Épreuve de mathématiques CRPE 2017 groupe 3.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Partie A : étude d'une crue de la Vienne.

1. La hauteur maximale de la Vienne à Chinon est de 5 m.
2. Le niveau a été supérieur à 5,7 m pendant 48 h.
3. (a) 18 h se sont écoulées entre le pic dans les deux villes.

   (b) Le pic étant à Nouâtre avant d'atteindre Chinon, nous pouvons affirmer que Nouâtre est plus en amont que Chinon.

Partie B : précipitations et récupérateur d'eau.

1. (a) Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ d'eau tombée sur le toit.

   Le toit étant rectangulaire sa surface est de

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_1 &= 4 \times 6{,}2 \\ &= 24{,}8\end{aligned}$$

   Puisque la hauteur de précipitations est de 0,0317 m, le volume d'eau tombée sur le toit est donc

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= 0{,}0317 \times \mathscr{S}_1 \\ &= 0{,}78616\end{aligned}$$

   Ainsi $\mathscr{V}_1 = 0{,}78616\ \text{m}^3$. Et puisque $1\ \text{m}^3 = 1\,000$ L, $\mathscr{V}_1 = 786{,}16$ L. Finalement

   Le volume tombé sur la toiture est approximativement de 790 L.

(b) Calculons le volume d'eau, $\mathscr{V}_2$, réellement recueilli.

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \frac{90}{100} \times \mathscr{V}_1 \\ &= \frac{90}{100} \times 786{,}16 \\ &= 707{,}544\end{aligned}$$

Le volume d'eau réellement recueilli est 707,544 L.

(c) Déterminons le volume $\mathscr{V}_3$ de la citerne.

La citerne est formée de demi-sphère et d'un cylindre donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_3 &= 2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) + (\pi R^2 h) \\ &= 2 \times \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1{,}24}{2}\right)^3\right] + \left[\pi\left(\frac{1{,}24}{2}\right)^2 1{,}66\right] \\ &\approx 3{,}0029688\end{aligned}$$

Donc

le volume de la citerne en litres est approximativement de 3 003 L.

$\frac{708}{3003} \approx 0{,}2358 < 0{,}25 = \frac{1}{4}$

Moins d'un quart de la citerne a été rempli.

2. (a) Déterminons le pourcentage d'augmentation.

$$\begin{aligned}t &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \\ &= \frac{121{,}1 - 46{,}6}{46{,}6} \times 100 \\ &\approx 159{,}87\end{aligned}$$

Les précipitations ont augmentées de 159,87 %.

(b)

	oct. 2015	nov. 2015	déc 2015	janv. 2016	fév 2016	mars 2016	avr. 2016	mai 2016
Cumul Précipitations en mm	26,0	43,9	18,8	77,9	84,3	85,4	33,9	121,1
E.C.C.	26,0	69,9	88,7	166,6	250,9	336,3	370,2	491,3

Partie C : péniche et pont.

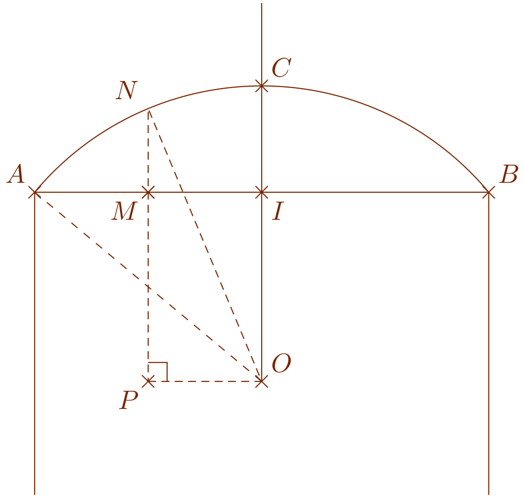
1. Déterminons OA.

   Puisque (CO) est l'axe de symétrie de la figure, AIO est rectangle en I.
   Donc, d'après le théorème de Pythagore : $AO^2 = OI^2 + IA^2$.
   Ce qui équivaut successivement à :

$$
\begin{aligned}
OA^2 &= (OA - IC)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\
OA^2 &= (OA - 5)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2 \\
OA^2 &= OA^2 - 2 \times OA \times 5 + 5^2 + 12^2 \\
OA^2 &= OA^2 - 10 \cdot OA + 169 \\
OA^2 &= OA^2 - 2 \times OA \times 5 + 5^2 + 12^2 \\
OA^2 - OA^2 &= OA^2 - 10 \cdot OA + 169 - OA^2 \\
0 &= -10 \cdot OA + 169 \\
0 10 \cdot OA &= -10 \cdot OA + 169 10 \cdot OA \\
10 \cdot OA &= 169 \\
\frac{10 \cdot OA}{10} &= \frac{169}{10} \\
OA &= 16{,}9
\end{aligned}
$$

$OA = 16{,}9$ m

2. Notons M le point appartenant à $[AI]$ tel que $MI = 6$, N le point de l'arche du pont situé à la verticale de M et P le point de $[NM)$ tel que ONP soit un triangle rectangle en P.



