Épreuve de mathématiques CRPE 2017 groupe 3.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

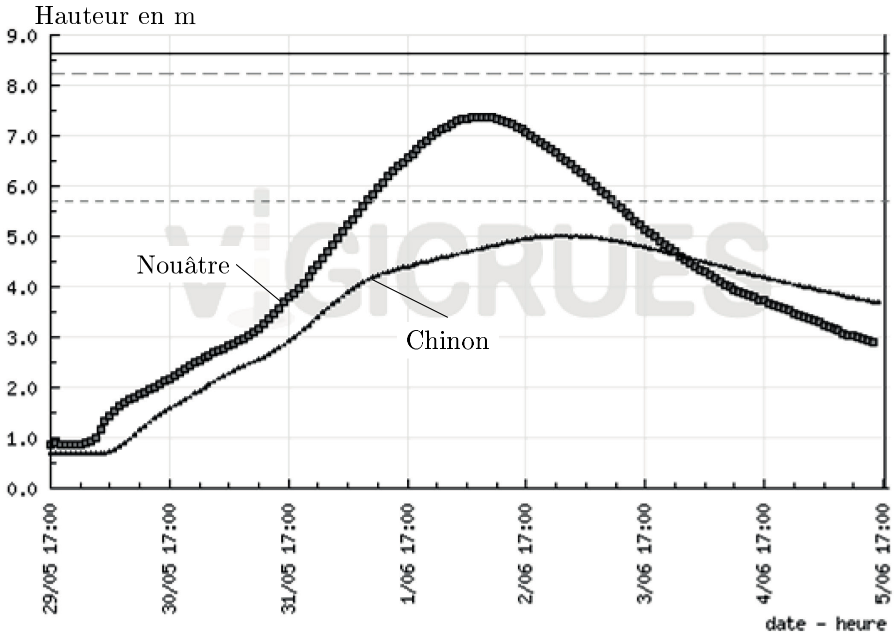
Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée 4 heures (partie 3 incluse).
L'usage de la calculatrice est autorisé.

I Première partie (13 points).

La fin mai 2016 a été marquée par un passage fortement pluvieux avec des cumuls de pluie exceptionnels dans certaines régions françaises, provoquant crues et inondations.

Partie A : étude d'une crue de la Vienne.



Crues marquantes - Station Nouâtre	
------	Crue du 18/12/2012 : 5,7 m
- - - -	Crue du 03/03/2007 : 8,23 m
———	Crue du 08/01/1982 : 8,62 m

À l'aide du graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes.

1. Quelle hauteur maximale la Vienne a-t-elle atteinte à Chinon entre le 29 mai 2016 à 17 h et le 5 juin 2016 à 17 h.

   La hauteur maximale de la Vienne à Chinon est de 5 m.

2. À Nouâtre, entre le 29 mai 2016 à 17 h et le 5 juin 2016 à 17 h, pendant combien de temps le niveau de l'eau a-t-il été supérieur au niveau maximum de la crue du 18 décembre 2012 ? Donner la réponse en heures.

   Le niveau a été supérieur à 5,7 m pendant 48 h.

3. (a) Combien d'heures se sont écoulées ente le pic de la crue de Nouâtre et celui de Chinon ?

18 h se sont écoulées entre le pic dans les deux villes.

(b) De Nouâtre ou de Chinon, quelle station est située le plus en amont de la rivière ? Justifier la réponse.

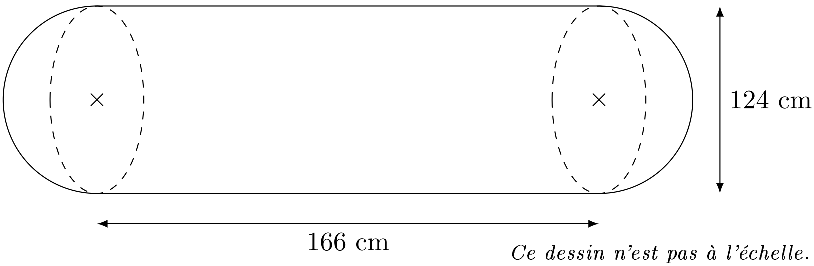
Le pic étant à Nouâtre avant d'atteindre Chinon, nous pouvons affirmer que Nouâtre est plus en amont que Chinon.

