Épreuve de mathématiques CRPE 2017 groupe 4.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

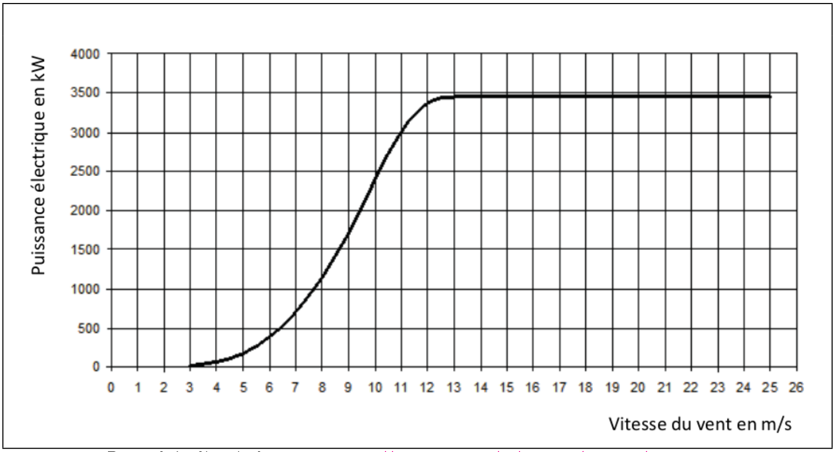
Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Partie A : puissance électrique d'une éolienne.

Le graphique ci-dessous représente les variations de la puissance électrique, exprimée en kilowatt (kW) fournie par une certaine éolienne, en fonction de la vitesse du vent, exprimée en mètre par seconde (m/s).

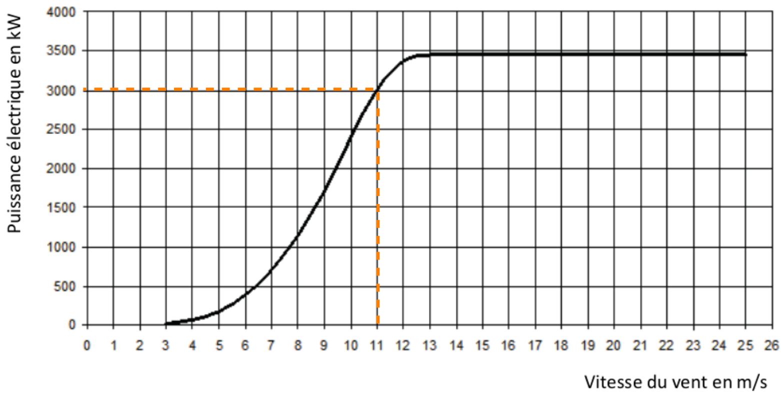
La forme de la courbe dépend des caractéristiques mécaniques et électriques de l'éolienne.



Reproduit d'après la source : http://www.vestas.com/en/products/turbines/v112-3_3_mw

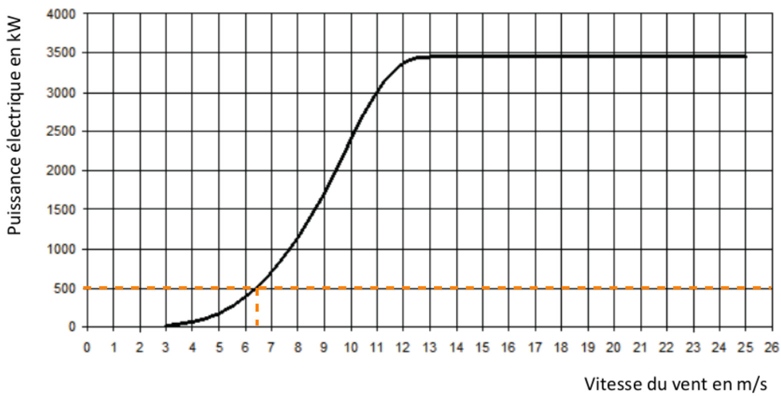
Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

1. Quelle est la puissance électrique de l'éolienne quand la vitesse du vent est 11 m/s ?



Quand le vent est de 11 m/s la puissance de l'éolienne est 3 000 kW.

2. À partir de quelle vitesse du vent la puissance électrique de l'éolienne est-elle supérieure à 500 kW ?



La puissance est supérieure à 500 kW à partir de 6,5 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

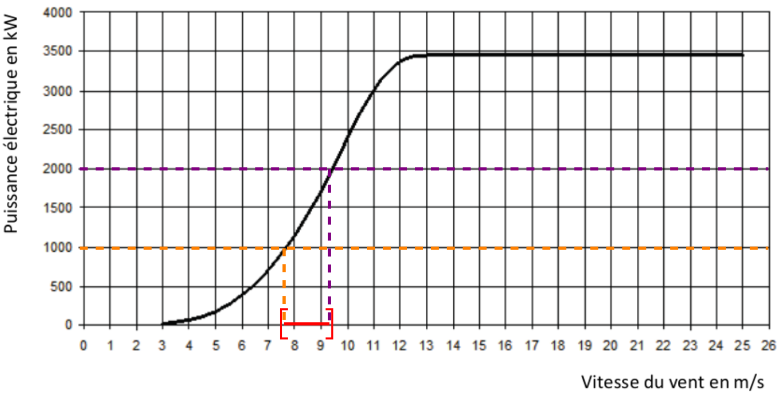
3. La puissance électrique de l'éolienne est-elle proportionnelle à la vitesse du vent ? Justifier.

Si la puissance était proportionnelle à la vitesse du vent, la fonction donnant la puissance en fonction du vent serait une fonction linéaire. Sa courbe représentative serait une droite passant par l'origine du repère.

