\ &= 38{,}1 \text{ cm} \end{aligned}$$

   La jante a un diamètre de 38,1 cm.

   (b) Montrer que la hauteur du pneu est 12,675 cm.

   Déterminons la hauteur h du pneu.

   La largeur du pneu est de 195 mm.
   Or la hauteur égale 65 % de la largeur, donc

$$\begin{aligned} h &= \frac{65}{100} \times 195 \text{ mm} \\ &= 126{,}75 \text{ mm} \\ &= 126{,}75 \times 1 \text{ mm} \\ &= 126{,}75 \times 0{,}1 \text{ cm} \\ &= 12{,}675 \text{ cm} \end{aligned}$$

   La hauteur du pneu est de 12,675 cm.

(c) Calculer le diamètre total de la roue en centimètre.

Déterminons le diamètre total D de la roue.

D'après le schéma le diamètre total de la roue s'obtient en faisant

$$\begin{aligned} D &= h + d + h \\ &= 2h + d \\ &= 2 \times 12{,}675 \text{ cm} + 38{,}1 \text{ cm} \\ &= (2 \times 12{,}675 + 38{,}1) \text{ cm} \\ &= 63{,}45 \text{ cm} \end{aligned}$$

Le diamètre total de la roue mesure 63,45 cm.

2. On considère désormais un pneu radial pouvant supporter une charge maximale de 412 kg et rouler à la vitesse de 270 km/h. Sa largeur est de 20,5 cm, le diamètre de sa jante est de 40,64 cm et son diamètre total est de 63,19 cm. Indiquer, sous la forme « 195/65 R15 68V », les informations qui seront inscrites sur ce pneu.

Déterminons les différents éléments que l'on doit inscrire sur le pneu.

* La largeur est de 20,5 cm = 205 mm.
* Comme nous l'avons déjà remarqué

$$D = h + d + h$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} D - d &= 2h + d - d \\ D - d &= 2h \\ \frac{D-d}{2} &= \frac{2h}{2} \\ \frac{D-d}{2} &= h \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} h &= \frac{63{,}19\text{ cm} - 40{,}64\text{ cm}}{2} \\ &= \frac{63{,}19 - 40{,}64}{2}\text{ cm} \\ &= 11{,}275 \end{aligned}$$

Nous pouvons donc trouver le pourcentage de la largeur correspondant

$$\begin{aligned} p &= \frac{11{,}275\text{ cm}}{20{,}5\text{ cm}} \times 100 \\ &= \frac{11{,}275}{20{,}5} \times 100 \\ &= 55 \end{aligned}$$

Le nombre indiqué pour la largeur est donc 55.

* Le diamètre de la jante est

$$\begin{aligned} d &= 40{,}64\text{ cm} \\ &= 40{,}64 \times 1\text{ cm} \\ &= 40{,}64 \times \frac{1}{2{,}54}\text{ po} \\ &= 40{,}64 \times \frac{1}{2{,}54}\text{ po} \\ &= 16\text{ po} \end{aligned}$$

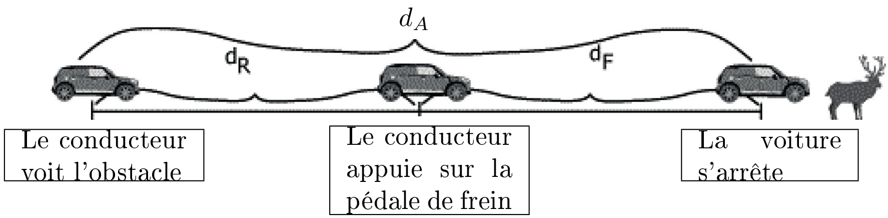
Le diamètre indiqué est donc 16.

* D'après le tableau 1, l'indice de poids toléré correspondant à une masse de 412 kg et 77.
* D'après le tableau 2, l'indice de vitesse correspondant à une vitesse de 270 km/h et W.

