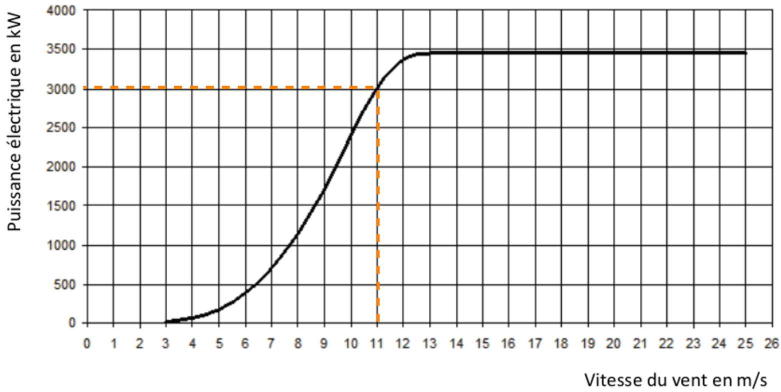
Épreuve de mathématiques CRPE 2017 groupe 4.

Lien vers le sujet seul : pdf.

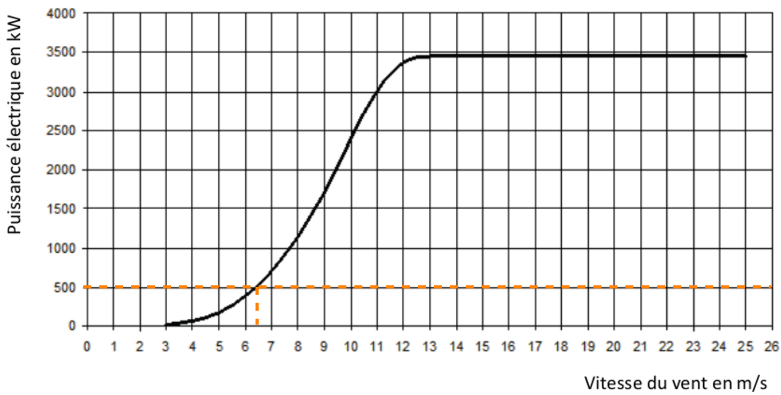
I Première partie (13 points).

Partie A : puissance électrique d'une éolienne.



1.

Quand le vent est de 11 m/s la puissance de l'éolienne est 3 000 kW.

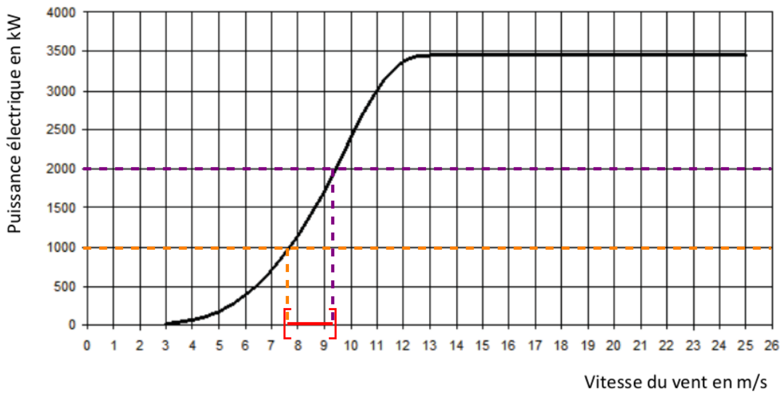


2.

La puissance est supérieure à 500 kW à partir de 6,5 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