Déterminons MN.

NOP est un triangle rectangle en P donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$NP^2 + PO^2 = ON^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} NP^2 &= OA^2 - 6^2 \\ &= 16{,}9^2 - 6^2 \end{aligned}$$

NP étant une longueur donc positive :

$$\begin{aligned} NP &= \sqrt{16{,}9^2 - 6^2} \\ &= \sqrt{249{,}61} \end{aligned}$$

Nous en déduisons la hauteur

$$\begin{aligned} MN &= NP - PM \\ &= NP - OI \\ &= \sqrt{249{,}61} - (OA - CI) \\ &= \sqrt{249{,}61} - (16{,}9 - 5) \\ &= \sqrt{249{,}61} - 11{,}9 \\ &\approx 3{,}899 \end{aligned}$$

La péniche ne pourra pas passer sous l'arche sans dommage.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Pour déterminer le nombre de fois que la série de 6 perles a été répétée procédons à une division euclidienne.

$$\begin{aligned} 147 &= 6 \times 24 + 3 \\ &= 6 \times 24 + 1 + 2 \end{aligned}$$

Par conséquent la 147$^{\text{ème}}$ perle est rouge

L'affirmation est vraie.

2. 30 % du prix initial représente 48 €. Par conséquent le prix initial de l'article est $\frac{48}{30} \times 100$.
Et puisque le prix après réduction représente $100 - 30 = 70$ % du prix initial, le prix final est

$$\frac{48}{30} \times 100 \times \frac{70}{100} = 112$$

L'affirmation est vraie.

3. La durée de la marche, en heures, est $\frac{12}{6} + \frac{12}{4} = 5$. Par conséquent la vitesse moyenne est, en kilomètres par heure, $\frac{24}{5} = 4{,}8$.

   L'affirmation est fausse.

4. Tous les losanges, et pas uniquement les carrés, correspondent à cette description.

   L'affirmation est fausse.

Exercice 2.

1. (a) Calculons la probabilité d'obtenir 3 avec le dé à 6 faces.

   Dans le cas du dé à 6 faces l'univers est $\Omega_1 = \{\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\ \}$ et la loi de probabilité, $\mathbb{P}_1$, est l'équiprobabilité (probabilité uniforme discrète) puisque le dé est parfaitement équilibré.

   Il y a équiprobabilité, $\{3\}$ est un événement réalisé par une issue, l'univers comporte 6 issues, donc

$$\mathbb{P}_1(\{3\}) = \frac{1}{6}.$$

   Calculons la probabilité d'obtenir 3 avec le dé à 4 faces.

   Dans le cas du dé à 4 faces l'univers est $\Omega_2 = \{\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\ \}$ et la loi de probabilité, $\mathbb{P}_2$, est l'équiprobabilité (probabilité uniforme discrète) puisque le dé est parfaitement équilibré.

   Il y a équiprobabilité, $\{3\}$ est un événement réalisé par une issue, l'univers comporte 4 issues, donc

$$\mathbb{P}_2(\{3\}) = \frac{1}{4}.$$

   C'est avec le dé tétraédrique que la probabilité d'obtenir 3 est la plus grande.

(b) Notons A : « obtenir un multiple de 3 ».

Calculons $\mathbb{P}_1(A)$.

$A = \{\ 3;\ 6\ \}$.
Il y a équiprobabilité, A est réalisé par 2 issues, l'univers comporte 6 issues, donc

$$\mathbb{P}_1(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Calculons $\mathbb{P}_2(A)$.

$A = \{\ 3\ \}$, donc, d'après la question précédente $\mathbb{P}_2(A) = \frac{1}{4}$.

La probabilité d'obtenir un multiple de 3 est plus grande avec le dé à 6 faces.