> Les informations inscrites sur le pneu sont donc : « 205/55 R16 77W ».

Partie B : distance d'arrêt.

La distance d'arrêt d'un véhicule correspond à la distance de réaction d_R additionnée à la distance de freinage d_F.



Si V est la vitesse de la voiture au moment où le conducteur voit l'obstacle (en m/s : mètre par seconde), la distance de freinage (en mètre) se calcule de la manière suivante :

$$d_F = V^2 \times k,$$

où k est une constante qui dépend de l'état de la route ($k = 0{,}14$ sur route mouillée, et $k = 0{,}073$ sur route sèche).

On admet alors que

$$d_A = V \times t_R + kV^2,$$

où t_R est le temps de réaction, en seconde.

1. On estime qu'un conducteur vigilant a un temps de réaction de 0,75 seconde. Calculer la distance d'arrêt pour un véhicule roulant à 90 km/h sur route mouillée.

   Calculons d_A.

   Sa vitesse est

$$\begin{aligned} V &= 90 \text{ km/h} \\ &= 90 \,\frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} \\ &= 90 \,\frac{1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} \\ &= 90 \cdot \frac{1000}{60 \times 60} \,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 25 \text{ m/s} \end{aligned}$$

   D'après l'énoncé la distance d'arrêt en mètres est

$$\begin{aligned} d_A &= d_R + d_F \\ &= V \times t_R + kV^2 \end{aligned}$$

La route étant mouillée :

$$\begin{aligned} d_A &= 25 \times 0{,}75 + 0{,}14 \times 25^2 \\ &= 106{,}25 \text{ m} \end{aligned}$$

Dans les conditions de l'énoncé la distance d'arrêt est de 106,25 m.

2. Pour un conducteur vigilant, la distance d'arrêt sur route sèche est-elle proportionnelle à la vitesse ? Expliquer la réponse.

Montrons que d_A n'est pas proportionnelle à V.

En procédant comme précédemment, pour une vitesse de 100 m/s,

$$\begin{aligned} d_A(100) &= 100 \times 0{,}75 + 0{,}073 \times 100^2 \\ &= 805 \text{ m/s} \end{aligned}$$

et pour une vitesse de 10 m/s

$$\begin{aligned} d_A(10) &= 10 \times 0{,}75 + 0{,}073 \times 10^2 \\ &= 14{,}8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Nous pouvons résumer ces informations sous forme de tableau :