Puisque la courbe n'est pas une droite passant par l'origine :

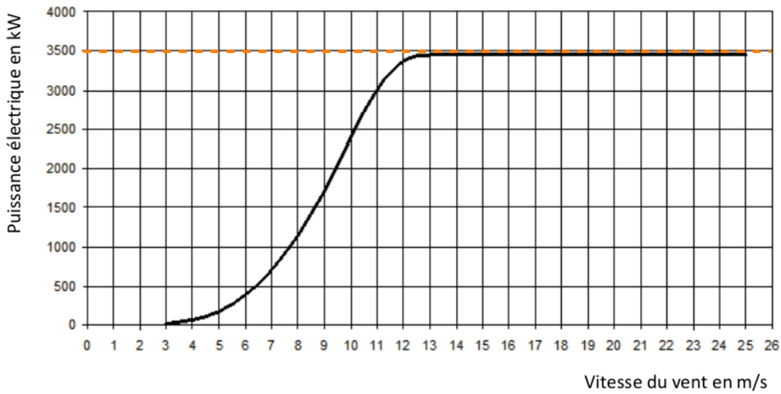
la puissance électrique n'est pas proportionnelle à la vitesse du vent.

4. Pour quelles vitesses du vent la puissance électrique de l'éolienne est-elle comprise entre 1 000 et 2 000 kW ?



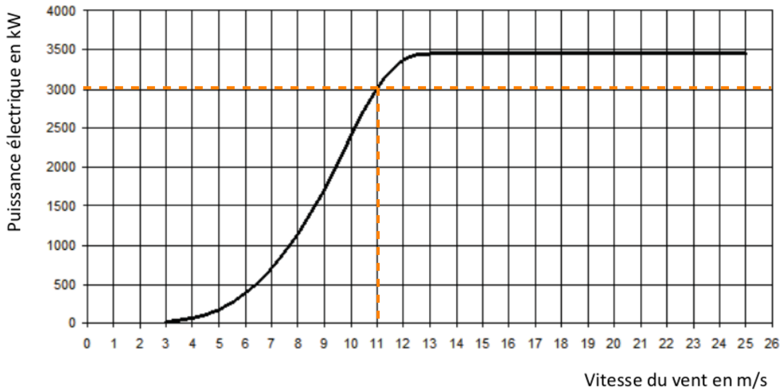
La puissance sera comprise entre 1 000 et 2 000 kW si la vitesse est comprise entre 7,5 $m \cdot s^{-1}$ et 9,5 $m \cdot s^{-1}$.

5. Quelle est la puissance électrique maximale que peut fournir l'éolienne ?



La puissance maximale est de 3 500 kW.

6. À partir de quelle vitesse du vent, en km/h, la puissance électrique de l'éolienne est-elle supérieure à 3 000 kW ?



La puissance de l'éolienne est supérieur à 3 000 kW si la vitesse du vent est supérieure à 11 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Or

$$\begin{aligned} 11\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} &= 11 \times \left(\frac{1}{1000}\ \mathrm{km}\right) \times \left(\frac{1}{3600}\ \mathrm{h}\right)^{-1} \\ &= 11 \times \frac{1}{1000} \times \left(\frac{1}{3600}\right)^{-1}\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} \\ &= 39{,}6\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} \end{aligned}$$

donc

> la puissance de l'éolienne est supérieur à 3 000 kW si la vitesse du vent est supérieure à 39,6 $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.

Partie B : calcul de la puissance récupérable d'une éolienne.

On dispose des informations suivantes sur les éoliennes :

La **puissance récupérable** d'une éolienne, exprimée en watt, notée $P_{\text{récupérable}}$, se calcule à l'aide de la formule :

$$P_{\text{récupérable}} = C_p \times P_{\text{disponible}}$$

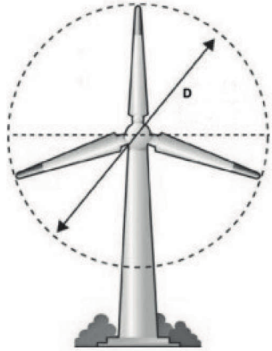
où C_p est **le coefficient de performance** de l'éolienne et $P_{\text{disponible}}$ est la **puissance disponible** de l'éolienne, exprimée en watt, fournie par le vent.
Les puissances récupérables et disponibles fournissent des valeurs théoriques qui ne tiennent pas compte des contraintes mécaniques (minimum ou maximum de vitesse du vent).

La puissance disponible se calcule à l'aide la formule :

$$P_{\text{disponible}} = \frac{1}{2} \times r \times S \times V^3$$

où

- r est la densité de l'air (l'industrie éolienne utilise la valeur 1,225 kg/m^3),
- S est l'aire de la surface balayée par les pales de l'éolienne (en m^2), c'est-à-dire l'aire d'un disque dont le diamètre D est celui de l'éolienne (en m),
- V la vitesse du vent (en m/s).



D'après les principes de la mécanique, la valeur maximale du coefficient de performance C_p est $\frac{16}{27}$.

1. **Dans cette question, l'éolienne considérée a pour diamètre** 112 m **et pour coefficient de performance** 0,52**.**

   (a) Calculer l'aire de la surface balayée par les pales de cette éolienne.

   Calculons l'aire, S_1, balayée par les pales.

   Puisqu'il s'agit d'un disque de diamètre D :

$$\begin{aligned} S_1 &= \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \\ &= \pi \left(\frac{112 \text{ m}}{2}\right)^2 \\ &= \pi \left(\frac{112}{2} \text{ m}\right)^2 \\ &= \pi \left(56 \text{ m}\right)^2 \\ &= \pi 56^2 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{S_1 = 3136\pi \text{ m}^2 \approx 9852{,}03 \text{ m}^2.}$$

(b) Montrer que la puissance récupérable de cette éolienne, exprimée en watt, est $P_{\text{récupérable}} = 998{,}816\pi \times V^3$.