(c) Pour modéliser cette nouvelle situation, considérons

$$\Omega_3 = \{\ (1;1);\ (1;2);\ \ldots;\ (4;6)\ \}$$

l'univers formé des couples composés du nombre obtenu avec le dé à 4 faces puis du nombre obtenu avec le dé à 6 faces.
Nous pouvons représenter cet univers sous forme d'un tableau double entrée :

	1	2	3	4	5	6
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$		
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$			
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$			

Les lancers de dés étant indépendants et les dés étant parfaitement équilibrés nous choisissons l'équiprobabilité, $\mathbb{P}_3$, pour modéliser cette situation.

Notons B : « obtenir avec le dé à 4 faces un nombre supérieur à celui obtenu avec le dé à 6 faces ». Je choisis de comprendre le terme « supérieur » dans son acception usuelle, *i.e.* au sens de « strictement supérieur à ».

Calculons $\mathbb{P}_3(B)$.

$B = \{\ (2;1);\ (3;1);\ (3;2);\ (4;1);\ (4;2);\ (4;3);\ \}$.

Il y a équiprobabilité, B est réalisé par 6 issues et l'univers comporte $4 \times 6 = 24$ issues donc

$$\mathbb{P}_3(B) = \frac{6}{24}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}_3(B) = \tfrac{1}{4}.}$$

2. (a) Conservons la modélisation de la question précédente. Notons C : « la somme est paire ».

Les sommes possibles sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Calculons $\mathbb{P}_3(C)$.

$C = \{\ (1;1);\ (1;3);\ (1;5);\ (2;2);\ (2;4);\ (2;6);\ (3;1);\ (3;3);\ (3;5);\ (4;2);\ (4;4);\ (4;6);\ \}$.

Il y a équiprobabilité, C est réalisé par 12 issues et l'univers comporte 24 issues donc

$$\mathbb{P}_3(C) = \frac{12}{24}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}_3(C) = \tfrac{1}{2}.}$$

(b) Conservons la modélisation de la question précédente. Notons D : « la somme est strictement supérieure à 3 ».

Calculons $\mathbb{P}_3(D)$.

$\overline{D} = \{\ (1;1);\ (1;2);\ (2;1)\ \}$.

Il y a équiprobabilité, $\overline{D}$ est réalisé par 3 issues et l'univers comporte 24 issues donc

$$\mathbb{P}_3(\overline{D}) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

Or $\mathbb{P}_3(D) = 1 - \mathbb{P}_3(D) = 1 - \frac{1}{8}$, donc

$$\mathbb{P}_3(D) = \frac{7}{8}.$$

Exercice 3.

1. $3 \times 5 + 7 = 22$.
   Puisque $22 \neq 40$

   le message affiché sera « Et non ... encore! ».

2. Déterminons le nombre mystère.

   Notons x le nombre mystère. D'après le programme x vérifie

   $$3x + 7 = 40$$

   Or cette équation équivaut successivement à

   $$\begin{aligned} 3x + 7 - 7 &= 40 - 7 \\ 3x &= 33 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{33}{3} \\ x &= 11 \end{aligned}$$

   Il n' y a donc qu'une seule possibilité :

   le nombre mystère est 11.

Exercice 4.

1. Déterminons le débit.

   $$\begin{aligned} D &= \frac{V}{3T} \\ &= \frac{1{,}5 \cdot 10^3}{3 \times 24} \\ &= \frac{125}{6} \\ &= 20{,}8333\ldots \end{aligned}$$

La perfusion doit être réglée à 21 gouttes par minute.

2. Déterminons le volume de liquide perfusé.

$$D = \frac{V}{3T}$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
6 &= \frac{V}{3 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right)} \\
6 &= \frac{V}{\frac{15}{4}} \\
6 \times \frac{15}{4} &= \frac{V}{\frac{15}{4}} \times \frac{15}{4} \\
22{,}5 &= V
\end{aligned}$$

Le volume transféré sera de 22,5 millilitres.

3. Déterminons la durée de la perfusion.

$$D = \frac{V}{3T}$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
8 &= \frac{250}{3T} \\
8\times T &= \frac{250}{3T}\times T, \quad \text{car } T \neq 0 \\
8T &= \frac{250}{3} \\
\frac{8T}{8} &= \frac{\frac{250}{3}}{8} \\
T &= \frac{125}{12} \\
T &= 10 + \frac{5}{12} \\
T &= 10 + \frac{5\times 5}{12\times 5} \\
T &= 10 + \frac{25}{60}
\end{aligned}$$

La perfusion durera 10 heures et 25 minutes.