V	10	100
d_A	14,8	805

Or

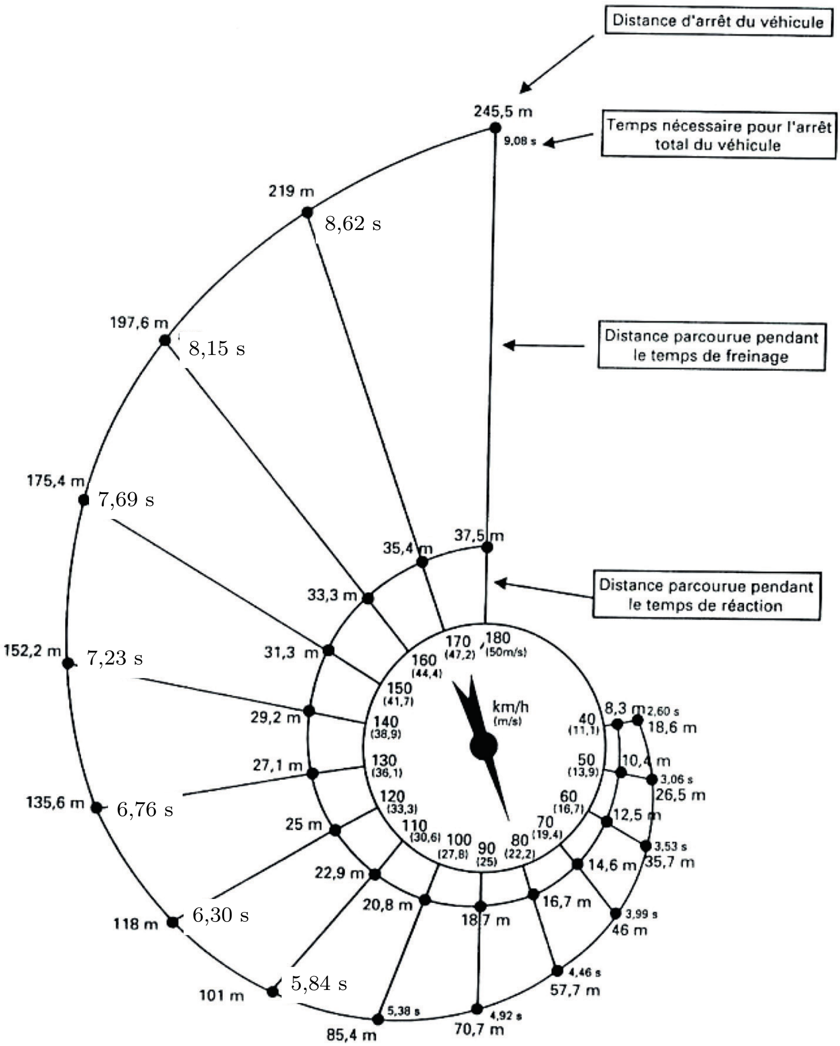
$$\begin{cases} 10 \times 805 = 8050 \\ 14{,}8 \times 100 = 1480 \end{cases}$$

donc $10 \times 805 \neq 14{,}8 \times 100$. Le produit en croix n'est pas vérifié et ce contre-exemple démontre qu'

il n'y a pas proportionnalité entre V et d_A.

3. **Lecture de diagramme.**

Le diagramme ci-dessous représente la distance d'arrêt sur route sèche d'un véhicule en fonction de sa vitesse.



Sources : http://velobuc.free.fr/freinage.html

Par exemple, on peut lire que, pour une vitesse de 180 km/h (ou 50 m/s), un véhicule parcourt 37,5 m pendant le temps de réaction, que le temps nécessaire à son arrêt total sera de 9,08 s, et que sa distance d'arrêt sera alors de 245,5 m.

En utilisant ce diagramme,

(a) donner la distance d'arrêt d'un véhicule roulant à 110 km/h ;

à 110 km/h la distance d'arrêt est de 101 m.

(b) donner la distance parcourue pendant le temps de freinage d'un véhicule roulant à 80 km/h ;

Si le véhicule roule à 80 km/h la distance d'arrêt est de 57,7 m et la distance parcourue pendant le temps de réaction est de 16,7 m, or 57,7 m − 16,7 m = 41 m donc

la distance parcourue pendant le temps de freinage est 41 m.

(c) donner le temps que met un véhicule roulant à 130 km/h pour s'arrêter ;

à 130 km/h le véhicule met 6,76 s à s'arrêter.

(d) donner la vitesse d'un véhicule sachant que la distance de réaction est de 25 m ;

La vitesse correspondant à une distance de réaction de 25 m est 120 km/h.

(e) dire si un conducteur roulant à 27,8 m/s et observant un obstacle à 100 m pourra s'arrêter à temps.

En roulant à 27,8 m/s la distance d'arrêt est de 85,4 m, donc

le conducteur s'arrêtera à temps pour éviter l'obstacle situé à 100 m.

Partie C : au cinéma.

Une voiture est filmée lors d'une prise de vue cinématographique. Elle est équipée de roues **à cinq rayons** ayant un diamètre total de 54 cm. L'une de ces roues est représentée ci-dessous :

1. Calculer la circonférence de cette roue en cm (arrondie au millimètre).

   Calculons la circonférence, c, de la roue.