Partie B : précipitations et récupérateur d'eau.

Un habitant de Poitiers utilise la toiture de son garage pour recueillir de l'eau pluie et la stocker dans une cuve enterrée.

Vue du ciel, la toiture à la forme d'un rectangle de 4 mètres sur 6,2 mètres.

La cuve est constituée de deux demi-sphères de 124 cm de diamètre et d'un cylindre de révolution de diamètre 124 cm et de longueur 166 cm.



Ce dessin n'est pas à l'échelle.

1. Le dimanche 29 mai 2016, il a été relevé une hauteur de 31,7 mm de précipitations à Poitiers (*Source : Info Climat*).

(a) Vérifier que le volume d'eau, en litre, tombé sur la toiture de la grange ce jour là est environ 790 L.

Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ d'eau tombée sur le toit.

Le toit étant rectangulaire sa surface est de

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_1 &= 4 \times 6{,}2\\ &= 24{,}8\end{aligned}$$

Puisque la hauteur de précipitations est de 0,0317 m, le volume d'eau tombée sur le toit est donc

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= 0{,}0317 \times \mathscr{S}_1\\ &= 0{,}78616\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{V}_1 = 0{,}78616$ m^3. Et puisque 1 m$^3 = 1\,000$ L, $\mathscr{V}_1 = 786{,}16$ L.
Finalement

Le volume tombé sur la toiture est approximativement de 790 L.

(b) Sachant que 90 % de pluie tombée sur le toit du garage est récupérée dans la cuve, calculer le volume d'eau, en litre, réellement recueilli dans le réservoir ce jour là.

Calculons le volume d'eau, $\mathscr{V}_2$, réellement recueilli.

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \frac{90}{100} \times \mathscr{V}_1\\ &= \frac{90}{100} \times 786{,}16\\ &= 707{,}544\end{aligned}$$

Le volume d'eau réellement recueilli est 707,544 L.

(c) Est-il vrai que, ce jour là, un peu moins d'un quart de la citerne a été rempli ? On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est donné par la formule $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ et le volume d'un cylindre de révolution de hauteur h et dont la base a pour rayon R est $V = \pi R^2 h$.

Déterminons le volume $\mathscr{V}_3$ de la citerne.

La citerne est formée de demi-sphère et d'un cylindre donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_3 &= 2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) + (\pi R^2 h)\\ &= 2 \times \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1{,}24}{2}\right)^3\right] + \left[\pi\left(\frac{1{,}24}{2}\right)^2 1{,}66\right]\\ &\approx 3{,}0029688\end{aligned}$$

Donc

le volume de la citerne en litres est approximativement de 3 003 L.

$\frac{708}{3003} \approx 0{,}2358 < 0{,}25 = \frac{1}{4}$

Moins d'un quart de la citerne a été rempli.

2. Le tableau suivant donne la hauteur des précipitations relevée mensuellement à Poitiers entre le 1er janvier 2015 et le 31 mai 2016. (*Source : Info Climat*).

	janv. 2015	fév. 2015	mars 2015	avr. 2015	mai 2015	juin 2015	juil. 2015	août 2015	sept. 2015
Cumul Précipitations en mm	50,1	59,7	31,2	43,5	46,6	94,4	14,4	151,6	83,6

	oct. 2015	nov. 2015	déc 2015	janv. 2016	fév 2016	mars 2016	avr. 2016	mai 2016
Cumul Précipitations en mm	26,0	43,9	18,8	77,9	84,3	85,4	33,9	121,1

(a) Calculer le pourcentage d'augmentation des précipitations entre le mois de mai 2015 et le mois de mai 2016.

Déterminons le pourcentage d'augmentation.

$$\begin{aligned} t &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \\ &= \frac{121{,}1 - 46{,}6}{46{,}6} \times 100 \\ &\approx 159{,}87 \end{aligned}$$

Les précipitations ont augmentées de 159,87 %.