Déterminons $P_{\text{récupérable}}$.

$$\begin{aligned} P_{\text{récupérable}} &= C_p \times P_{\text{disponible}} \\ &= C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S_1 \times V^3 \\ &= 0{,}52 \times \frac{1}{2} \times 1{,}225 \times 3136\pi \times V^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{\text{récupérable}} = 998{,}816\pi \times V^3.}$$

(c) En déduire la puissance récupérable, exprimée en kilowatt, de cette éolienne pour un vent de 6 m/s. On arrondira le résultat au centième.

Calculons $P_{\text{récupérable}}(6)$.

$$\begin{aligned} P_{\text{récupérable}}(6) &= 998{,}816\pi \times 6^3 \text{ W} \\ &= 215744{,}256\pi \frac{1}{1000} \text{ kW} \\ &\approx 677{,}7805697 \text{ kW} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{\text{récupérable}}(6) \approx 677{,}78 \text{ kW}.}$$

(d) Expliquer pourquoi la puissance récupérable est multipliée par 8 lorsque la vitesse du vent est multipliée par 2.

La puissance récupérable est proportionnelle au cube de la vitesse du vent c'est ce qui explique que lorsque le vent double, la puissance est multipliée par $2^3 = 8$.

Déterminons la puissance récupérable lorsque le vent double.

Nous savons déjà que

$$P_{\text{récupérable}}(V) = C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S_1 \times V^3$$

Donc :

$$\begin{aligned}
P_{\text{récupérable}}(2V) &= C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S_1 \times (2V)^3 \\
&= C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S_1 \times 2^3 \times V^3 \\
&= 2^3 \times C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S_1 \times V^3 \\
&= 8P_{\text{récupérable}}(V)
\end{aligned}$$

Lorsque la vitesse du vent double la puissance est multipliée par 8.

(e) La puissance récupérable de cette éolienne est-elle proportionnelle à la vitesse du vent ? Justifier.

Si la puissance et la vitesse du vent étaient proportionnelles lorsque la vitesse double devrait doubler aussi. Or ce n'est pas le cas d'après la question précédente, donc

puissance récupérable et vitesse du vent ne sont pas proportionnelles.

2. Montrer que d'une manière générale, pour une éolienne de diamètre D, on a

$$P_{\text{récupérable}} < 0{,}29 \times D^2 \times V^3.$$

Démontrons l'inégalité proposée.

$$C_p \leqslant \frac{16}{27}$$

D'où, la puissance disponible étant positive (le sens de l'inégalité est conservé) :

$$C_p \times P_{\text{disponible}} \leqslant \frac{16}{27} \times P_{\text{disponible}}$$

Compte tenu de la formule de $P_{\text{diponible}}$ nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S \times V^3 &\leqslant \frac{16}{27} \times \frac{1}{2} \times r \times S \times V^3 \\
P_{\text{récupérable}} &\leqslant \frac{16}{27} \times \frac{1}{2} \times 1{,}225 \times \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \times V^3 \\
P_{\text{récupérable}} &\leqslant \frac{16}{27} \times \frac{1}{2} \times 1{,}225 \times \pi \times \frac{1}{4} \times D^2 \times V^3 \\
P_{\text{récupérable}} &\leqslant \frac{49}{540} \times \pi \times D^2 \times V^3
\end{aligned}$$

En calculant et en prenant une valeur approchée par excès au millième :

$$P_{\text{récupérable}} \leqslant 0{,}286 \times D^2 \times V^3$$

Finalement

$$\boxed{P_{\text{récupérable}} < 0{,}29 \times D^2 \times V^3.}$$

Partie C : étude de la production éolienne en France en 2015.

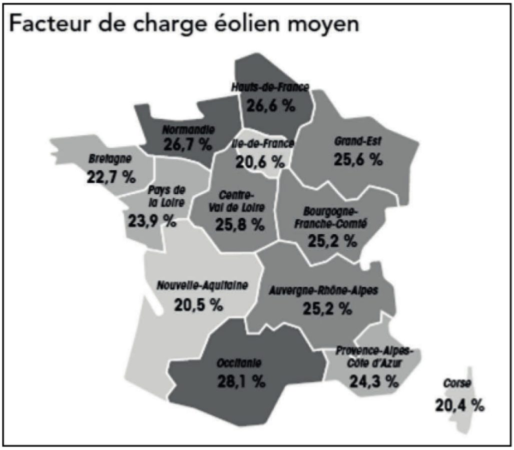
On appelle **puissance nominale** d'une éolienne la puissance électrique maximale qu'elle peut fournir.

L'énergie électrique produite par l'éolienne sur une durée t se calcule en multipliant la puissance nominale P de l'éolienne par la durée t considérée et un **facteur de charge** f qui dépend de la région. Cette énergie électrique est notée E. Ainsi,

$$E = P \times t \times f.$$

Si la puissance nominale est exprimée en watt (W) et le temps en heure (h), l'énergie électrique sera exprimée en Watt-heure (Wh).

1. La carte représentée ci-dessous donne, suivant les régions, le facteur de charge en 2015 pour la production éolienne :



(a) On considère une éolienne de puissance nominale 4 MW implantée en région Centre-Val de Loire. Calculer, en MWh, l'énergie électrique produite durant l'année 2015 par cette éolienne.

On rappelle que 1 *mégawatt est égale à* 1 *million de watts ou encore que* 1 MW = 10^6 W.