   Si r désigne le rayon de la roue et d son diamètre alors

$$\begin{aligned} c &= 2\pi r \\ &= 2\pi \frac{d}{2} \\ &= 2\pi \times \frac{54}{2} \text{ cm} \\ &= 54\pi \text{ cm} \\ &\approx 169{,}64 \text{ cm} \end{aligned}$$

   La circonférence de la roue est de 169,6 cm.

2. La voiture roule à 110 km.

   (a) Calculer le nombre de tours par seconde que fait la roue (au tour près).

   Déterminons le nombre de tour par seconde.

   Exprimons la vitesse, v du véhicule, en mètre par seconde.

$$
\begin{aligned}
v &= 110 \text{ km/h} \\
&= 110 \ \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} \\
&= 110 \ \frac{1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} \\
&= 110 \cdot \frac{1000}{60 \times 60} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
&= \frac{275}{9} \text{ m/s} \\
&\approx 30{,}556 \text{m/s}
\end{aligned}
$$

Par conséquent en 1 s le nombre de tours effectué par la roue est

$$
\begin{aligned}
\frac{v}{c} &\approx \frac{30{,}556 \text{ m/s}}{169{,}6 \text{ cm}} \\
&\approx \frac{30{,}556 \text{ m/s}}{169{,}6 \times 1 \text{ cm}} \\
&\approx \frac{30{,}556 \text{ m/s}}{169{,}6 \times 0{,}01 \text{ m}} \\
&\approx \frac{30{,}556}{169{,}6 \times 0{,}01} \ \frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m}} \\
&\approx 18{,}016 \text{ s}^{-1}
\end{aligned}
$$

Nous pourrions aussi bien utiliser l'unité de fréquence le hertz : Hz.

La roue fait 18 tours par seconde.

(b) La caméra utilisée a une vitesse de défilement de 24 images par seconde. Combien de tours aura fait le pneu de la voiture entre deux images ?

Déterminons le nombre de tours de roue, N_t, par image.

$$
\begin{aligned}
N_t &= \frac{18}{24} \\
&= \frac{3}{4} \\
&= 0{,}75
\end{aligned}
$$

Entre deux images le pneu aura fait les $\frac{3}{4}$ d'un tour.

3. À quelle vitesse, en km/h, devrait rouler la voiture pour que, regardant le film, on ait l'impression que les roues ne tournent pas ?

Déterminons, par exemple, la vitesse v_1 pour qu'entre deux images la roue ait fait un tour.

Autrement dit la roue fait 24 tours par seconde, ce qui correspond à une vitesse de :

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{24 \times c}{1 \text{ s}} \\
&\approx \frac{24 \times 169{,}6 \text{ cm}}{1 \text{ s}} \\
&\approx \frac{24 \times 169{,}6}{1} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\
&\approx 4070{,}4 \ \frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ s}} \\
&\approx 4070{,}4 \ \frac{0{,}000\,01 \text{ km}}{\frac{1}{60 \times 60} \text{ h}} \\
&\approx 4070{,}4 \times 60 \times 60 \times 0{,}000\,01 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \\
&\approx 146{,}534\,4 \text{ km/h}
\end{aligned}$$

Du fait de la forme de la roue qui a 5 rayons il suffit que la roue effectue de un à quatre cinquième d'un tour pour que nous ayons l'impression d'immobilité. Ainsi les vitesses

$$\begin{aligned}
v_{\frac{1}{5}} &\approx 29{,}31 \text{ km/h} \\
v_{\frac{2}{5}} &\approx 58{,}61 \text{ km/h} \\
v_{\frac{3}{5}} &\approx 87{,}92 \text{ km/h} \\
v_{\frac{4}{5}} &\approx 117{,}23 \text{ km/h}
\end{aligned}$$