(b) En supposant que la cuve soit vide à la fin du mois de septembre 2015. Quand sera-t-elle à nouveau pleine si le propriétaire n'utilise pas d'eau entre temps ? On rappelle que 90 % de la pluviométrie est récupérée dans la cuve.

	oct. 2015	nov. 2015	déc 2015	janv. 2016	fév 2016	mars 2016	avr. 2016	mai 2016
Cumul Précipitations en mm	26,0	43,9	18,8	77,9	84,3	85,4	33,9	121,1
E.C.C.	26,0	69,9	88,7	166,6	250,9	336,3	370,2	491,3

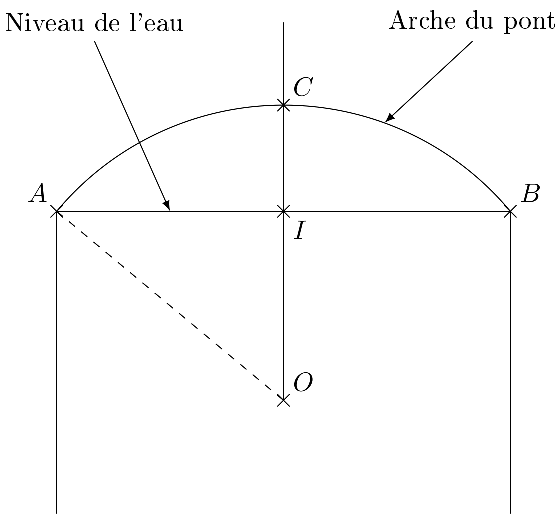
Partie C : péniche et pont.

Un pont a une arche en forme d'arc de cercle.

Lors d'une crue, l'eau atteint les sommets A et B des piliers du pont.

La hauteur maximale IC entre le niveau de l'eau et le sommet de l'arche est alors de 5 mètres. L'écartement AB entre les deux piliers du pont est de 24 mètres.

La situation est modélisée par le schéma suivant, qui n'est pas à l'échelle, sur lequel O est le centre de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et (CO) est l'axe de symétrie de la figure.



1. Montrer que le rayon OA de l'arche est 16,9 m.

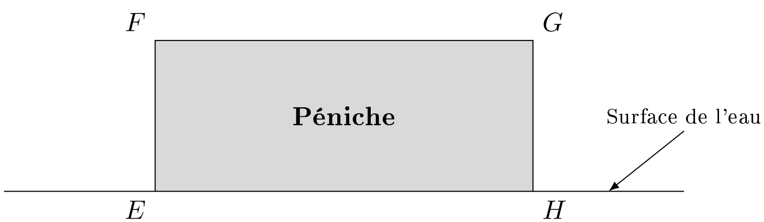
Déterminons OA.

Puisque (CO) est l'axe de symétrie de la figure, AIO est rectangle en I.
Donc, d'après le théorème de Pythagore : $AO^2 = OI^2 + IA^2$.
Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
OA^2 &= (OA - IC)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\
OA^2 &= (OA - 5)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2 \\
OA^2 &= OA^2 - 2 \times OA \times 5 + 5^2 + 12^2 \\
OA^2 &= OA^2 - 10 \cdot OA + 169 \\
OA^2 &= OA^2 - 2 \times OA \times 5 + 5^2 + 12^2 \\
OA^2 - OA^2 &= OA^2 - 10 \cdot OA + 169 - OA^2 \\
0 &= -10 \cdot OA + 169 \\
010 \cdot OA &= -10 \cdot OA + 16910 \cdot OA \\
10 \cdot OA &= 169 \\
\frac{10 \cdot OA}{10} &= \frac{169}{10} \\
OA &= 16{,}9
\end{aligned}$$

$$\boxed{OA = 16{,}9 \text{ m}}$$

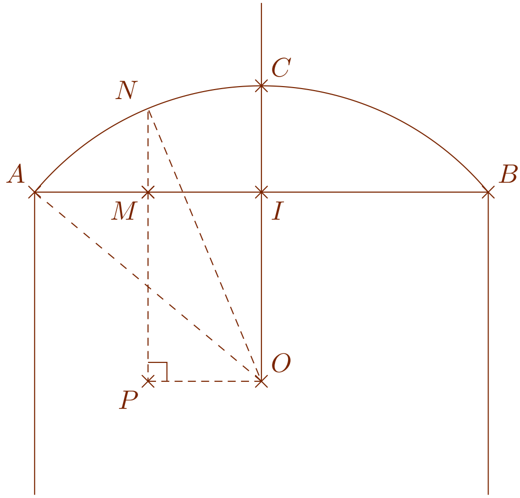
On assimile la coupe de la partie émergée d'une péniche, vue de face, à un rectangle de 4 mètres de haut et de 12 mètres de large.