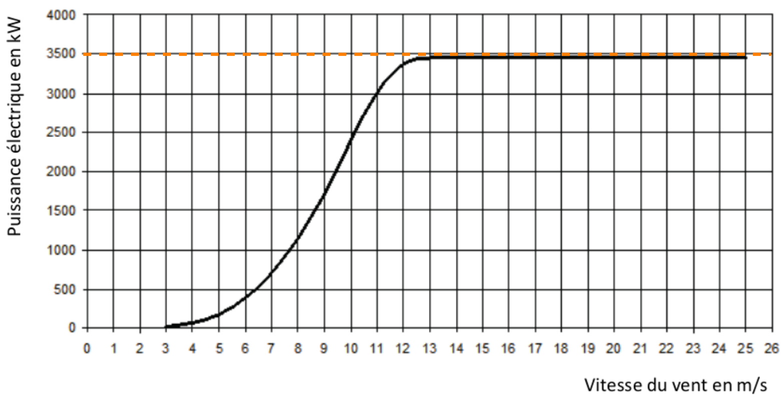
3. Si la puissance était proportionnelle à la vitesse du vent, la fonction donnant la puissance en fonction du vent serait une fonction linéaire. Sa courbe représentative serait une droite passant par l'origine du repère.
Puisque la courbe n'est pas une droite passant par l'origine :

la puissance électrique n'est pas proportionnelle à la vitesse du vent.



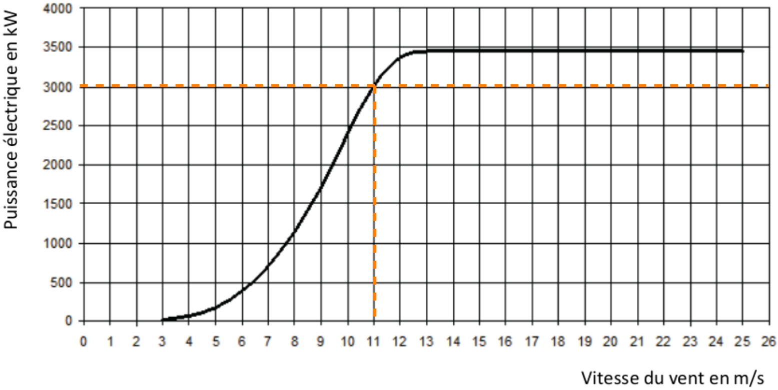
4.

La puissance sera comprise entre 1 000 et 2 000 kW si la vitesse est comprise entre 7,5 $m \cdot s^{-1}$ et 9,5 $m \cdot s^{-1}$.



5.

La puissance maximale est de 3 500 kW.



6.

La puissance de l'éolienne est supérieur à 3 000 kW si la vitesse du vent est supérieure à 11 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Or

$$\begin{aligned}
11\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} &= 11 \times \left(\frac{1}{1000}\ \text{km}\right) \times \left(\frac{1}{3600}\ \text{h}\right)^{-1} \\
&= 11 \times \frac{1}{1000} \times \left(\frac{1}{3600}\right)^{-1}\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} \\
&= 39{,}6\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{la puissance de l'éolienne est supérieur à 3 000 kW si la vitesse du vent est supérieure à } 39{,}6\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}.}$$

Partie B : calcul de la puissance récupérable d'une éolienne.

1. (a) Calculons l'aire, S_1, balayée par les pales.

   Puisqu'il s'agit d'un disque de diamètre D :

$$\begin{aligned} S_1 &= \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \\ &= \pi\left(\frac{112\ \mathrm{m}}{2}\right)^2 \\ &= \pi\left(\frac{112}{2}\ \mathrm{m}\right)^2 \\ &= \pi\,(56\ \mathrm{m})^2 \\ &= \pi 56^2\ \mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{S_1 = 3136\pi\ \mathrm{m}^2 \approx 9852{,}03\ \mathrm{m}^2.}$$

(b) Déterminons $P_{\text{récupérable}}$.

$$\begin{aligned} P_{\text{récupérable}} &= C_p \times P_{\text{disponible}} \\ &= C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S_1 \times V^3 \\ &= 0{,}52 \times \frac{1}{2} \times 1{,}225 \times 3136\pi \times V^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{\text{récupérable}} = 998{,}816\pi \times V^3.}$$

(c) Calculons $P_{\text{récupérable}}(6)$.

$$\begin{aligned} P_{\text{récupérable}}(6) &= 998{,}816\pi \times 6^3\ \mathrm{W} \\ &= 215744{,}256\pi\frac{1}{1000}\ \mathrm{kW} \\ &\approx 677{,}7805697\ \mathrm{kW} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{\text{récupérable}}(6) \approx 677{,}78\ \mathrm{kW}.}$$

(d) La puissance récupérable est proportionnelle au cube de la vitesse du vent c'est ce qui explique que lorsque le vent double, la puissance est multipliée par $2^3 = 8$.

