

# Épreuve de mathématiques CRPE 2017 groupe 5.

Lien vers le sujet seul : [pdf](#).

## I Première partie (13 points).

Partie A : étude d'un cas particulier.

1. Calculons le volume  $\mathcal{V}_1$  de la boîte.

Cette boîte est un parallélépipède rectangle donc :

$$\mathcal{V}_1 = AB \times BC \times FB$$

Or

$$AB = (25 \text{ cm}) - (2 \text{ cm}) - (2 \text{ cm})$$

et

$$AB = BC$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= (21 \text{ cm}) \times (21 \text{ cm}) \times (2 \text{ cm}) \\ &= 21 \times 21 \times 2 \text{ cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm} \end{aligned}$$

$$\mathcal{V}_1 = 882 \text{ cm}^3.$$

2. Déterminons l'aire  $\mathcal{A}_1$  de la boîte.

Le patron est formé d'un carré de côté  $AB$  et de quatre rectangle semblables de côtés  $AB$  et  $FB$  donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= AB^2 + 4 \times AB \times FB \\ &= (21 \text{ cm})^2 + 4 \times (21 \text{ cm}) \times (2 \text{ cm}) \\ &= 21^2 \text{ cm}^2 + 4 \times 21 \times 2 \text{ cm} \cdot \text{cm} \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_1 = 609 \text{ cm}^2.$$

**Partie B : étude du cas général.**

1. Puisque deux morceaux de longueur  $x$ , en centimètre, sont ôtés de chaque côté il faut que  $2x \leq 25$ . Donc  $x \leq 12,5$ .

De plus  $x$  étant une longueur c'est un nombre positif.

Finalement

$$x \in [0; 12,5].$$

2. Déterminons l'expression de  $V$ .

Soit  $x \in [0; 12,5]$ .

En procédant comme dans la première partie, et toutes les longueurs étant exprimées en centimètre :

$$\begin{aligned} V(x) &= AB \times BC \times FB \\ &= (25 - 2x) \times (25 - 2x) \times x \end{aligned}$$

$$V(x) = x(25 - 2x)^2 \text{ quelque soit } x \in [0; 12,5].$$

3. Déterminons l'expression de  $A$ .

Soit  $x \in [0; 12,5]$ .

En procédant comme dans la première partie, et toutes les longueurs étant exprimées en centimètre :

$$\begin{aligned} A(x) &= AB^2 + AB \times FB \\ &= (25 - 2x)^2 + 4 \times (25 - 2x) \times x \end{aligned}$$

$$A(x) = (25 - 2x)^2 + 4x(25 - 2x) \text{ quelque soit } x \in [0; 12,5].$$

4. Calculons les volumes et aires pour  $x = 2$ .

\*

$$\begin{aligned} V(2) &= 2(25 - 2 \times 2)^2 \\ &= 881 \end{aligned}$$

\*

$$\begin{aligned} A(2) &= (25 - 2 \times 2)^2 + 4 \times 2(25 - 2 \times 2) \\ &= 609 \end{aligned}$$

Nous avons bien  $V(2) = \mathcal{V}_1$  et  $A(2) = \mathcal{A}_1$ .

5. (a)

$$= A2 * (25 - A2) \wedge 2.$$

- (b) Par continuité des variations du volume lorsque  $x$  augmente nous savons que nous obtenons les volumes intermédiaires à ceux apparaissant dans la table de valeurs.

Or

$$\begin{aligned} 1 \text{ L} &= 1 \text{ dm}^3 \\ &= 1 \times (10 \text{ cm})^3 \\ &= 1 \times 10^3 \text{ cm}^3 \\ &= 1000 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

donc nous cherchons des valeurs de  $x$  pour lesquelles le volume est au alentour de 1000.