La situation est modélisée par le schéma ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle sur lequel on a $EH = 12$ m et $FE = 4$ m.

2. Cette péniche peut-elle passer sous l'arche du pont sans dommages ? Justifier.

   Notons M le point appartenant à $[AI]$ tel que $MI = 6$, N le point de l'arche du pont situé à la verticale de M et P le point de $[NM)$ tel que ONP soit un triangle rectangle en P.



   Déterminons MN.

   NOP est un triangle rectangle en P donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$NP^2 + PO^2 = ON^2$$

   Donc :

$$\begin{aligned} NP^2 &= OA^2 - 6^2 \\ &= 16{,}9^2 - 6^2 \end{aligned}$$

   NP étant une longueur donc positive :

$$\begin{aligned} NP &= \sqrt{16{,}9^2 - 6^2} \\ &= \sqrt{249{,}61} \end{aligned}$$

   Nous en déduisons la hauteur

$$\begin{aligned}
MN &= NP - PM \\
&= NP - OI \\
&= \sqrt{249{,}61} - (OA - CI) \\
&= \sqrt{249{,}61} - (16{,}9 - 5) \\
&= \sqrt{249{,}61} - 11{,}9 \\
&\approx 3{,}899
\end{aligned}$$

La péniche ne pourra pas passer sous l'arche sans dommage.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse fausse n'enlève pas de points, une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Pour réaliser un collier de perles, Camille enfile 200 perles en répétant le modèle suivant : une perle jaune, puis trois perles rouges, puis deux perles blanches.
   Affirmation : la couleur de la 147$^{\text{ème}}$ perle sera roue.

   Pour déterminer le nombre de fois que la série de 6 perles a été répétée procédons à une division euclidienne.

$$\begin{aligned}
147 &= 6 \times 24 + 3 \\
&= 6 \times 24 + 1 + 2
\end{aligned}$$

   Par conséquent la 147$^{\text{ème}}$ perle est rouge

   L'affirmation est vraie.

2. Arthur a acheté un article bénéficiant d'une réduction de 30 % et a ainsi économisé 48 €.
   Affirmation : au final, il a payé 112 € pour cet article.

   30 % du prix initial représente 48 €. Par conséquent le prix initial de l'article est $\frac{48}{30} \times 100$.
   Et puisque le prix après réduction représente $100 - 30 = 70$ % du prix initial, le prix final est
   $$\frac{48}{30} \times 100 \times \frac{70}{100} = 112$$

   L'affirmation est vraie.

3. Un randonneur marche pendant 12 km à 6 km/h puis il marche pendant 12 km à 4 km/h.
   Affirmation : pour les 24 km de randonnée, sa vitesse moyenne est de 5 km/h.

   La durée de la marche, en heures, est $\frac{12}{6} + \frac{12}{4} = 5$. Par conséquent la vitesse moyenne est, en kilomètres par heure, $\frac{24}{5} = 4{,}8$.

   L'affirmation est fausse.

4. $ABCD$ est un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires et de même milieu.
   Affirmation : $ABCD$ est un carré.

   Tous les losanges, et pas uniquement les carrés, correspondent à cette description.

   L'affirmation est fausse.

Exercice 2.

Dans cet exercice, les réponses seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

On dispose d'un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 et d'un dé tétraédrique à 4 faces avec des sommets numérotés de 1 à 4 comme sur la photo ci-dessous, parfaitement équilibrés.

On lance les deux dés et on note le nombre lisible sur la face supérieure du dé à 6 faces et le nombre lisible sur le sommet supérieur du dé à 4 faces.

1. (a) Avec quel dé la probabilité d'obtenir 3 est-elle la plus grande ?

