Épreuve de mathématiques CRPE 2017 groupe 2.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à M. Claudien Jérôme pour ses corrections.

I Première partie (13 points).

Partie A : premier projet d'aménagement.

1. La seule longueur inconnue du périmètre est BC.

   Calculons BC.

   BCE est rectangle en E, puisque $ABED$ est un rectangle, donc, d'après le théorème de Pythagore

   $$BC^2 = BE^2 + EC^2$$

   Puisque d'une part $BE = AD = 30$ et d'autre part $E \in [DC]$:

   $$BC^2 = 30^2 + (DC - DE)^2$$

   Or $DC = 70$ et $DE = AB = 50$ donc :

   $$\begin{aligned} BC^2 &= 30^2 + (70 - 50)^2 \\ &= 2900 \end{aligned}$$

   BC étant une longueur et donc un nombre positif :

   $$\begin{aligned} BC &= \sqrt{1300} \\ &= \sqrt{2^2 \times 5^2 \times 13} \\ &= 10\sqrt{13} \end{aligned}$$

   $$\boxed{BC = 10\sqrt{13}.}$$

   Nous en déduisons le périmètre du jardin

$$\begin{aligned} P &= AB + BC + CD + AD - 3{,}10 \\ &= 50 + 10\sqrt{13} + 70 + 30 - 3{,}10 \\ &= 146{,}9 + 10\sqrt{29} \end{aligned}$$

$$P = 146{,}9 + 10\sqrt{13} \approx 183 \text{ m.}$$

2. Notons $\mathcal{A}_1$ l'aire du demi-disque, $\mathcal{A}_2$ l'aire de la partie restante du rectangle $ABED$ et $\mathcal{A}_3$ l'aire du triangle BCE.

   Déterminons $\mathcal{A}_1$.

   Puisqu'il s'agit d'un demi-disque :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\times 50\right)^2 \\ &= \frac{625}{2}\pi \\ &\approx 981{,}7477 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_1 \approx 982 \text{ m}^2.$$

   Déterminons $\mathcal{A}_2$.

   $\mathcal{A}_2$ est l'aire du rectangle $ABED$ à laquelle on a ôté $\mathcal{A}_1$, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= AD \times AB - \mathcal{A}_1 \\ &= 30 \times 50 - \frac{625}{2}\pi \\ &\approx 518{,}25229 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_2 \approx 518 \text{ m}^2.$$

Calculons $\mathcal{A}_3$.

BEC est rectangle en E, donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3 &= \frac{1}{2}BE \times EC\\ &= \frac{1}{2}AD \times (DC - AB)\\ &= \frac{1}{2}30 \times (70 - 50)\\ &= 300\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_3 = 300 \text{ m}^2.}$$

Partie B : plantations.

1. Déterminons le pourcentage de remise accordé.

   * Le coût de l'ensemencement avant réduction est de

   $$520 \times 5 = 2600 \text{ €}$$

   * Le taux d'évolution en pourcentage entre les prix avant et après remise est

   $$\begin{aligned}t &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100\\ &= \frac{1950 - 2600}{2600} \times 100\\ &= -25\end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{La remise accordée est de 25 \%.}}$$

2. Notons x le prix en euros d'un pied de tomates.

   Déterminons un encadrement de x.

   La somme totale dépensée est de

   $$75 \times 0{,}22 + 50 \times x$$

Puisque la somme totale dépensée est entre 50 et 55 euros :

$$50 \leq 75 \times 0{,}22 + 50 \times x \leq 55$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 50 &\leq 16{,}5 + 50x \leq 55 \\ 50-16{,}5 &\leq 16{,}5 + 50x-16{,}5 \leq 55-16{,}5 \\ 33{,}5 &\leq 50x \leq 38{,}5 \end{aligned}$$

puisque $50 > 0$ cela équivaut encore à

$$\begin{aligned} \frac{33{,}5}{50} &\leq \frac{50x}{50} \leq \frac{55}{50} \\ 0{,}67 &\leq x \leq 1{,}1 \end{aligned}$$

Le prix d'un pied de tomate est entre 67 centimes et 1,10 euros.

Partie C : étude d'un agrandissement du potager.

1. (a) Donnons un encadrement de x.

$$\begin{cases} x = AM \\ M \in [AB] \\ AB = 50 \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 50]$$

$$0 \leq x \leq 50.$$

(b) Déterminons l'aire de $MBCG$ en fonction de x.