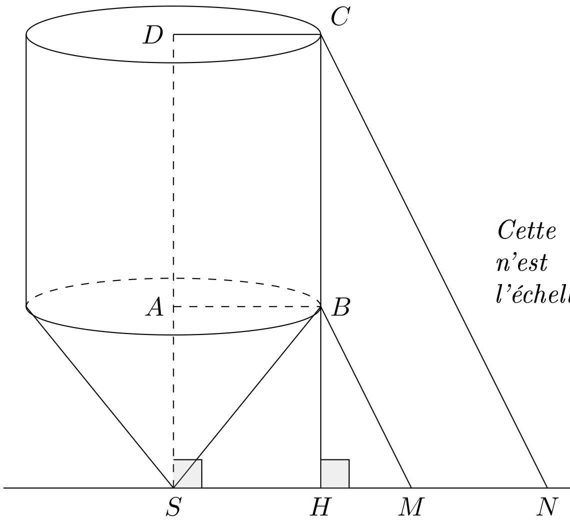
conviennent également (en se limitant aux vitesses autorisées par le code de la route).

Pour avoir l'impression que les roues ne tournent pas il faudrait que le véhicule roule à une vitesse multiple de 29,27 km/h.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.



Cette figure n'est pas à l'échelle.

Un éleveur possède un silo à farine formé de deux solides de révolution : un cône et un cylindre, comme représentés sur la figure ci-dessus.

Ces deux solides ont le même axe de révolution.

les centres D et A des bases sont alignés avec le sommet S du cône.

On donne : $AS = 1{,}60$ m ; $DA = 2{,}40$ m ; $AB = 1{,}30$ m.

On rappelle les formules suivantes :

$$\text{volume du cylindre : } V_{cylindre} = \textit{aire de la base} \times \textit{hauteur};$$

$$\text{volume du cône : } V_{cône} = \frac{\textit{aire de la base} \times \textit{hauteur}}{3}.$$

1. Quel est le volume en m^3 du silo à farine ? Arrondir au centième.

   Déterminons le volume du silo.

   Puisque le cylindre est de révolution, sa base est un disque dont un rayon est $[AB]$ et une hauteur $[AD]$.
   Par conséquent le volume du cylindre est

$$\begin{aligned} V_{cylindre} &= (\pi \times AB^2) \times AD \\ &= \pi \times 1{,}30^2 \times 2{,}40 \\ &= 4{,}056\pi \end{aligned}$$

De même le cône étant de révolution sa hauteur est $[SA]$ et $[AB]$ est un rayon de sa base.
Par conséquent le volume du cône est

$$\begin{aligned} V_{cône} &= \frac{1}{3} \times (\pi AB^2) \times SA \\ &= \frac{1}{3} \times 1{,}30^2 \times 1{,}60 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2{,}704\pi \end{aligned}$$

Le volume du silo est donc

$$\begin{aligned} V_{silo} &= V_{cylindre} + V_{cône} \\ &= 4{,}056\pi + \frac{1}{3} \times 2{,}704\pi \\ &= \left(4{,}056 + \frac{1}{3} \times 2{,}704\right)\pi \\ &\approx 15{,}573 \end{aligned}$$

Le silo a un volume de 15,57 m^3.

2. Le silo est rempli de farine d'orge au $\frac{6}{7}$ de son volume total. Une vache mange en moyenne 3 L de farine par jour. L'éleveur possède 48 vaches. Aura-t-il assez de farine pour nourrit ses 48 vaches durant 90 jours ?

   Déterminons le volume consommé par 48 vaches en 90 jours avec un silo rempli au $\frac{6}{7}$.