Calculons E.

$$\begin{aligned} E &= P \times t \times f \\ &= (4\text{ MW}) \times (365 \times 24\text{ h}) \times \frac{25,8}{100} \\ &= 4 \times 365 \times 24 \times \frac{25,8}{100}\text{ MW} \cdot \text{h} \end{aligned}$$

$$\boxed{9040,32\text{ MW} \cdot \text{h.}}$$

(b) L'énergie électrique totale produite en 2015 dans l'ensemble de la région Centre-Val de Loire par les parcs éoliens est de $1,98 \times 10^6$ MWh. Calculer la puissance nominale totale des éoliennes installées dans cette région.

Calculons la puissance nominale totale P_t.

Nous savons que :

$$E = P_t \times t \times f$$

Ceci équivaut successivement à :

$$1{,}98 \times 10^6 \text{ MW} \cdot \text{h} = P_t \times (365 \times 24 \text{ h}) \times \frac{25{,}8}{100}$$
$$1{,}98 \times 10^6 \text{ MW} \cdot \text{h} = P_t \times 2260{,}08 \text{ h}$$
$$\frac{1{,}98 \times 10^6 \text{ MW} \cdot \text{h}}{2260{,}08 \text{ h}} = \frac{P_t \times 2260{,}08 \text{ h}}{2260{,}08 \text{ h}}$$
$$\frac{1{,}98 \times 10^6}{2260{,}08} \text{ MW} = P_t$$
$$876{,}07518 \approx P_t$$

$$\boxed{P_t \approx 876 \text{ MW.}}$$

2. L'énergie électrique totale produite par l'éolien en France en 2015 est d'environ $21{,}9 \times 10^6$ MWh. Sachant que le taux moyen de couverture de la production d'énergie électrique en France en 2015 par la production éolienne est de 4,5 %, calculer l'énergie électrique produite au total en France en 2015. Arrondir le résultat au million de MWh.

Déterminons la production totale d'énergie E_t.

$$\frac{4{,}5}{100} \times E_t = 21{,}9 \times 10^6 \text{ MW} \cdot \text{h}$$
$$0{,}045 \times E_t = 21{,}9 \times 10^6 \text{ MW} \cdot \text{h}$$
$$\frac{0{,}045 \times E_t}{0{,}045} = \frac{21{,}9 \times 10^6 \text{ MW} \cdot \text{h}}{0{,}045}$$
$$E_t = \frac{21{,}9 \times 10^6}{0{,}045} \text{ MW} \cdot \text{h}$$
$$E_t \approx 486{,}666 \times 10^6 \text{ MW} \cdot \text{h}$$

$$\boxed{E_t \approx 487 \times 10^6 \text{ MW} \cdot \text{h.}}$$

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Cet exercice comporte cinq affirmations. Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse fausse n'enlève pas de point, une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Affirmation : Un quadrilatère qui a trois angles droits est un carré.

   Un rectangle dont deux côtés consécutifs ont pour longueurs respectives 1 et 2 n'est pas un carré et a pourtant trois angles droits.

   L'affirmation est fausse.

2. Dans une boucherie, on peut lire : « 3 steaks hachés achetés, 1 steak en plus gratuit ».
   Solène demande 3 kg de viande hachée. Une fois la commande préparée, le boucher déclare : « J'ai haché la viande que j'utilise pour les steaks, aussi je vous fais bénéficier de la promotion. Vous ne payez donc que 2 kg de viande. »

   Affirmation : Le boucher se trompe ; il aurait dû lui faire payer 2,250 kg de viande.

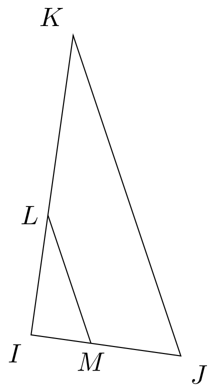
   Par proportionnalité nous complétons le tableau suivant :

Payé en kg	3	2
Reçu en kg	4	2,666...

   Il aurait dû lui faire payer 2,667 kg.

   L'affirmation est vraie .

3. On considère la figure ci-dessous.



On sait que : $M \in [IJ]$; $L \in [IK]$; $IM = 0{,}8$; $IL = 1{,}6$; $LK = 2{,}4$ et $IJ = 2$.

Affirmation : Les droites (ML) et (KJ) sont parallèles.

* Les points I, L, K d'une part et I, M, J d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* D'une part

$$\frac{IM}{IJ} = \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4$$

et d'autre part

$$\frac{IL}{IK} = \frac{1{,}6}{1{,}6 + 2{,}4} = 0{,}4$$

donc $\frac{IM}{IJ} = \frac{IL}{IK}$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après la réciproque du théorème de Thalès, que : $(ML) \parallel (KJ)$.

L'affirmation est vraie.

4. Affirmation : Le carré d'un nombre entier positif premier admet exactement trois diviseurs positifs.

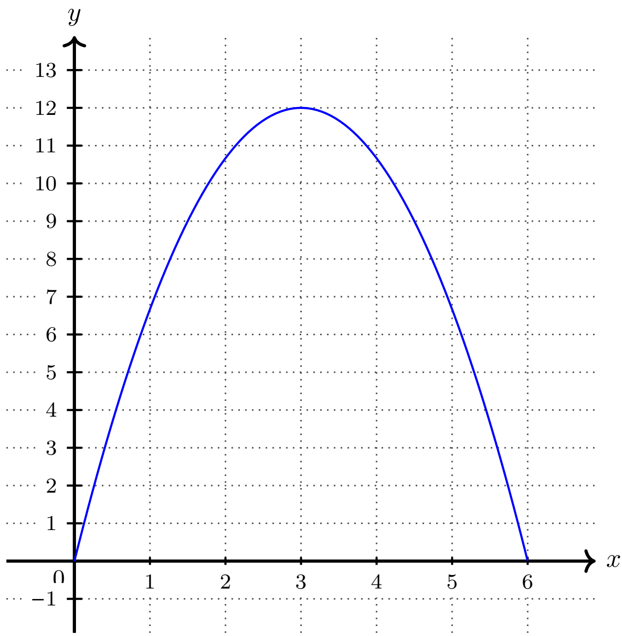
   Soit p un nombre premier. p^2 a pour diviseurs 1, p, p^2.