Par lecture de la table : si  $x = 2$  alors le volume est de  $882 \text{ cm}^3$  et si  $x = 3$  alors le volume est de  $1083 \text{ cm}^3$  donc

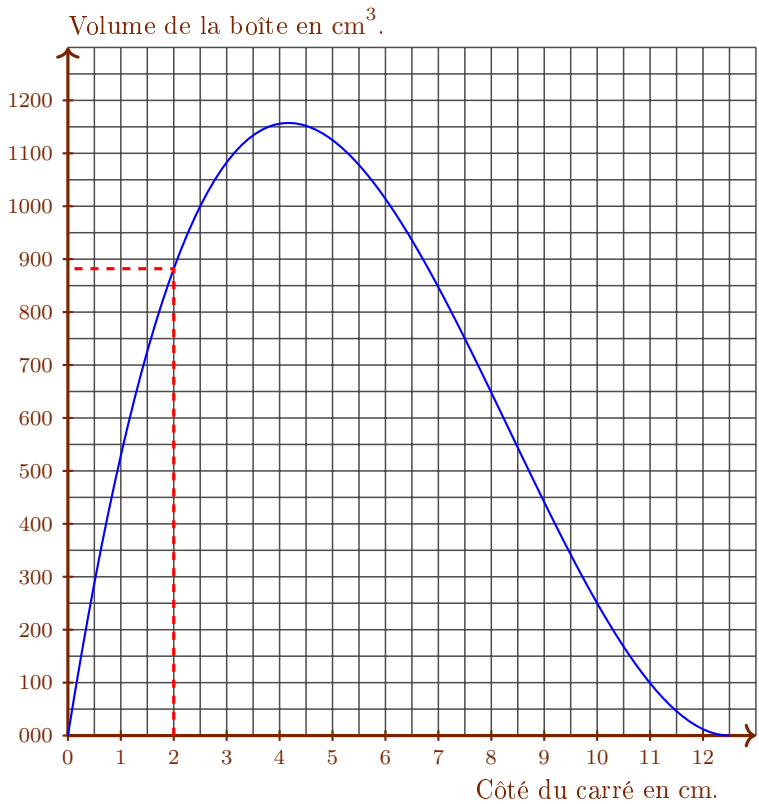
il existe une première solution comprise entre 2 et 3 centimètres.

Par lecture de la table : si  $x = 6$  alors le volume est de  $1014 \text{ cm}^3$  et si  $x = 7$  alors le volume est de  $847 \text{ cm}^3$  donc

il existe une seconde solution comprise entre 6 et 7 centimètres.

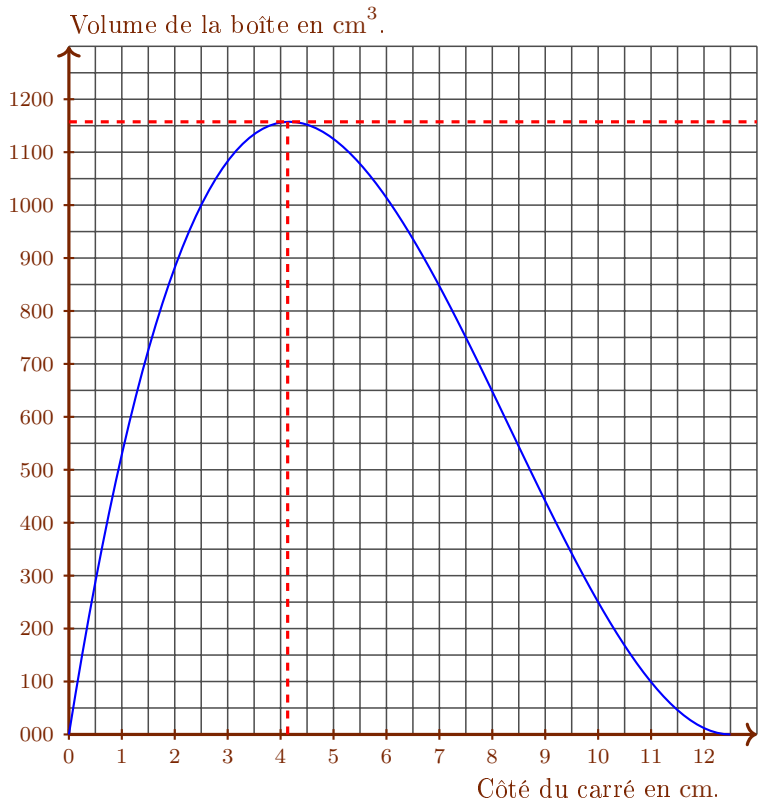
- (c) Nous pourrions refaire la même table mais en mettant dans la colonne A des valeurs allant de 0,1 en 0,1 en partant de 0.