   Le volume de farine est

$$\begin{aligned} V_{farine} &= \frac{6}{7} V_{silo} \\ &\approx \frac{6}{7} \times 15{,}57 \\ &\approx 13{,}35 \end{aligned}$$

Le volume de farine consommé par les 90 vaches en 48 jours est :

$$\begin{aligned} V_{consommé} &= 48 \times 90 \times 3 \text{ L} \\ &= 12960 \times 1 \text{ L} \\ &= 12960 \times 1 \text{ dm}^3 \\ &= 12960 \times \frac{1}{1000} \text{ m}^3 \\ &= \frac{12960}{1000} \text{ m}^3 \\ &= 12{,}960 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Puisque $V_{consommé} V_{farine}$ nous pouvons affirmer que

l'éleveur aura assez de farine.

3. Pour réaliser des travaux, deux échelles ont été posées contre le silo. Elles sont représentées sur la figure par des segments $[BM]$ et $[CN]$.
On donne $SM = 2{,}1$ m et $SN = 3{,}3$ m.
On note H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle SBM.
Les points S, H, M et N sont alignés.
Les points C, B et H sont alignés.
Les deux échelles sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

Il s'agit de vérifier un parallélisme à partir de longueurs connues. Nous pouvons donc utiliser le théorème de Thalès.

Démontrons que (BM) et (CN) sont parallèles.

* Configuration de Thalès. Les points H, M et N d'une part, et H, B et C d'autre part sont alignés dans cet ordre.

* Par construction $SHBA$ est un rectangle, donc $SH = BA$. Comme S, H et M (respectivement S, H et N) sont alignés dans cet ordre : $HM = SM - SH = 2{,}1 - 1{,}3 = 0{,}8$ m (resp. $HN = SN - SH = 3{,}3 - 1{,}3 = 2$ m). Donc

$$\begin{aligned}\frac{HM}{HN} &= \frac{0{,}8}{2} \\ &= 0{,}4\end{aligned}$$

* Par construction nous avons également $HC = SD = SA + AD = 1{,}6 + 2{,}4 = 4$ m et $HB = AS = 1{,}6$ m.
Donc

$$\begin{aligned}\frac{HB}{HC} &= \frac{1{,}6}{4} \\ &= 0{,}4\end{aligned}$$

* Égalité des rapports de longueurs. Des deux points précédents nous déduisons
$$\frac{HM}{HN} = \frac{HB}{HC}.$$

* Il y a une configuration de Thalès et les rapports des longueurs sont égaux, donc, d'après le théorème dr Thalès, (BM) et (CN) sont parallèles.

Les échelles sont parallèles.

Exercice 2.

Dans une loterie, 300 billets sont vendus et il y a 37 billets gagnants. Les autres billets sont des billets perdants.

Parmi les 37 billets gagnants :

- 2 de ces billets permettent de gagner une télévision ;
- 5 permettent de gagner un bon de réduction de 100 € ;
- 10 permettent de gagner un bon de réduction de 50 € ;
- 20 permettent de gagner un porte-clés.

1. Quelle est la probabilité de gagner une télévision si l'on achète un billet ?

   Modélisons l'expérience aléatoire :

   * l'univers Ω est formé des trois cents billets,
   * la loi de probabilité est l'équiprobabilité, les tickets ayant tous la même probabilité.

   Notons A : « Gagner la télévision. ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   La loi de probabilité est l'équiprobabilité, l'événement A est réalisé par 2 billets et l'univers comporte 300 issues donc

   $$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{300}$$

   Donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(A) = \tfrac{1}{150}.}$$

2. Quelle est la probabilité de gagner un bon de réduction (peu importe la somme) si l'on achète un billet ?

   Notons B : « Gagner un bon d réduction. ».

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

   La loi de probabilité est l'équiprobabilité, l'événement B est réalisé par $5 + 10 = 15$ billets et l'univers comporte 300 issues donc

   $$\mathbb{P}(B) = \frac{15}{300}$$

   Donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(B) = 0{,}05.}$$

3. En plus de l'achat des bons de réduction dans plusieurs magasins, l'organisateur de la loterie dépense 500 € pour chaque télévision et 0,50 € pour chaque porte-clés.