   L'affirmation est vraie.

5. On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0;6]$ par :

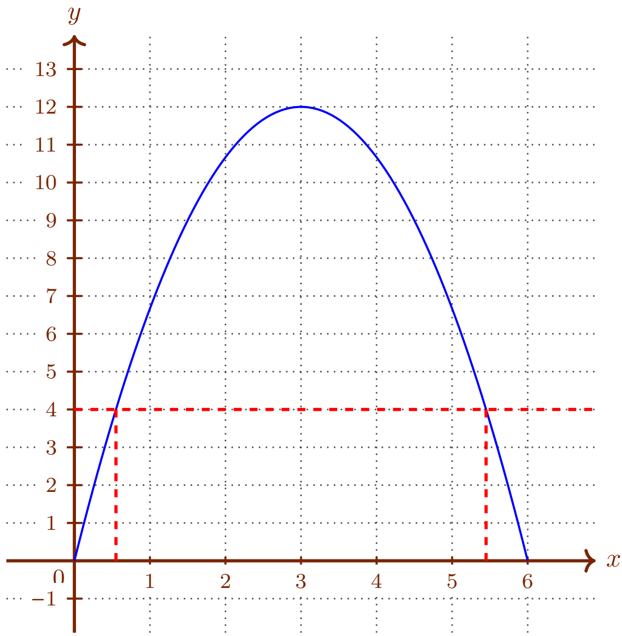
$$f(x) = 8x - \frac{4}{3}x^2$$

   et on donne sa représentation graphique ci-dessous :



   Affirmation : 4 a pour antécédent un nombre compris entre 10 et 11.

   Par lecture graphique :



nous voyons que les antécédents de 4 sont entre 0 et 1 ou entre 5 et 6.

L'affirmation est fausse.

Exercice 2.

Jules possède deux dés cubiques équilibrés avec des faces numérotées de 1 à 6 (un rouge et un vert). Il propose à Paola un jeu au cours duquel chacun des joueurs, à tour de rôle, lance simultanément les deux dés et gagne des points suivant les règles ci-dessous :

Règle de la paire :

- Si, lors d'un lancer, un joueur fait deux 1, c'est-à-dire une paire de 1, il remporte 1000 points.
- Si un joueur obtient une paire de 2, il obtient 100 fois la valeur de 2, soit 200 points.
- De même, si un joueur obtient une paire de 3 ou de 4 ou de 5 ou de 6, il obtient 100 fois la valeur du dé.

Règle des autres lancers :
• Si un joueur obtient un résultat autre qu'une paire, il obtient 50 points.

Gain de la partie :
• Le gagnant de la partie est le premier à atteindre au moins un total de 1000.

Inspiré d'un exercice du manuel TRANSMATHS 3ème, 2016, Editions Nathan.

1. Paola lance les deux dés.

   (a) Quelle est la probabilité qu'elle obtienne exactement 400 points ?

   Pour schématiser la situation nous allons utiliser un tableau double entrée en indiquant en entête de colonnes le nombre obtenu sur le dé vert et en entête de ligne le nombre obtenu avec le dé rouge.

R \ V	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

   L'univers Ω est formé de tous les couples d'entiers compris entre 1 et 6. Ω est muni de la loi d'équiprobabilité : tous les couples ont la même probabilité d'être obtenus.

   Dans les situations d'équiprobabilité les calculs de probabilités se ramènent à des dénombrement d'issues. Présentons donc les issues telles qu'elles nous intéressent, c'est-à-dire en indiquant les points :

R \ V	1	2	3	4	5	6
1	1 000	50	50	50	50	50
2	50	200	50	50	50	50
3	50	50	300	50	50	50
4	50	50	50	400	50	50
5	50	50	50	50	500	50
6	50	50	50	50	50	600

Notons E : « obtenir 400 points. »

Calculons $\mathbb{P}(E)$.

Il y a équiprobabilité (entre les couples d'entiers), l'univers comporte 36 issues, E est réalisé par une seule issue (d'après le tableau) donc

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = \tfrac{1}{36}.}$$

(b) Quelle est la probabilité qu'elle obtienne exactement 50 points ?

Notons F : « obtenir 50 points. »

Calculons $\mathbb{P}(F)$.

Il y a équiprobabilité (entre les couples d'entiers), l'univers comporte 36 issues, F est réalisé par $36 - 6 = 30$ issues (d'après le tableau) donc

$$\mathbb{P}(F) = \frac{30}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(F) = \tfrac{5}{6}.}$$

2. Paola a déjà joué deux tours et a obtenu 650 points. Jules n'a toujours pas obtenu 1000 points. Elle s'apprête à lancer les dés pour une troisième fois. Quelle est la probabilité qu'elle gagne la partie lors de son troisième lancer ?

Notons G : « Paola gagnera la partie au troisième lancer ».

Calculons $\mathbb{P}(G)$.