6. (a) Recherchons graphiquement le volume maximal.



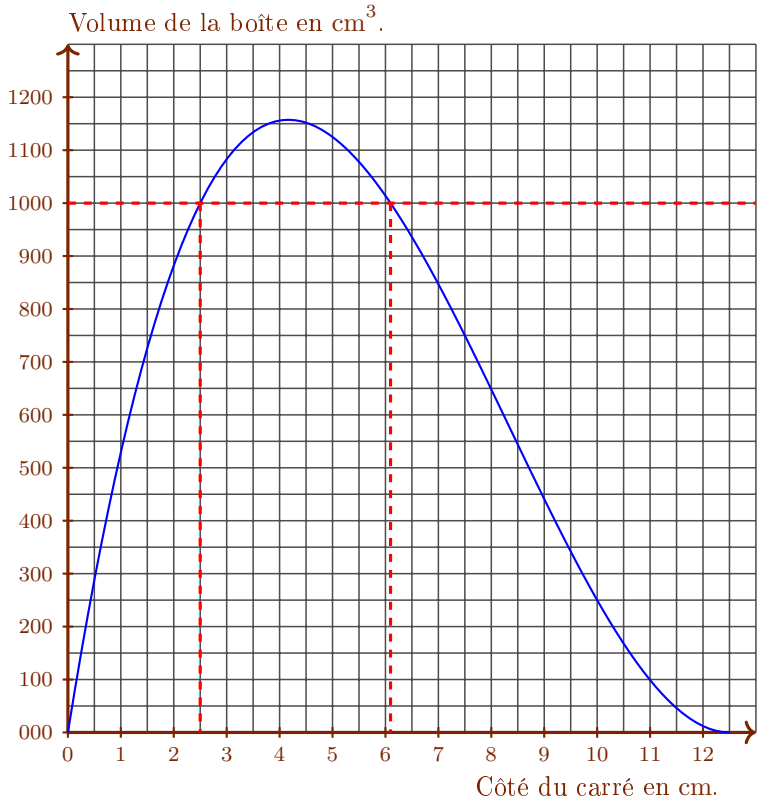
Par lecture graphique  $\mathcal{V}_1 \approx 880 \text{ cm}^3$ .

- (b) Recherchons l'image de 2 par  $V$  graphiquement.



Par lecture graphique le volume maximal est de  $1160 \text{ cm}^3$ .

- (c) Recherchons les antécédents de 1000 par  $V$ .



Le volume est de 1 L pour  $x \approx 2,5$  ou  $x \approx 6,1$ .

### Partie C : couvercle de la boîte.

- Déterminons la hauteur de la pyramide pour laquelle la boîte et la pyramide ont le même volume.

\* Calculons le volume de la boîte.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_2 &= V(6) \\
 &= 6 \times (25 - 2 \times 6)^2 \\
 &= 1014
 \end{aligned}$$

- \* Exprimons le volume  $\mathcal{V}_3$  de la pyramide en fonction de la hauteur  $h = EJ$ .  
La base  $EFGH$  de la pyramide étant un carré de côté  $EF = AB$  :

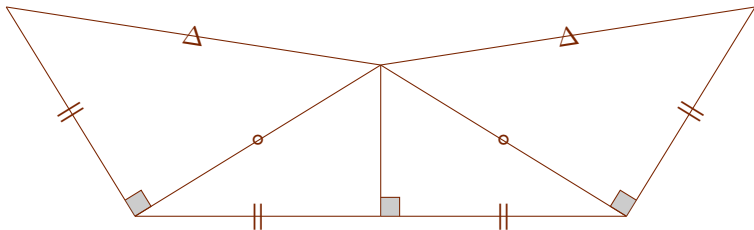
$$\begin{aligned}\mathcal{V}_3(h) &= \frac{AB^2 \times EJ}{3} \\ &= \frac{(25 - 2 \times 6)^2 \times h}{3} \\ &= \frac{169}{3}h\end{aligned}$$

- \* Résolvons l'équation :  $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_3(h)$ .  
Cette dernière équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}1014 &= \frac{169}{3}h \\ 1014 \times \frac{3}{169} &= \frac{169}{3}h \times \frac{3}{169} \\ 1014 \times \frac{3}{169} &= h \\ 18 &= h\end{aligned}$$

La boîte et la pyramide ont la même hauteur lorsque  $h = 18$  cm.