(a) À quel prix doit-il vendre les billets de loterie, pour être sûr que ce jeu ne lui fera pas perdre d'argent ?

Déterminons le prix d'un billet.

Pour que ce jeu ne lui fasse pas perdre d'argent il faut que les gains occasionnés par la vente es billets dépasse les dépenses liées à l'achat des lots.
Autrement dit en notant p le prix de vente d'un billet

$$300 \times p \geqslant 2 \times 500 + 5 \times 100 + 10 \times 50 + 20 \times 0{,}50.$$

Il s'agit d'une inéquation du premier degré. Nus la résolvons en isolant l'inconnue d.
Cette inégalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 300d &\geqslant 2010 \\ \frac{300d}{300} &\geqslant \frac{2010}{300}, \quad \text{car } 300 > 0 \\ d &\geqslant 6{,}7 \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\text{pour être sûr de ne pas perdre d'argent il doit vendre ses billets à au moins } 6{,}7 \text{ €.}}$$

(b) S'il souhaite vendre chaque billet 2 €, combien doit-il rajouter de billets perdants (en ne modifiant pas le nombre de billets gagnants et les lots correspondants) pour être assuré que ce jeu ne lui fera pas perdre d'argent ?

Déterminons le nombre total de billet.

Si nous notons t le nombre total de billets, et puisque maintenant $d = 2$, la précédente inégalité s'écrit

$$t \times 2 \geqslant 2 \times 500 + 5 \times 100 + 10 \times 50 + 20 \times 0{,}50.$$

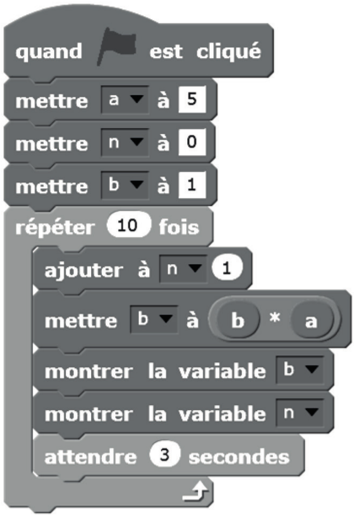
Cette inégalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 2t &\geqslant 2010 \\ \frac{2t}{2} &\geqslant \frac{2010}{2}, \quad \text{car } 2 > 0 \\ t &\geqslant 1005 \end{aligned}$$

Finalement

pour être sûr de ne pas perdre d'argent il doit vendre 1 005 billets à 2 €.

Exercice 3.



Voici une copie d'écran d'un algorithme réalisé à l'aide du logiciel Scratch.

1. Quelles sont les valeurs des variables a, b et n à la fin du premier passage dans la boucle, puis à la fin du second passage ?

Déterminons l'état des variables après deux boucles.

Construisons le tableau d'état des variables.

Instruction	a	b	n
mettre a à 5	5		
mettre n à 0	5		0
mettre b à 1	5	1	0
ajouter à n 1	5	1	1
mettre b à $b * a$	5	5	1
ajouter à n 1	5	5	2
mettre b à $b * a$	5	25	2

À la fin du premier passage dans la boucle :
$a = 5$, $b = 5$ et $n = 1$.
À la fin du deuxième passage dans la boucle :
$a = 5$, $b = 25$ et $n = 2$.

2. Que réalise ce programme ?

À chaque passage de boucle a reste inchangé. n qui joue un rôle de compteur indique le nombre de boucle effectuées. b à chaque boucle est multiplié par 5.

De proche en proche nous voyons que $b = a^n$ à chaque boucle.

Enfin, puisqu'il y a 10 boucles

ce programme calcul 5^{10}.

Exercice 4.

Pour chacune des affirmations suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. On considère un cube dont la surface totale extérieure mesure 576 cm^2.
Affirmation : son volume est inférieur à 1 litre.