Paola gagnera la partie si elle obtient un total supérieur à 1 000. Donc en notant n le nombre de points obtenus au troisième lancé il faut que

$$650 + n \geqslant 1000$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 650 + n - 650 &\geqslant 1000 - 650 \\ n &\geqslant 350 \end{aligned}$$

R \ V	1	2	3	4	5	6
1	1 000	50	50	50	50	50
2	50	200	50	50	50	50
3	50	50	300	50	50	50
4	50	50	50	400	50	50
5	50	50	50	50	500	50
6	50	50	50	50	50	600

Donc G est, d'après le tableau, réalisé par 4 issues.
Comme de plus il y a équiprobabilité et que l'univers contient 36 issues :

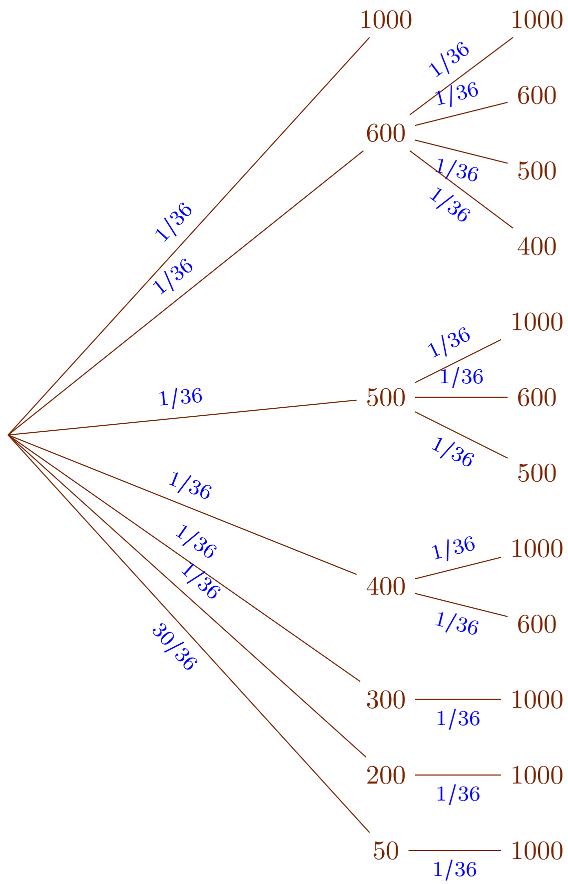
$$\mathbb{P}(G) = \frac{4}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{1}{9}.}$$

3. Quelle est la probabilité de gagner au moins 1000 points en 1 ou 2 coups ?

Notons H : « Obtenir au moins 1000 points en 1 ou 2 coups.

Voici un extrait de l'arbre pondéré correspondant aux deux lancers. Chaque niveau représente un lancer. Ne sont ici représentés que les chemins correspondant à un gain supérieur à 1000 points.



Nous pouvons calculer la probabilité de H en utilisant les règles de calculs sur les arbres pondérés : la probabilité d'un chemin et le produit des probabilités qui le jonchent (formule des probabilités composées) et la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent (définition de la probabilité d'un événement).

$$\mathbb{P}(H) = 11 \times \frac{1}{36} \times \frac{1}{36} + \frac{30}{36} \times \frac{1}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(H) = \frac{41}{1296}.}$$

Exercice 3.

Voici un programme de calcul :

Lien de téléchargement du programme Scratch.

1. (a) On applique ce programme de calcul au nombre 10. Montrer que le résultat affiché à la fin est 40.

Dressons le tableau d'état des variables de cet algorithme.

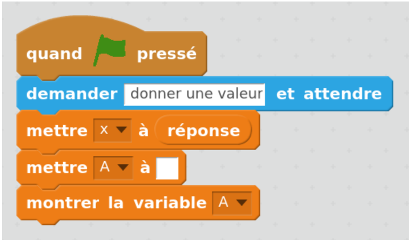
	x	A	B	C	D
mettre x à réponse	10				
mettre A à x - 8	10	2			
mettre B à A * 3	10	2	6		
mettre C à B + 24	10	2	6	30	
mettre D à C + x	10	2	6	30	40
montrer la variable D					40

(b) On applique ce programme de calcul au nombre -2. Quel va être le résultat affiché à la fin ? Justifier.

Dressons le tableau d'état des variables de cet algorithme.

	x	A	B	C	D
mettre x à réponse	-2				
mettre A à x - 8	-2	-10			
mettre B à A * 3	-2	-10	-30		
mettre C à B + 24	-2	-10	-30	-6	
mettre D à C + x	-2	-10	-30	-6	12
montrer la variable D					12

2. Une modification possible de l'algorithme est copiée ci-dessous, mais il manque une instruction à la 4e ligne.



Comment compléter la 4e ligne, là où il y a un carré blanc, par l'expression la plus simple possible pour que cet algorithme affiche le même résultat que l'algorithme précédent quel que soit le nombre entré ?

Dressons le tableau d'état des variables de l'algorithme précédent en l'appliquant à un nombre quelconque x.

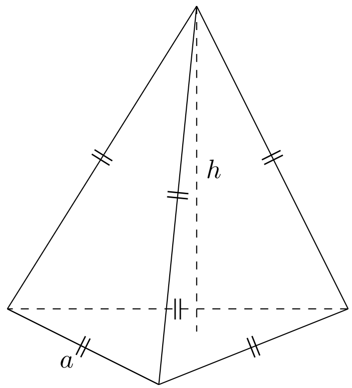
	x	A	B	C	D
mettre x à réponse	x				
mettre A à x - 8	x	$x-8$			
mettre B à A * 3	x	$x-8$	$(x-8)\times 3$		
mettre C à B + 24	x	$x-8$	$(x-8)\times 3$	$(x-8)*3+24$	
mettre D à C + x	x	$x-8$	$(x-8)\times 3$	$(x-8)*3+24$	$[(x-8)*3+24]+x$
montrer la variable D					$4x$

Il faut compléter la 4e ligne par : $4 * x$.

Exercice 4.

Dounia et Yanis ont acheté un coffret contenant des sachets de thé. Ces sachets ont une forme que l'on peut modéliser par un tétraèdre régulier.