Déterminons la puissance récupérable lorsque le vent double.

Nous savons déjà que

$$P_{\text{récupérable}}(V) = C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S_1 \times V^3$$

Donc :

$$\begin{aligned} P_{\text{récupérable}}(2V) &= C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S_1 \times (2V)^3 \\ &= C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S_1 \times 2^3 \times V^3 \\ &= 2^3 \times C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S_1 \times V^3 \\ &= 8P_{\text{récupérable}}(V) \end{aligned}$$

Lorsque la vitesse du vent double la puissance est multipliée par 8.

(e) Si la puissance et la vitesse du vent étaient proportionnelles lorsque la vitesse double devrait doubler aussi. Or ce n'est pas le cas d'après la question précédente, donc

puissance récupérable et vitesse du vent ne sont pas proportionnelles.

2. Démontrons l'inégalité proposée.

$$C_p \leqslant \frac{16}{27}$$

D'où, la puissance disponible étant positive (le sens de l'inégalité est conservé) :

$$C_p \times P_{\text{disponible}} \leqslant \frac{16}{27} \times P_{\text{disponible}}$$

Compte tenu de la formule de $P_{\text{diponible}}$ nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S \times V^3 &\leqslant \frac{16}{27} \times \frac{1}{2} \times r \times S \times V^3 \\
P_{\text{récupérable}} &\leqslant \frac{16}{27} \times \frac{1}{2} \times 1{,}225 \times \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \times V^3 \\
P_{\text{récupérable}} &\leqslant \frac{16}{27} \times \frac{1}{2} \times 1{,}225 \times \pi \times \frac{1}{4} \times D^2 \times V^3 \\
P_{\text{récupérable}} &\leqslant \frac{49}{540} \times \pi \times D^2 \times V^3
\end{aligned}$$

En calculant et en prenant une valeur approchée par excès au millième :

$$P_{\text{récupérable}} \leqslant 0{,}286 \times D^2 \times V^3$$

Finalement

$$\boxed{P_{\text{récupérable}} < 0{,}29 \times D^2 \times V^3.}$$

Partie C : étude de la production éolienne en France en 2015.

1. (a) Calculons E.

$$\begin{aligned}
E &= P \times t \times f \\
&= (4 \text{ MW}) \times (365 \times 24 \text{ h}) \times \frac{25{,}8}{100} \\
&= 4 \times 365 \times 24 \times \frac{25{,}8}{100} \text{ MW} \cdot \text{h}
\end{aligned}$$

$$\boxed{9040{,}32 \text{ MW} \cdot \text{h}.}$$

(b) Calculons la puissance nominale totale P_t.

Nous savons que :

$$E = P_t \times t \times f$$

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
1{,}98 \times 10^6\ \mathrm{MW\cdot h} &= P_t \times (365 \times 24\ \mathrm{h}) \times \frac{25{,}8}{100} \\
1{,}98 \times 10^6\ \mathrm{MW\cdot h} &= P_t \times 2260{,}08\ \mathrm{h} \\
\frac{1{,}98 \times 10^6\ \mathrm{MW\cdot h}}{2260{,}08\ \mathrm{h}} &= \frac{P_t \times 2260{,}08\ \mathrm{h}}{2260{,}08\ \mathrm{h}} \\
\frac{1{,}98 \times 10^6}{2260{,}08}\ \mathrm{MW} &= P_t \\
876{,}07518 &\approx P_t
\end{aligned}$$