Deux méthodes sont possibles. Nous pouvons utiliser la formule pour l'aire d'un trapèze (« petite base plus grande base fois hauteur divisé par deux ») ou bien sommer les aires du triangle BEC et du rectangle $MBEG$.

L'aire recherchée est

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(MBCG) &= \frac{1}{2}(MB+GC)\times MG\\ &= \frac{1}{2}[(AB-AM)+(DC-AM)]\times AD\\ &= \frac{1}{2}[(50-x)+(70-x)]\times 30\\ &= \frac{1}{2}(120-2x)\times 30\\ &= 15(120-2x)\\ &= 1800-30x\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A}(MBCG) = 1800-30x.}$$

2. (a)

```
=1800-30*B1
```

(b) Déterminons la formule entrée en B3.

La plantation florale occupe le demi-disque de diamètre de longueur x. Par conséquent sont aire est

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{2}\pi\frac{x^2}{4}\\ &= \pi\frac{x^2}{8}\end{aligned}$$

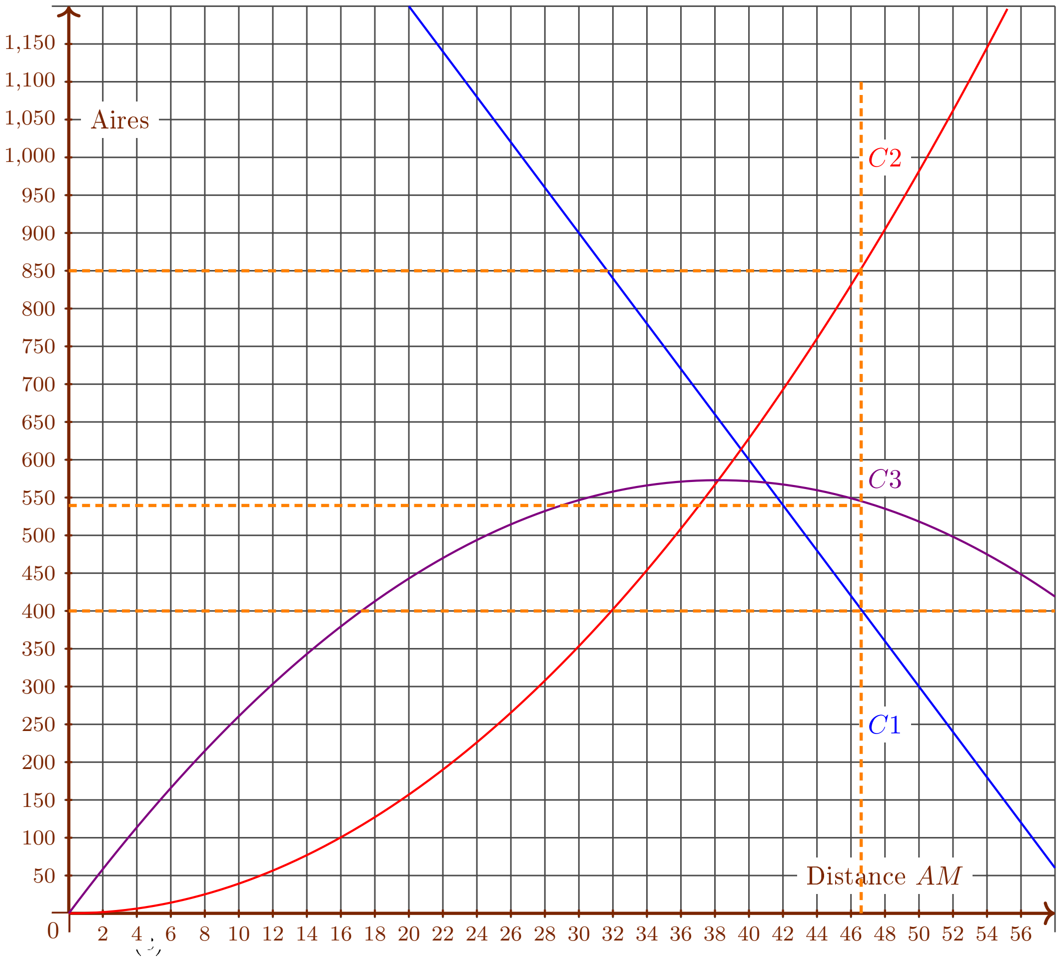
Nous en déduisons la formule à insérer en B3 :

```
=PI()*B1*B1/8
```

3. (a) Nous avons vu que l'aire du trapèze $MBCG$ est une fonction affine. Sa représentation graphique est donc une droite, il s'agit donc de la courbe $C1$.
Plus M s'éloigne de A, plus l'aire du demi-disque augmente. Cette aire est donc représentée par la courbe $C2$.
L'aire de la partie engazonnée est donc représentée par la courbe $C3$.