2. Traçons un patron de la pyramide.



### Partie D : décoration de la boîte.

1. \* Puisque  $[AB]$  et  $[AC]$  sont deux rayons d'un même cercle :  $AB = AC$ .  
Donc  $ABC$  est isocèle en  $A$ .

- \* Comme de plus l'hexagone est régulier  $\widehat{BAC}$  mesure un sixième de l'angle plein :  $\widehat{BAC} = \frac{1}{6} \times 360 = 60$ .
- \* Comme la somme des angles d'un triangle vaut  $180^\circ$  :

$$\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = 180$$

Or  $ABC$  étant isocèle en  $A$  :  $\widehat{ACB} = \widehat{CBA}$ , donc :

$$60 + 2\widehat{ACB} = 180$$

$$2\widehat{ACB} = 120$$

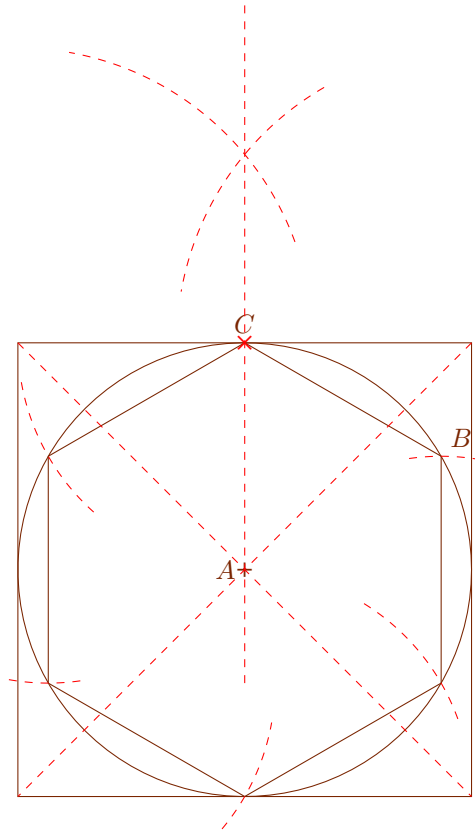
$$\widehat{ACB} = 60$$

Ainsi tous les angles du triangle ont même mesure :

$ABC$  est équilatéral.

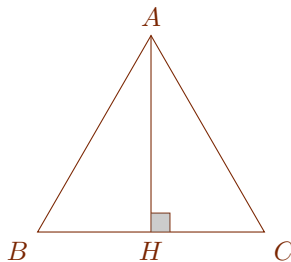
2. Nous commençons par dessiner un carré de côté 6.





3. L'hexagone est formé de six triangles qui ont tous la même aire que  $ABC$ .  
Calculons l'aire,  $\mathcal{A}(ABC)$  de  $ABC$ .

Notons  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$  dans  $ABC$  et déterminons  $AH$ .



$ABH$  est rectangle en  $H$  donc, d'après le théorème de Pythagore

$$BH^2 + HA^2 = AB^2.$$

D'une part  $AB = 3$  et d'autre part, puisque  $ABC$  est équilatéral et que ses hauteurs et ses médianes se confondent  $H$  est le milieu de  $[BC]$  et donc :  $BH = \frac{3}{2}$ . Ainsi :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + HA^2 = 3^2.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^2 + HA^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ AH^2 &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

$AH$  est une longueur donc est positive :

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{\frac{27}{4}} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABC) &= \frac{1}{2}BC \times AH \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ &= \frac{9}{4}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Et enfin, toutes les longueurs étant exprimées en centimètres, l'aire de l'hexagone est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 &= 6 \times \mathcal{A}(ABC) \\ &= 6 \times \frac{9}{4}\sqrt{3} \text{ cm}^2 \\ &= \frac{27}{2}\sqrt{3} \text{ cm}^2 \\ &\approx 23,38268 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Comme  $1 \text{ cm}^2 = 1 \times (0,1 \text{ cm})^2 = 0,01 \text{ cm}^2$  en arrondissant au  $\text{mm}^2$

l'aire de l'hexagone est  $27\sqrt{3} \approx 23,38 \text{ cm}^2$ .