Calculons la probabilité d'obtenir 3 avec le dé à 6 faces.

Dans le cas du dé à 6 faces l'univers est $\Omega_1 = \{\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\ \}$ et la loi de probabilité, $\mathbb{P}_1$, est l'équiprobabilité (probabilité uniforme discrète) puisque le dé est parfaitement équilibré.

Il y a équiprobabilité, $\{3\}$ est un événement réalisé par une issue, l'univers comporte 6 issues, donc

$$\mathbb{P}_1(\{3\}) = \frac{1}{6}.$$

Calculons la probabilité d'obtenir 3 avec le dé à 4 faces.

Dans le cas du dé à 4 faces l'univers est $\Omega_2 = \{\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\ \}$ et la loi de probabilité, $\mathbb{P}_2$, est l'équiprobabilité (probabilité uniforme discrète) puisque le dé est parfaitement équilibré.

Il y a équiprobabilité, $\{3\}$ est un événement réalisé par une issue, l'univers comporte 4 issues, donc

$$\mathbb{P}_2(\{3\}) = \frac{1}{4}.$$

C'est avec le dé tétraédrique que la probabilité d'obtenir 3 est la plus grande.

(b) Avec quel dé la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est-elle la plus grande ?

Notons A : « obtenir un multiple de 3 ».

Calculons $\mathbb{P}_1(A)$.

$A = \{\ 3;\ 6\ \}$.
Il y a équiprobabilité, A est réalisé par 2 issues, l'univers comporte 6 issues, donc

$$\mathbb{P}_1(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Calculons $\mathbb{P}_2(A)$.

$A = \{\ 3\ \}$, donc, d'après la question précédente $\mathbb{P}_2(A) = \frac{1}{4}$.

La probabilité d'obtenir un multiple de 3 est plus grande avec le dé à 6 faces.

(c) Quelle est la probabilité d'obtenir avec le dé à 4 faces un nombre supérieur ou égale au nombre obtenu avec le dé à 6 faces ?

Pour modéliser cette nouvelle situation, considérons

$$\Omega_3 = \{\ (1;1);\ (1;2);\ \dots;\ (4;6)\ \}$$

l'univers formé des couples composés du nombre obtenu avec le dé à 4 faces puis du nombre obtenu avec le dé à 6 faces.
Nous pouvons représenter cet univers sous forme d'un tableau double entrée :

	1	2	3	4	5	6
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$		
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$			
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$			

Les lancers de dés étant indépendants et les dés étant parfaitement équilibrés nous choisissons l'équiprobabilité, $\mathbb{P}_3$, pour modéliser cette situation.

Notons B : « obtenir avec le dé à 4 faces un nombre supérieur à celui obtenu avec le dé à 6 faces ». Je choisis de comprendre le terme « supérieur » dans son acception usuelle, *i.e.* au sens de « strictement supérieur à ».

Calculons $\mathbb{P}_3(B)$.

$B = \{\ (2;1);\ (3;1);\ (3;2);\ (4;1);\ (4;2);\ (4;3);\ \}$.

Il y a équiprobabilité, B est réalisé par 6 issues et l'univers comporte $4 \times 6 = 24$ issues donc

$$\mathbb{P}_3(B) = \frac{6}{24}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}_3(B) = \tfrac{1}{4}.}$$

2. On calcule la somme des nombres obtenus avec chacun des deux dés.

   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme paire ?

   Conservons la modélisation de la question précédente. Notons C : « la somme est paire ».
   Les sommes possibles sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

   Calculons $\mathbb{P}_3(C)$.

   $C = \{\ (1;1);\ (1;3);\ (1;5);\ (2;2);\ (2;4);\ (2;6);\ (3;1);\ (3;3);\ (3;5);\ (4;2);\ (4;4);\ (4;6);\ \}$.
   Il y a équiprobabilité, C est réalisé par 12 issues et l'univers comporte 24 issues donc

$$\mathbb{P}_3(C) = \frac{12}{24}.$$

   Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}_3(C) = \tfrac{1}{2}.}$$

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme strictement supérieure à 3 ?

   Conservons la modélisation de la question précédente. Notons D : « la somme est strictement supérieure à 3 ».