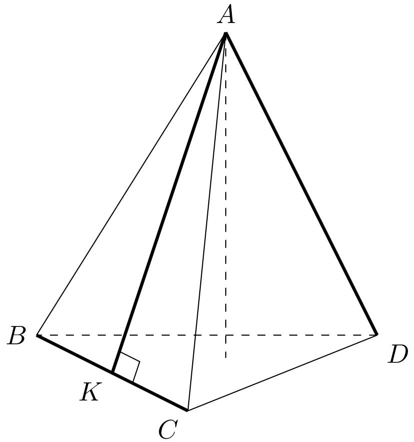
On rappelle qu'un tétraèdre régulier est une pyramide dont les 3 faces latérales et la base sont des triangles équilatéraux.



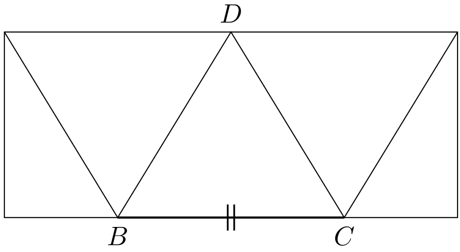
De plus, on rappelle que, pour un tétraèdre régulier ayant ses côtés de longueur notée a :

- la hauteur h correspondant à la base d'aire A_{Base} est donnée par la formule $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$,
- le volume V est donné par la formule $V = \dfrac{A_{\text{Base}} \times h}{3}$.

1. Le sachet de thé de Yanis a la forme d'un tétraèdre régulier $ABCD$ de côté 5,5 cm et est fabriqué en gaze de papier. On note K le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



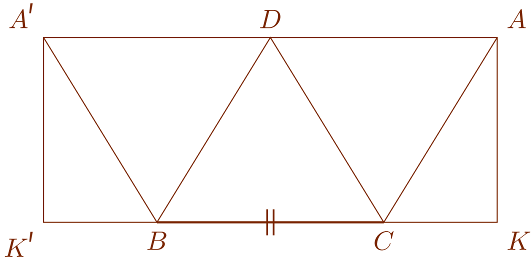
Yanis remarque que seuls trois « bords » sont collés (en gras sur le dessin : $[AK]$, $[BC]$ et $[AD]$). Il découpe la gaze le long de ces segments $[AD]$, $[AK]$, et $[BC]$, puis il met à plat. Il obtient un rectangle.



Ce dessin n'est pas à l'échelle.

(a) Déterminer les dimensions de ce rectangle.

déterminons $A'A$ et KA.



* $A'A = 2AD = 2a = 2 \times 5{,}5$ cm.

$$\boxed{AA' = 11 \text{ cm.}}$$

* Le triangle AKC est rectangle en K donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = CK^2 + KA^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + KA^2$$
$$a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + KA^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$a^2 - \frac{a^2}{2^2} = KA^2$$
$$a^2 - \frac{1}{4}a^2 = KA^2$$
$$\frac{3}{4}a^2 = KA^2$$

Puisque KA est une longueur nous en déduisons :

$$\sqrt{\frac{3}{4}a^2} = KA$$
$$\sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{a^2} = AK$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = KA$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 5{,}5 \text{ cm}$$

$$\boxed{KA = \tfrac{11}{4}\sqrt{3} \text{ cm.}}$$

(b) Calculer le volume du sachet de thé de Yanis. On donnera une valeur arrondie au dixième de centimètre cube.

Calculons le volume V du tétraèdre formé par le sachet de thé.

* Commençons par déterminer l'aire A_{base} d'une base du tétraèdre. Les faces du tétraèdre sont des triangles équilatéraux. Considérons pat exemple ABC.Puisque K est le pied de la hauteur issue de A :

$$A_{\text{base}} = \frac{1}{2} \times BC \times AK$$

Or $BC = a$ par construction et $AK = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, d'après la question précédente, donc

$$\begin{aligned} A_{\text{base}} &= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \end{aligned}$$

* Calculons maintenant V.
  D'après l'énoncé

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times h \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \frac{a\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times a^2 \times a \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \times (5{,}5 \text{ cm})^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \times 5{,}5^3 \text{ cm}^3 \\ &\approx 19{,}6074 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{A_{\text{base}} \approx 58{,}8 \text{ cm}^3.}$$

2. La marque pense proposer des sachets « grand format », présentés aussi sous la forme d'un tétraèdre régulier, mais d'un volume au moins deux fois plus grand que le sachet de thé choisi par Yanis.
   Dounia pense qu'en multipliant par 1,3 les longueurs des côtés du tétraèdre $ABCD$, les conditions de la marque pour obtenir un sachet « grand format » seront satisfaites.
   Justifier l'affirmation de Dounia.

   Au cours de la question précédente nous avons établi que $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, donc si la longueur de l'arête est multipliée par 1,3 le volume devient

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\,(1{,}3a)^3$$
$$= 1{,}3^3 \times \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$
$$= 2{,}197 \times \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

Le volume est multiplié par un peu plus de deux.

III Troisième partie (14 points).

Cette partie est composée de quatre situations indépendantes.

Situation 1.

Le problème suivant a été proposé à une classe de CP au mois de juin.

« À la récréation, Léo joue aux billes. Au début de la partie il possède 12 billes. Il gagne 9 billes. Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ? »

Voici quatre productions d'élèves :

Léane

A la récréation, Léo joue aux billes.

Au début de la partie il possède 12 billes.

Il gagne 9 billes.

Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ?

Il y a 21 billes.

Enzo

A la récréation, Léo joue aux billes.

Au début de la partie il possède 12 billes.

Il gagne 9 billes.

Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ?