## II Deuxième partie (13 points).

### Exercice 1.

1. Calculons le prix soldé,  $V_A$ .

Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 30 % est

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-30}{100} \\ &= 0,7 \end{aligned}$$

Donc la valeur d'arrivée après la baisse est de

$$\begin{aligned} V_A &= CM \times V_D \\ &= 0,7 \times 132 \end{aligned}$$

$$V_A = 92,4 \text{ €.}$$

2. Retrouvons la valeur de départ,  $V_D$  de l'article.

$$V_A = CM \times V_D.$$

Or  $V_A = 29,40$  et  $CM = 0,7$  donc :

$$\begin{aligned} 29,40 &= 0,7 \times V_D \\ \frac{29,40}{0,7} &= \frac{0,7 \times V_D}{0,7} \\ 42 &= V_D \end{aligned}$$

Le prix initial de l'article était 42 €.

## 3. Montrons avec un contre exemple que cela est inexacte.

Considérons un article de  $V_1 = 100$  €.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 20 % est  $CM_2 = 0,8$  donc le prix après les baisses de 30 puis 20 % est

$$\begin{aligned} V_2 &= CM_2 (CM \times 100) \\ &= 0,8 \times 0,7 \times 100 \\ &= 56 \end{aligned}$$

Alors que s'il avait subi une baisse de 50 % il vaudrait évidemment 50 euro.

Cette annonce est inexacte.

4. Déterminons le taux d'évolution global,  $t_g$ , correspondant à ces deux évolutions.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 5 % est

$$\begin{aligned} CM_3 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{5}{100} \\ &= 1,05 \end{aligned}$$

Donc le coefficient multiplicateur correspondant à ces deux évolutions successives est

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_3 \times CM \\ &= 1,05 \times 0,7 \\ &= 0,735 \end{aligned}$$

Le taux d'évolution correspondant est donc

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM_g - 1) \\ &= 100 \times (0,735 - 1) \\ &= -26,5 \end{aligned}$$

Le prix a baissé de 26,5 %.

**Exercice 2.**

Télécharger le programme Scratch.

1. Construisons le tableau d'état des variables correspondant.

Instruction	réponse	$x$	$y$	dire
demande "Donnez moi un nombre impair ?"	7			
mette $x$ à réponse	7	7		
mette $y$ à réponse + 2	7	7	$7 + 2 = 9$	
dit "Le résultat est " et $x \cdot y + 1$	7	7	9	$7 \times 9 + 1 = 64$

Le résultat obtenu est bien 64.

2. Construisons le tableau d'état des variables correspondant.

Instruction	réponse	$x$	$y$	dire
demande "Donnez moi un nombre impair ?"	19			
mette $x$ à réponse	19	19		
mette $y$ à réponse + 2	19	19	$19 + 2 = 21$	
dit "Le résultat est " et $x \cdot y + 1$	19	19	21	$19 \times 21 + 1 = 400$

Le résultat obtenu en choisissant 19 est 400.

3. Soit
- $n$
- un entier impair.

Puisque  $n$  est impair il existe un entier  $p$  tel que :  $n = 2p + 1$ .

Dressons le tableau d'état des variables.

