Épreuve de mathématiques CRPE 2017 groupe 2.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

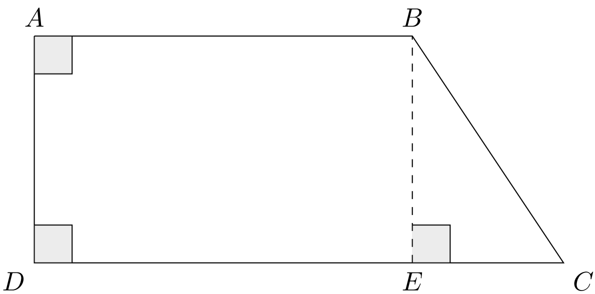
Merci à M. Claudien Jérôme pour ses corrections.

Durée 4 heures (partie 3 incluse).
L'usage de la calculatrice est autorisé.

I Première partie (13 points).

Les figures données ne sont pas à l'échelle.

La figure ci-dessous modélise un jardin dont l'aménagement doit être repensé.



Le trapèze $ABCD$ est tel que : les droites (AB) et (DC) sont parallèles ; les droites (AD) et (DC) sont perpendiculaires ; $AB = 50$ m, $AD = 30$ m et $DC = 70$ m.

E est le point du segment $[DC]$ tel que $ABED$ est un rectangle.

Partie A : premier projet d'aménagement.

1. Dans un premier temps, le propriétaire désire clôturer le jardin.
   Calculer la longueur de clôture nécessaire sachant qu'il prévoit l'installation d'un portail de 3,10 m de large. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au mètre.

   La seule longueur inconnue du périmètre est BC.

   Calculons BC.

   BCE est rectangle en E, puisque $ABED$ est un rectangle, donc, d'après le théorème de Pythagore

$$BC^2 = BE^2 + EC^2$$

Puisque d'une part $BE = AD = 30$ et d'autre part $E \in [DC]$:

$$BC^2 = 30^2 + (DC - DE)^2$$

Or $DC = 70$ et $DE = AB = 50$ donc :

$$\begin{aligned} BC^2 &= 30^2 + (70 - 50)^2 \\ &= 2900 \end{aligned}$$

BC étant une longueur et donc un nombre positif :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{1300} \\ &= \sqrt{2^2 \times 5^2 \times 13} \\ &= 10\sqrt{13} \end{aligned}$$

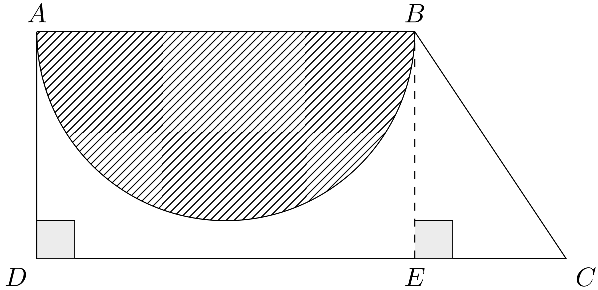
$$\boxed{BC = 10\sqrt{13}.}$$

Nous en déduisons le périmètre du jardin

$$\begin{aligned} P &= AB + BC + CD + AD - 3{,}10 \\ &= 50 + 10\sqrt{13} + 70 + 30 - 3{,}10 \\ &= 146{,}9 + 10\sqrt{29} \end{aligned}$$

$$\boxed{P = 146{,}9 + 10\sqrt{13} \approx 183 \text{ m.}}$$

2. Dans un deuxième temps, il partage son jardin en trois parties :
   - Un espace réservé au potager représenté par le triangle rectangle BCE.
   - Un espace de plantation florales représenté par le demi-disque hachuré de diamètre $[AB]$.
   - un espace engazonné sur le reste du jardin.



Calculer l'aire arrondie au mètre carré de chacune des trois parties du jardin.

Notons $\mathcal{A}_1$ l'aire du demi-disque, $\mathcal{A}_2$ l'aire de la partie restante du rectangle $ABED$ et $\mathcal{A}_3$ l'aire du triangle BCE.

Déterminons $\mathcal{A}_1$.

Puisqu'il s'agit d'un demi-disque :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}AB\right)^2\\ &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\times 50\right)^2\\ &= \frac{625}{2}\pi\\ &\approx 981{,}7477\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_1 \approx 982 \text{ m}^2.}$$

Déterminons $\mathcal{A}_2$.

$\mathcal{A}_2$ est l'aire du rectangle $ABED$ à laquelle on a ôté $\mathcal{A}_1$, donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= AD \times AB - \mathcal{A}_1\\ &= 30 \times 50 - \frac{625}{2}\pi\\ &\approx 518{,}25229\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_2 \approx 518 \text{ m}^2.$$

Calculons $\mathcal{A}_3$.

BEC est rectangle en E, donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3 &= \frac{1}{2} BE \times EC \\
&= \frac{1}{2} AD \times (DC - AB) \\
&= \frac{1}{2} 30 \times (70 - 50) \\
&= 300
\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_3 = 300 \text{ m}^2.$$

Partie B : plantations.