12 + 9 = 21

Il y a 21 billes

Zélie

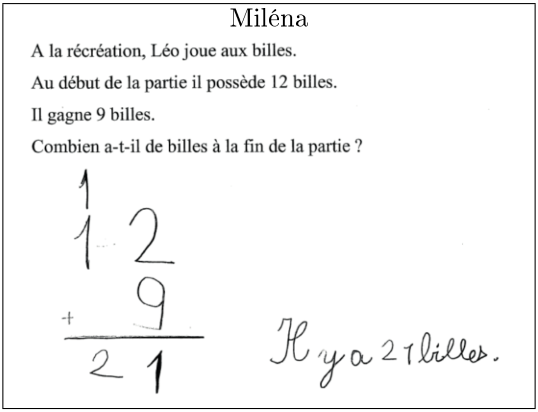
A la récréation, Léo joue aux billes.

Au début de la partie il possède 12 billes.

Il gagne 9 billes.

Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ?

Il y a 21 billes.


Miléna

A la récréation, Léo joue aux billes.

Au début de la partie il possède 12 billes.

Il gagne 9 billes.

Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ?

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 12 \\ +\ \ 9 \\ \hline 21 \end{array}$$

Il y a 21 billes.

1. Pour les productions de Léanne, Zélie et Miléna, indiquer les procédures probablement utilisées.
2. La production d'Enzo permet-elle d'évaluer la maîtrise d'une procédure relevant du calcul ? Justifier la réponse.

Situation 2.

1. Analyser les procédures mises en œuvre pour chacun des élèves de cycle 2 pour effectuer le calcul en ligne 29 + 47.

   Élève A

   29 + 47 = 29 + 1 + 46 = 30 + 46 = 76.

   Élève B

   29 + 47 = 60 + 16 = 76.

   Élève C

   29 + 47 = 69 + 7 = 76.

2. Un élève de cycle 3 a écrit les opérations en ligne suivantes :

   $96 + 53 + 4 = 96 + 4 + 53 = 100 + 53 = 153.$ (ligne a)

   $14 \times 5 = 7 \times 2 \times 5 = 7 \times 10 = 70$ (ligne b)

   $6 \times 12 = 6 \times 10 + 2 \times 10 = 60 + 12 = 72$ (ligne c)

   Pour chaque ligne, quelle(s) propriété(s) des opérations est/sont mise(s) en œuvre par l'élève dans la procédure de calcul ?

Situation 3.

Un enseignant propose le problème suivant à ses élèves de cycle 3 :

> « Sur une table, il y a un livre ouvert. Si j'ajoute le nombre indiquant le numéro de la page gauche avec celui qui indique le numéro de la page de droite, je trouve 129. À quelles pages le livre est-il ouvert ? »

Source : Circonscription de Metz Nord - http://www4.ac-nancy-metz.fr/ien57metznord/spip.php?article205

Proposer deux procédures que peuvent mettre en œuvre des élèves pour résoudre ce problème.

Situation 4.

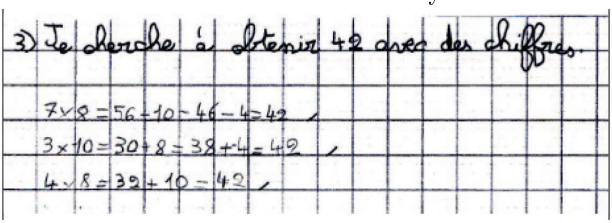
Dans une classe de CM2 un professeur propose de jouer au « Compte est bon » :

> Il s'agit d'obtenir 42 en faisant des opérations avec les nombres :
>
> 8 4 7 10 3.
>
> Ceux-ci ne sont utilisés qu'une fois et sans que l'on soit obligé de tous les utiliser.

(Source : 40 problèmes ouverts, Circonscription de Metz Nord - http://www4.ac-nancy-metz.fr/ien57metznord/spip.php?article205)

On considère les productions de quatre élèves de la classe :

Production de Jérémy



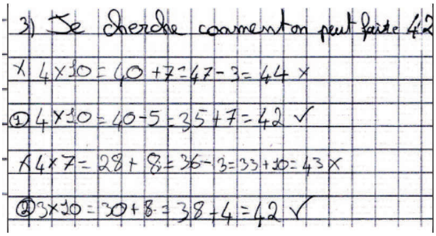
3) Je cherche à obtenir 42 avec des chiffres.

7×8 = 56 − 10 = 46 − 4 = 42

3×10 = 30 + 8 = 38 + 4 = 42

4×8 = 32 + 10 = 42

Production de Coline



3) Je cherche comment on peut faire 42

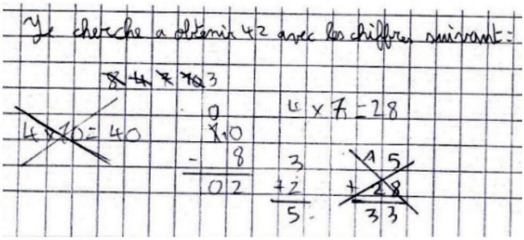
4×10 = 40 + 7 = 47 − 3 = 44 ×

1 4×10 = 40 − 5 = 35 + 7 = 42 ✓

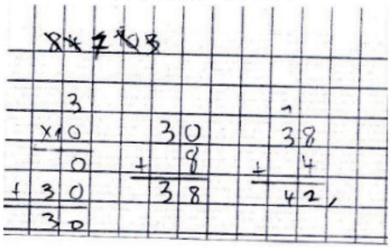
4×7 = 28 + 8 = 36 − 3 = 33 + 10 = 43 ×

2 3×10 = 30 + 8 = 38 + 4 = 42 ✓

Production de Swan



Production de Zoé



1. Analyser les stratégies et repérer les réussites et les éventuelles erreurs de chacun des élèves.

2. Dans les programmes de mathématiques pour le cycle 3, apparaissent les six « compétences travaillées » en mathématiques suivantes : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

   Quelles sont les compétences particulièrement travaillées au cours de cette séance d'apprentissage ? Justifier.