Instruction	réponse	$x$	$y$	dire
demande "Donnez moi un nombre impair ?"	$2p + 1$			
mette $x$ à réponse	$2p + 1$	$2p + 1$		
mette $y$ à réponse + 2	$2p + 1$	$2p + 1$	$2p + 1 + 2 = 2p + 3$	
dit "Le résultat est " et $x \cdot y + 1$	$2p + 1$	$2p + 1$	$2p + 3$	$(2p + 1) \times (2p + 3) + 1$

Ainsi le résultat est

$$\begin{aligned}
 r &= (2p + 1)(2p + 3) + 1 \\
 &= 2p \times 2p + 2p \times 3 + 1 \times 2p + 1 \times 3 + 1 \\
 &= 4p^2 + 6p + 2p + 3 + 1 \\
 &= 4p^2 + 8p + 4 \\
 &= 4(p^2 + 2p + 1) \\
 &= 4(p + 1)^2 \quad (1) \\
 &= [2(p + 1)]^2 \quad (2)
 \end{aligned}$$

D'après (1) et (2) nous pouvons affirmer respectivement que

le résultat est un carré d'un entier et un multiple de 4.

### Exercice 3.

1. Déterminons le nombre,  $n$ , de tickets à 100 €.

Le gain moyen pour un ticket est de

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
 8,12 &= \frac{200 \times 0 + 444 \times 5 + 330 \times 10 + n \times 100}{200 + 444 + 330 + n} \\
 8,12 &= \frac{100n + 5520}{n + 974} \\
 8,12 \times (n + 974) &= \frac{100n + 5520}{n + 974} \times (n + 974) \\
 8,12n + 7908,88 &= 100n + 5520 \\
 8,12n + 7908,88 - 100n &= 100n + 5520 - 100n \\
 -91,88n + 7908,88 &= 5520 \\
 -91,88n + 7908,88 - 7908,88 &= 5520 - 7908,88 \\
 -91,88n &= -2388,88 \\
 \frac{-91,88n}{-91,88} &= \frac{-2388,88}{-91,88} \\
 n &= 26
 \end{aligned}$$

Il y avait 26 ticket à 100 €.

2. (a) Calculons le gain moyen.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{200 \times 0 + 444 \times 5 + 330 \times 10 + 26 \times 1000}{200 + 444 + 330 + 26} \\ &= 31,52\end{aligned}$$

Le gain moyen est alors de 31,52 €.

- (b) La médiane est la valeur du gain qui correspond à la limite entre la moitié constituée des plus petits gains et la moitié constituée des grands gains. Si les plus grandes valeurs sont augmentées cela ne modifie en rien la répartition en deux groupes, ni la valeur limite qu'est la médiane.

Notons  $s$  la valeur des plus gros gains donc 100 ou 1000 euros.

Déterminons la médiane de la série des gains.

Gains	0	5	10	$n$
Effectifs	200	444	330	26
E.C.C.	200	644	974	1000

- \* La série des gains est ordonnée dans le tableau.
- \* Position de la médiane.  $\frac{N}{2} = \frac{1000}{2} = 500$ . La série est paire donc la médiane se trouve entre la cinq-centième et la cinq-cent-unième valeurs de la série.
- \* Donc d'après les effectifs cumulés croissants :

$$\begin{aligned}Me &= \frac{5 + 5}{2} \\ &= 5\end{aligned}$$

Nous avons pu déterminer la médiane sans faire intervenir la valeur des gros gains (pourvu qu'ils restent les gros gain).

La médiane des gains n'est pas modifiée en augmentant les plus gros gains.

**Exercice 4.**

1. \* La proposition d'Omar est fausse car  $1,333\dots$  est un nombre avec une virgule mais n'est pas un nombre décimal.
- \* La proposition de Lucie est fausse car  $1 \leq \frac{1}{3} \leq 2$  et pourtant  $\frac{1}{3}$  n'est pas un nombre décimal.
- \* La proposition de Léo est fausse car, par exemple,  $1,333\dots$  a une partie entière et une partie décimale et pourtant ce n'est pas un nombre décimal.
- \* La proposition d'Aminata est fausse car, par exemple,  $\frac{1}{1000}$  est un nombre décimal écrit sous forme de fraction et pourtant son dénominateur n'est ni 10 ni 100.

2. 

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction dont le dénominateur est un multiple de 10.

**III Troisième partie (14 points).****Situation 1.**

- 1.
- 2.
- 3.
4. (a)
- (b)

**Situation 2.**

- 1.
- 2.
- 3.

**Situation 3.**

- 1.
- 2.
- 3.