1. Pour cette question, on considérera que l'aire de la partie engazonnée est de 520 m^2. Le propriétaire contacte un paysagiste qui propose, pour l'ensemencement du gazon, un tarif de 5 euros le m^2. Il offre une remise sur le prix total et ne facture que 1950 euros.
   Quel est le pourcentage de la remise accordée ?

   Déterminons le pourcentage de remise accordé.

   * Le coût de l'ensemencement avant réduction est de

   $$520 \times 5 = 2600 \text{ €}$$

   * Le taux d'évolution en pourcentage entre les prix avant et après remise est

   $$\begin{aligned}
   t &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \\
   &= \frac{1950 - 2600}{2600} \times 100 \\
   &= -25
   \end{aligned}$$

La remise accordée est de 25 %.

2. Pour débuter son potager, le propriétaire a acheté 75 plants de salade et 50 pieds de tomates. Il se souvient que le prix d'un plant de salade était de 22 centimes et qu'il a payé, en tout entre 50 et 55 euros.
   En déduire un encadrement, le plus précis possible, du prix d'un pied de tomates.

   Notons x le prix en euros d'un pied de tomates.

   Déterminons un encadrement de x.

   La somme totale dépensée est de

$$75 \times 0{,}22 + 50 \times x$$

   Puisque la somme totale dépensée est entre 50 et 55 euros :

$$50 \leq 75 \times 0{,}22 + 50 \times x \leq 55$$

   ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 50 \leq 16{,}5 + 50x \leq 55 \\ 50-16{,}5 \leq 16{,}5 + 50x-16{,}5 \leq 55-16{,}5 \\ 33{,}5 \leq 50x \leq 38{,}5 \end{aligned}$$

   puisque $50 > 0$ cela équivaut encore à

$$\begin{aligned} \frac{33{,}5}{50} \leq \frac{50x}{50} \leq \frac{55}{50} \\ 0{,}67 \leq x \leq 1{,}1 \end{aligned}$$

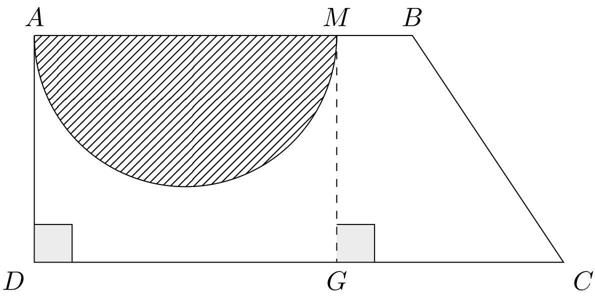
   Le prix d'un pied de tomate est entre 67 centimes et 1,10 euros.

Partie C : étude d'un agrandissement du potager.

Après réflexion le propriétaire décide d'agrandir son potager. Sur le plan de son jardin, il place un point M sur le côté $[AB]$ et trace la droite parallèle à

(AD) passant par M. Elle coupe le segment $[DC]$ en un point G. Le potager est maintenant représenté par le trapèze $MBCG$ et l'espace de plantations florales par le demi-disque de diamètre $[AM]$.

On pose $AM = x$, où x est exprimé en mètre.



1. (a) Donnez un encadrement des valeurs de x possibles.

Donnons un encadrement de x.

$$\begin{cases} x = AM \\ M \in [AB] \\ AB = 50 \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 50]$$

$$\boxed{0 \leq x \leq 50.}$$

(b) Démontrer que l'aire du trapèze $MBCG$ est égale à $1800 - 30x$.

Déterminons l'aire de $MBCG$ en fonction de x.

Deux méthodes sont possibles. Nous pouvons utiliser la formule pour l'aire d'un trapèze (« petite base plus grande base fois hauteur divisé par deux ») ou bien sommer les aires du triangle BEC et du rectangle $MBEG$.

L'aire recherchée est

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(MBCG) &= \frac{1}{2}(MB + GC) \times MG \\ &= \frac{1}{2}[(AB - AM) + (DC - AM)] \times AD \\ &= \frac{1}{2}[(50 - x) + (70 - x)] \times 30 \\ &= \frac{1}{2}(120 - 2x) \times 30 \\ &= 15(120 - 2x) \\ &= 1800 - 30x\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A}(MBCG) = 1800 - 30x.}$$

2. Le propriétaire utilise un tableur pour effectuer des calculs d'aires des différentes parties du jardin en fonction de la distance AM.