(b) Le fait que $C2$ et $C3$ se coupent pour une abscisse de 38 s'interprète en disant que :

l'aire de la partie engazonnée et de la plantation florale sont égales lorsque $AM = 38$ m.



Par lecture graphique :

lorsque l'aire du potager vaut 400 m^2, l'aire de la plantation florale est de 850 m^2 et l'aire de la partie gazonnée est de 540 m^2.

4. Déterminons pour quelle valeur de x l'aire du potager est de 750 m^2.

Cela est vérifié lorsque

$$1800 - 30x = 750$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
1800 - 30x &= 750 \\
1800 - 30x - 1800 &= 750 - 1800 \\
-30x &= -1050 \\
\frac{-30x}{-30} &= \frac{-1050}{-30} \\
x &= 35
\end{aligned}$$

L'aire du potager est de 750 m^2 si et seulement si $x = 35$.

Calculons l'aire de la partie florale lorsque $x = 35$.

Nous avons déjà déterminé l'aire de la partie florale à la question C.2.(b) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= \pi\frac{x^2}{8} \\
\mathcal{A}(35) &= \pi\frac{35^2}{8} \\
&\approx 481{,}056375
\end{aligned}$$

L'aire de la plantation florale est de 481 m^2.

Calculons l'aire du potager lorsque $x = 35$.

L'aire du potager est l'aire du trapèze $ABCD$ privée des aires du demi-disque et du trapèze $MBCG$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{pota} &= \frac{1}{2}(50+70)\times 30 - 481 - 750\\ &= 569\end{aligned}$$

L'aire du potager est de 569 m^2.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Déterminons la proportion d'adhérents entre 18 et 25 ans.

   Un quart des adhérents sont majeurs et parmi ceux-là deux tiers ont moins de 25 ans.
   La proportion d'adhérents entre 18 et 25 ans est donc de $\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$.

   Un adhérent sur six a donc entre 18 et 25 ans.

2. Déterminons le taux d'évolution globale.

   Une baisse de 30 % correspond à un coefficient multiplicateur de

$$\begin{aligned}CM_1 &= 1\frac{t}{100}\\ &= 1+\frac{-30}{100}\\ &= 0{,}7\end{aligned}$$

   De même le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 20 % est

$$CM_2 = 0{,}8$$

   Le coefficient multiplicateur global correspondant à ces deux baisses est donc

$$\begin{aligned}CM_g &= CM_1\times CM_2\\ &= 0{,}7\times 0{,}8\\ &= 0{,}56\end{aligned}$$

Le taux d'évolution globale est donc de :

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM_g - 1) \\ &= 100 \times (0{,}56 - 1) \\ &= -44 \end{aligned}$$

Le prix de l'article a diminué de 44 %.

3. La somme S des valeurs de la séries, le nombre n de valeurs de la série et la moyenne $\overline{x}$ sont liés par $\overline{x} = \frac{S}{n}$. Donc : $S = 5n$.

   La moyenne d la nouvelle série est donc $\overline{x}' = \frac{S+5}{n+1} = \frac{5n+5}{n+1} = \frac{5(n+1)}{n+1} = 5$.

   La moyenne de la série ne change pas.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $(n+1)(n-1) + 1 = n^2 - 1^2 + 1 = n^2$.

   L'affirmation est donc vraie.

Exercice 2.

1. Il s'agit d'une série regroupée par modalités, nous utiliserons donc la formule de la moyenne pondérée.

   Déterminons la hauteur moyenne.

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{x_1 n_1 + \cdots + x_r n_r}{n_1 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{0 \times 4 + 0{,}3 \times 6 + \cdots + 41 \times 1}{4 + 6 + \cdots + 1} \\ &\approx 6{,}24333\ldots \end{aligned}$$

   Les précipitation sont en moyenne de 6,24 mm par jour.