$$P_t \approx 876\ \mathrm{MW}.$$

2. Déterminons la production totale d'énergie E_t.

$$\begin{aligned}
\frac{4{,}5}{100} \times E_t &= 21{,}9 \times 10^6\ \mathrm{MW\cdot h} \\
0{,}045 \times E_t &= 21{,}9 \times 10^6\ \mathrm{MW\cdot h} \\
\frac{0{,}045 \times E_t}{0{,}045} &= \frac{21{,}9 \times 10^6\ \mathrm{MW\cdot h}}{0{,}045} \\
E_t &= \frac{21{,}9 \times 10^6}{0{,}045}\ \mathrm{MW\cdot h} \\
E_t &\approx 486{,}666 \times 10^6\ \mathrm{MW\cdot h}
\end{aligned}$$

$$E_t \approx 487 \times 10^6\ \mathrm{MW\cdot h}.$$

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Un rectangle dont deux côtés consécutifs ont pour longueurs respectives 1 et 2 n'est pas un carré et a pourtant trois angles droits.

L'affirmation est fausse.

2. Par proportionnalité nous complétons le tableau suivant :

Payé en kg	3	2
Reçu en kg	4	2,666...

Il aurait dû lui faire payer 2,667 kg.

L'affirmation est vraie .

3. * Les points I, L, K d'une part et I, M, J d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * D'une part

$$\frac{IM}{IJ} = \frac{0{,}8}{2}$$
$$= 0{,}4$$

et d'autre part

$$\frac{IL}{IK} = \frac{1{,}6}{1{,}6 + 2{,}4}$$
$$= 0{,}4$$

donc $\frac{IM}{IJ} = \frac{IL}{IK}$.

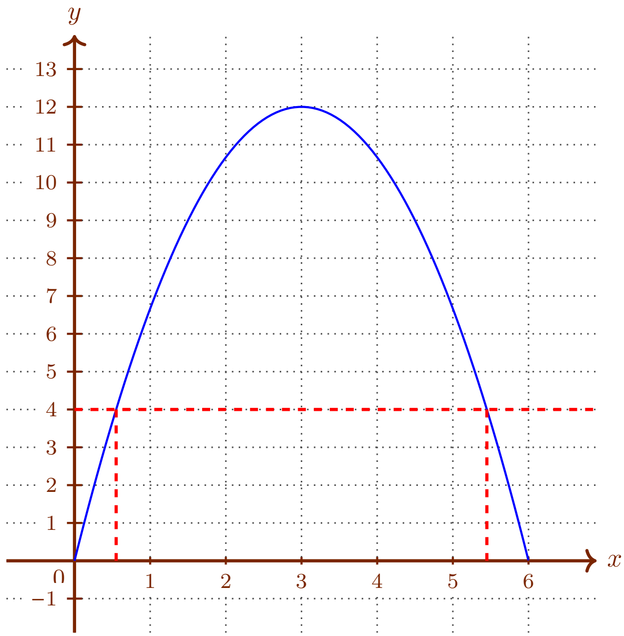
Des deux points précédents nous déduisons, d'après la réciproque du théorème de Thalès, que : $(ML) \parallel (KJ)$.

L'affirmation est vraie.

4. Soit p un nombre premier. p^2 a pour diviseurs 1, p, p^2.

L'affirmation est vraie.

5. Par lecture graphique :



nous voyons que les antécédents de 4 sont entre 0 et 1 ou entre 5 et 6.

L'affirmation est fausse.

Exercice 2.

1. (a) Pour schématiser la situation nous allons utiliser un tableau double entrée en indiquant en entête de colonnes le nombre obtenu sur le dé vert et en entête de ligne le nombre obtenu avec le dé rouge.

R \ V	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

L'univers Ω est formé de tous les couples d'entiers compris entre 1 et 6. Ω est muni de la loi d'équiprobabilité : tous les couples ont la même probabilité d'être obtenus.

Dans les situations d'équiprobabilité les calculs de probabilités se ramènent à des dénombrement d'issues. Présentons donc les issues telles qu'elles nous intéressent, c'est-à-dire en indiquant les points :

R \ V	1	2	3	4	5	6
1	1 000	50	50	50	50	50
2	50	200	50	50	50	50
3	50	50	300	50	50	50
4	50	50	50	400	50	50
5	50	50	50	50	500	50
6	50	50	50	50	50	600

Notons E : « obtenir 400 points. »

Calculons $\mathbb{P}(E)$.