Si c désigne la longueur d'une arête du cube, sa surface est

$$\mathcal{S} = 6 \times c^2$$

puisque qu'un cube à 6 faces carrées.

Donc on doit avoir

$$6c^2 = 576$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de de degré deux nous allons la résoudre en nous ramenant à une équation produit en factorisant. Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
6c^2-576 &= 576-576\\
6c^2-576 &= 0\\
6\times c^2-6\times 96 &= 0\\
6\times(c^2-96) &= 0\\
6(c^2-\sqrt{96}^2) &= 0\\
6(c-\sqrt{96})(c+\sqrt{96}) &= 0\\
c-\sqrt{96} = 0 \quad \text{ou} \quad c+\sqrt{96} &= 0\\
c=\sqrt{96} \quad \text{ou} \quad c &= -\sqrt{96}
\end{aligned}$$

Puisque c désigne une longueur c'est un nombre positif, donc, nécessairement $c=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$.
Le volume du cube est donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= c^3\\
&= (4\sqrt{6}\text{ cm})^3\\
&= (4\sqrt{6})^3\text{ cm}^3\\
&\approx 940{,}604\text{ cm}^3\\
&\approx 940{,}604\times 1\text{ cm}^3\\
&\approx 940{,}604\times 0{,}001\text{ dm}^3\\
&\approx 0{,}940{,}604\text{ dm}^3\\
&\approx 0{,}940604\times 1\text{ dm}^3\\
&\approx 0{,}940604\times 1\text{ L}
\end{aligned}$$

Ainsi l'aire du cube est bien inférieure à 1 L.

L'affirmation est vraie.

2. **Affirmation** : l'inverse de la somme de deux nombres est égal à la somme des inverses de ces deux nombres.

   Pour démontrer qu'une propriété universelle est fausse il suffit d'exhiber un contre-exemple.

* $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$.
* $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Donc $\frac{1}{1+2} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$.

L'affirmation est fausse.

3. Un prix subit une baisse de 30 % puis le nouveau prix subit une hausse de 50 %.
   Affirmation : le prix final est 5 % plus élevé que le prix initial.

   Le plus simple, à mon sens, est d'utiliser les coefficients multiplicateurs.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisses de 30 % est

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-30}{100} \\ &= 0{,}70 \end{aligned}$$

   et celui correspondant à une hausse de 50 % est

$$\begin{aligned} CM_2 &= 1 + \frac{50}{100} \\ &= 1{,}50 \end{aligned}$$

   Le coefficient multiplicateur global pour ces deux évolutions est donc

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_1 \times CM_2 \\ &= 0{,}7 \times 1{,}5 \\ &= 1{,}05 \end{aligned}$$

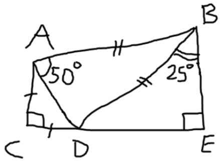
   Le taux d'évolution correspondant en pourcentage est

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM_g - 1) \\ &= 100 \times (1{,}05 - 1) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Globalement, à l'issue des deux évolutions successives, le prix à augmenté e 5 %.

L'affirmation est vraie.

4. Soit la figure ci-dessous faite à main levée.



Affirmation : Les points C, D et E sont alignés.

Déterminons une mesure en degré de $\widehat{EDC}$.

* La somme des mesures des angles d'un triangle égale 180°. En considérant EDC : $25 + 90 + \widehat{EDB} = 180$. Donc $\widehat{EDB} = 65°$.
* ABD étant isocèle en B : $\widehat{BDA} = \widehat{DAB} = 50°$.
* La somme des mesures des angles d'un triangle égale 180°. ADC étant isocèle rectangle en C, $\widehat{ADC} = \frac{1}{2}(180 - 90) = 45°$.

Nous déduisons des trois points précédents que

$$\widehat{EDC} = 65 + 50 + 45 = 160°.$$

L'angle $\widehat{EDC}$ n'est donc pas plat, et les points E, D et C ne sont pas alignés.

L'affirmation est fausse.