2. Déterminons la médiane de cette série.

   Déterminons tout de suite les effectifs cumulés croissants.

Hauteur des précipitations (en millimètre)	0	0,3	1,3	1,7	2,5	7	13	21	28	42
Nombre de jours	4	6	4	4	3	3	2	1	2	1
E.C.C.	4	10	14	18	21	24	26	27	29	30

   La série des hauteurs est rangée dans l'ordre croissant.
   Position de la médiane : $\frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15$. La série est paire donc la médiane est entre la quinzième et la seizième valeurs.
   D'après les E.C.C. la médiane est donc

$$Me = \frac{1{,}7 + 1{,}7}{2} = 1{,}7$$

   La valeur médiane des précipitations est de 1,7 mm.

3. Calculons l'étendue de cette série.

$$\begin{aligned} e &= max - min \\ &= 42 - 0 \\ &= 42 \end{aligned}$$

   L'étendue de cette série est de 42 mm.

4. Déterminons la proportion de jours pour lesquels la précipitation est supérieure à 13 mm.

   Il y a 6 jours sur un total de 30 pendant lesquels des précipitations supérieures à 13 mm ont été enregistré. Ce qui représente une proportion e

$$\begin{aligned} p &= \frac{13}{30} \\ &\approx 0{,}4333\ldots \end{aligned}$$

Le pourcentage de jours pendant lesquels des précipitations supérieures à 13 mm ont été enregistrés est de 43,33 %.

5. Déterminons le volume d'eau tombé sur la piste.

   La hauteur des précipitations au cours du mois d'avril est de

   $$4 \times 0 + 6 \times 0{,}3 + 4 \times 1{,}3 + 4 \times 1{,}7 + \cdots + 1 \times 42 = 187{,}3 \text{ mm}$$

   Autrement dit 0,1873 m.

   Cette hauteur de précipitation étant tombée sur une surface de $3200 \times 50 = 160\,000 \text{ m}^2$ nous pouvons déterminer le volume en mètre cube

   $$\begin{aligned} V &= 160000 \times 0{,}1873 \\ &= 29968 \end{aligned}$$

   Le volume des précipitations sur la piste au cours du mois d'avril est de $29\,968 \text{ m}^3$.

   Puisque $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$, $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ l}$.
   Donc

   le volume des précipitations sur la piste au cours du mois d'avril est de 29 968 000 l.

Exercice 3.

Le programme A commande le tracé d'un rectangle de côtés de longueurs 300 et 70.
Le programme B commande le tracé d'un losange de côté de longueur 100 et d'angles 50° et 130°.

Exercice 4.

1. Le batelier parcourant 120 km en n jours,

   la distance parcouru quotidiennement pendant la descente est de $\frac{120}{n}$.

Puisqu'à la remontée il parcours 6 km de moins chaque jour

la distance parcouru quotidiennement pendant la descente est de $\frac{120}{n} - 6$.

2. À la remontée le batelier parcourt les 120 km en $n+1$ jours, la distance parcourue quotidiennement est donc $\frac{120}{n+1}$.
En tenant compte du résultat de la question précédente, nous pouvons affirmer que durant la remontée

$$\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6.$$

3. Démontrons que : $n(n+1) = 20$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
\frac{120}{n+1} &= \frac{120 - 6 \times n}{n} \\
120 \times n &= (120 - 6n) \times (n+1) \\
120n &= 120 \times n + 120 \times 1 + (-6n) \times n + (-6n) \times 1 \\
120n &= 120n + 120 - 6n^2 - 6n \\
120n &= -6n^2 + 114n + 120 \\
120n + 6n^2 - 114n &= 120 \\
6n^2 + 6n &= 120 \\
6n(n+1) &= 120 \\
n(n+1) &= 20
\end{aligned}$$

Quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) = 20$.

4. Résolvons dans $\mathbb{N}^*$, $n(n+1) = 20$.

Nous cherchons deux entiers naturels consécutifs, n et $n+1$, dont le produit égale 20. Il n'y a qu'une possibilité 4 et 5.

$$\boxed{n = 4.}$$

Autrement dit :

le batelier descend la rivière en 4 jours et la remonte en 5.