   Calculons $\mathbb{P}_3(D)$.

   $\overline{D} = \{\ (1;1);\ (1;2);\ (2;1)\ \}$.

Il y a équiprobabilité, $\overline{D}$ est réalisé par 3 issues et l'univers comporte 24 issues donc

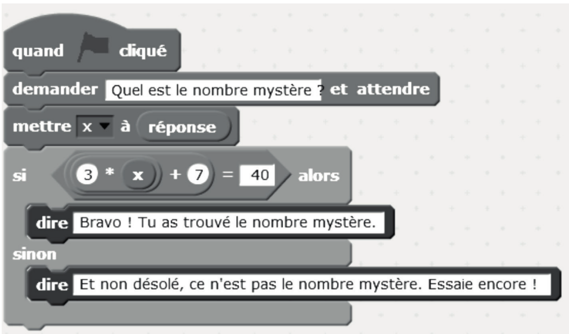
$$\mathbb{P}_3(\overline{D}) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

Or $\mathbb{P}_3(D) = 1 - \mathbb{P}_3(\overline{D}) = 1 - \frac{1}{8}$, donc

$$\boxed{\mathbb{P}_3(D) = \frac{7}{8}.}$$

Exercice 3.

Un élève utilise le programme ci-dessous.



1. Quelle réponse le logiciel va-t-il afficher si l'élève ente la valeur 5 ? Expliquer pourquoi.

   $3 \times 5 + 7 = 22.$
   Puisque $22 \neq 40$

   le message affiché sera « Et non … encore ! ».

2. Quel nombre l'élève doit-il entrer pour obtenir en retour le message « Bravo ! Tu as trouvé le nombre mystère. » ?

   Déterminons le nombre mystère.

   Notons x le nombre mystère. D'après le programme x vérifie

$$3x + 7 = 40$$

Or cette équation équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 3x + 7 - 7 &= 40 - 7 \\ 3x &= 33 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{33}{3} \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Il n' y a donc qu'une seule possibilité :

$$\boxed{\text{le nombre mystère est 11.}}$$

Exercice 4.

Pour calculer le débit D d'une perfusion en gouttes par minute, les infirmiers utilisent la formule

$$D = \frac{V}{3 \times T},$$

où V est le volume, en millilitre, de la perfusion et T le temps, en heure, que doit durer la perfusion.

1. À quel débit doit-être réglée la perfusion si le volume à transfuser est de 1,5 litre en un jour ? Arrondir la réponse à l'unité.

Déterminons le débit.

$$\begin{aligned} D &= \frac{V}{3T} \\ &= \frac{1{,}5 \cdot 10^3}{3 \times 24} \\ &= \frac{125}{6} \\ &= 20{,}8333\ldots \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La perfusion doit être réglée à 21 gouttes par minute.}}$$

2. Une perfusion est réglée sur un débit de 6 gouttes par minute. Quel volume de liquide sera perfusé en une heure et quart ?

   Déterminons le volume de liquide perfusé.

$$D = \frac{V}{3T}$$

   ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 6 &= \frac{V}{3 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right)} \\ 6 &= \frac{V}{\frac{15}{4}} \\ 6 \times \frac{15}{4} &= \frac{V}{\frac{15}{4}} \times \frac{15}{4} \\ 22{,}5 &= V \end{aligned}$$

   Le volume transféré sera de 22,5 millilitres.

3. Une perfusion a un volume de 250 mL et est réglée sur un débit de 8 gouttes par minute. Quelle devrait être la durée de la perfusion ? Donner la réponse sous la forme x heures y minutes.

   Déterminons la durée de la perfusion.

$$D = \frac{V}{3T}$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
8 &= \frac{250}{3T} \\
8\times T &= \frac{250}{3T}\times T, \quad \text{car } T \neq 0 \\
8T &= \frac{250}{3} \\
\frac{8T}{8} &= \frac{\frac{250}{3}}{8} \\
T &= \frac{125}{12} \\
T &= 10 + \frac{5}{12} \\
T &= 10 + \frac{5\times 5}{12\times 5} \\
T &= 10 + \frac{25}{60}
\end{aligned}$$

La perfusion durera 10 heures et 25 minutes.