Il y a équiprobabilité (entre les couples d'entiers), l'univers comporte 36 issues, E est réalisé par une seule issue (d'après le tableau) donc

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = \frac{1}{36}.}$$

(b) Notons F : « obtenir 50 points. »

Calculons $\mathbb{P}(F)$.

Il y a équiprobabilité (entre les couples d'entiers), l'univers comporte 36 issues, F est réalisé par $36 - 6 = 30$ issues (d'après le tableau) donc

$$\mathbb{P}(F) = \frac{30}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(F) = \frac{5}{6}.}$$

2. Notons G : « Paola gagnera la partie au troisième lancer ».

Calculons $\mathbb{P}(G)$.

Paola gagnera la partie si elle obtient un total supérieur à 1 000. Donc en notant n le nombre de points obtenus au troisième lancé il faut que

$$650 + n \geqslant 1000$$

ce qui équivaut successivement à :

$$650 + n - 650 \geqslant 1000 - 650$$
$$n \geqslant 350$$

R \ V	1	2	3	4	5	6
1	1 000	50	50	50	50	50
2	50	200	50	50	50	50
3	50	50	300	50	50	50
4	50	50	50	400	50	50
5	50	50	50	50	500	50
6	50	50	50	50	50	600

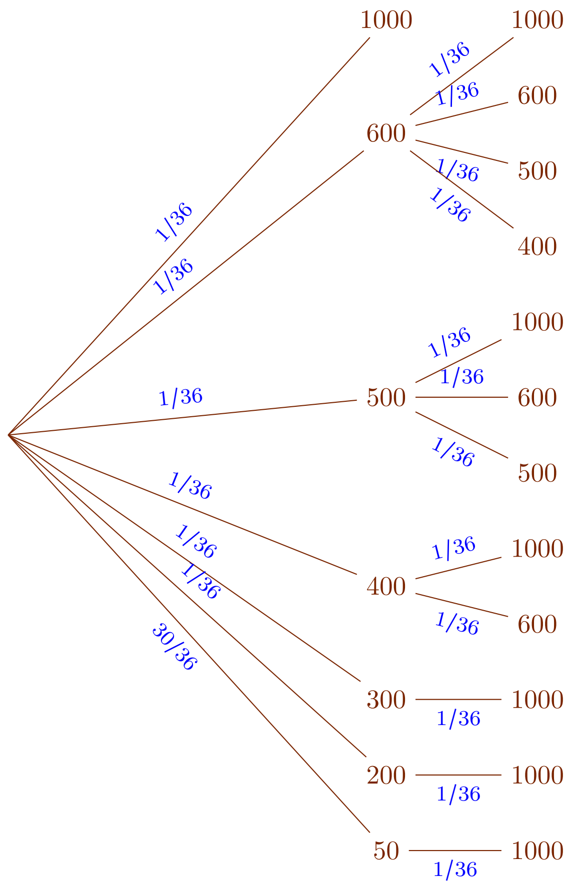
Donc G est, d'après le tableau, réalisé par 4 issues.
Comme de plus il y a équiprobabilité et que l'univers contient 36 issues :

$$\mathbb{P}(G) = \frac{4}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{1}{9}.}$$

3. Notons H : « Obtenir au moins 1000 points en 1 ou 2 coups.

   Voici un extrait de l'arbre pondéré correspondant aux deux lancers. Chaque niveau représente un lancer. Ne sont ici représentés que les chemins correspondant à un gain supérieur à 1000 points.



Nous pouvons calculer la probabilité de H en utilisant les règles de calculs sur les arbres pondérés : la probabilité d'un chemin et le produit des probabilités qui le jonchent (formule des probabilités composées) et la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent (définition de la probabilité d'un événement).

$$\mathbb{P}(H) = 11 \times \frac{1}{36} \times \frac{1}{36} + \frac{30}{36} \times \frac{1}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(H) = \frac{41}{1296}.}$$

Exercice 3.

Lien de téléchargement du programme Scratch.

1. (a) Dressons le tableau d'état des variables de cet algorithme.

	x	A	B	C	D
mettre x à réponse	10				
mettre A à (x - 8)	10	2			
mettre B à (A * 3)	10	2	6		
mettre C à (B + 24)	10	2	6	30	
mettre D à (C + x)	10	2	6	30	40
montrer la variable D					40

(b) Dressons le tableau d'état des variables de cet algorithme.

	x	A	B	C	D
mettre x à réponse	-2				
mettre A à (x - 8)	-2	-10			
mettre B à (A * 3)	-2	-10	-30		
mettre C à (B + 24)	-2	-10	-30	-6	
mettre D à (C + x)	-2	-10	-30	-6	12
montrer la variable D					12

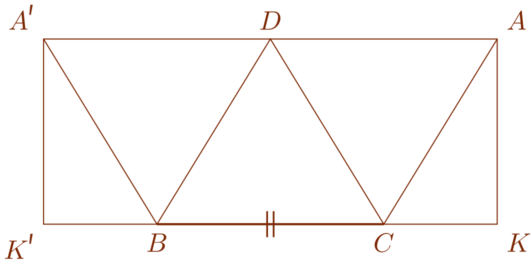
2. Dressons le tableau d'état des variables de l'algorithme précédent en l'appliquant à un nombre quelconque x.

	x	A	B	C	D
mettre x à réponse	x				
mettre A à (x - 8)	x	$x-8$			
mettre B à (A * 3)	x	$x-8$	$(x-8)\times 3$		
mettre C à (B + 24)	x	$x-8$	$(x-8)\times 3$	$(x-8)*3+24$	
mettre D à (C + x)	x	$x-8$	$(x-8)\times 3$	$(x-8)*3+24$	$[(x-8)*3+24]+x$
montrer la variable D					$4x$

Il faut compléter la 4e ligne par : $4*x$.

Exercice 4.

1. (a) déterminons $A'A$ et KA.



* $A'A = 2AD = 2a = 2 \times 5{,}5$ cm.

$$AA' = 11 \text{ cm.}$$

* Le triangle AKC est rectangle en K donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = CK^2 + KA^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
a^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + KA^2 \\
a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + KA^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
a^2 - \frac{a^2}{2^2} &= KA^2 \\
a^2 - \frac{1}{4}a^2 &= KA^2 \\
\frac{3}{4}a^2 &= KA^2
\end{aligned}$$

Puisque KA est une longueur nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{3}{4}a^2} &= KA \\
\sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{a^2} &= AK \\
\frac{\sqrt{3}}{2}a &= KA
\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 5{,}5 \text{ cm}$$

$$KA = \frac{11}{4}\sqrt{3} \text{ cm.}$$

(b) Calculons le volume V du tétraèdre formé par le sachet de thé.

* Commençons par déterminer l'aire A_{base} d'une base du tétraèdre. Les faces du tétraèdre sont des triangles équilatéraux. Considérons pat exemple ABC.Puisque K est le pied de la hauteur issue de A :

$$A_{\text{base}} = \frac{1}{2} \times BC \times AK$$

Or $BC = a$ par construction et $AK = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, d'après la question précédente, donc

$$\begin{aligned} A_{\text{base}} &= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \end{aligned}$$

* Calculons maintenant V.
D'après l'énoncé

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times h \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \frac{a\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times a^2 \times a \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \times (5{,}5 \text{ cm})^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \times 5{,}5^3 \text{ cm}^3 \\ &\approx 19{,}6074 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$A_{\text{base}} \approx 58{,}8 \text{ cm}^3.$$

2. Au cours de la question précédente nous avons établi que $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, donc si la longueur de l'arête est multipliée par 1,3 le volume devient

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{2}}{12}(1{,}3a)^3 \\ &= 1{,}3^3 \times \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \\ &= 2{,}197 \times \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \end{aligned}$$

Le volume est multiplié par un peu plus de deux.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.

2.

Situation 2.

1.

2.

Situation 3.

Situation 4.

1.

2.