	A	B	C	D	E	F	G
1	distance AM	0	10	20	30	40	50
2	Aire du potager (en m²)	1800	1500	1200	900	600	300
3	Aire de l'espace de plantations florales (en m²)	0,00	39,27	157,08	353,43	628,32	981,75
4	Aire de la partie engazonnée (en m²)	0,00	260,73	442,92	546,57	571,68	518,25
5							

(a) Une formule a été saisie dans la cellule B2 de la feuille de calcul et recopiée ensuite vers la droite pour compléter la plage de cellules entre C2 et G2. Quelle peut être cette formule ?

```
=1800-30*B1
```

(b) Parmi les quatre propositions suivantes, quelle est la formule qui a pu être saisie dans la cellule B3 de la feuille de calcul et recopiée ensuite vers la droite pour compléter la plage de cellules entre C3 et G3 ?

=PI()*B1*B1	=PI()*B1*B1/8	=PI()*B1*B1/2	=PI()*B1*B1/4

Remarque : PI() *désigne le nombre* π.

Déterminons la formule entrée en B3.

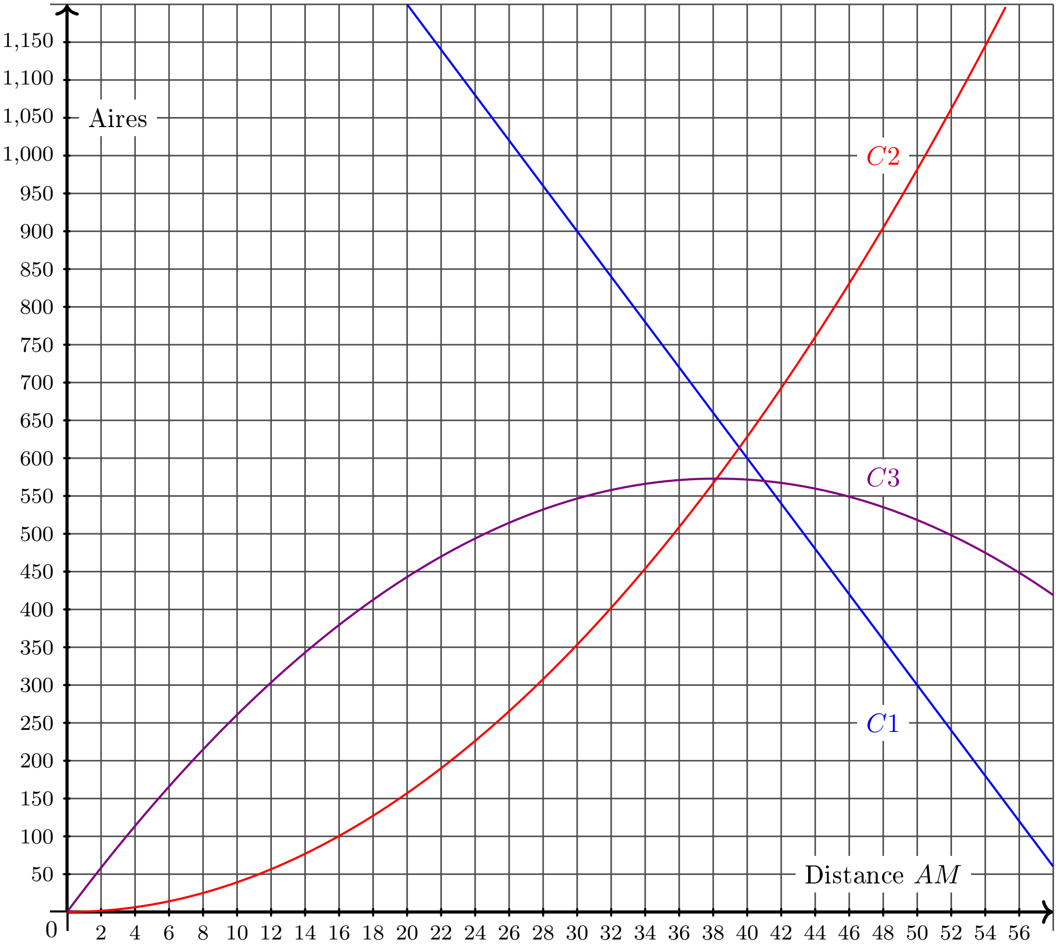
La plantation florale occupe le demi-disque de diamètre de longueur x. Par conséquent sont aire est

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{2}\pi\frac{x^2}{4}\\ &= \pi\frac{x^2}{8}\end{aligned}$$

Nous en déduisons la formule à insérer en B3 :

```
=PI()*B1*B1/8
```

3. Le propriétaire utilise un logiciel pour construire les représentations graphiques de ces trois fonctions donnant l'aire de chacune des parties du jardin en fonction de la distance AM. Il obtient le graphique donné ci-dessous.



(a) Indiquer, sans justifier, à quelle partie du jardin correspond chacune des courbes $C1$, $C2$ et $C3$.

Nous avons vu que l'aire du trapèze $MBCG$ est une fonction affine. Sa représentation graphique est donc une droite, il s'agit donc de la courbe $C1$.

Plus M s'éloigne de A, plus l'aire du demi-disque augmente. Cette aire est donc représentée par la courbe $C2$.

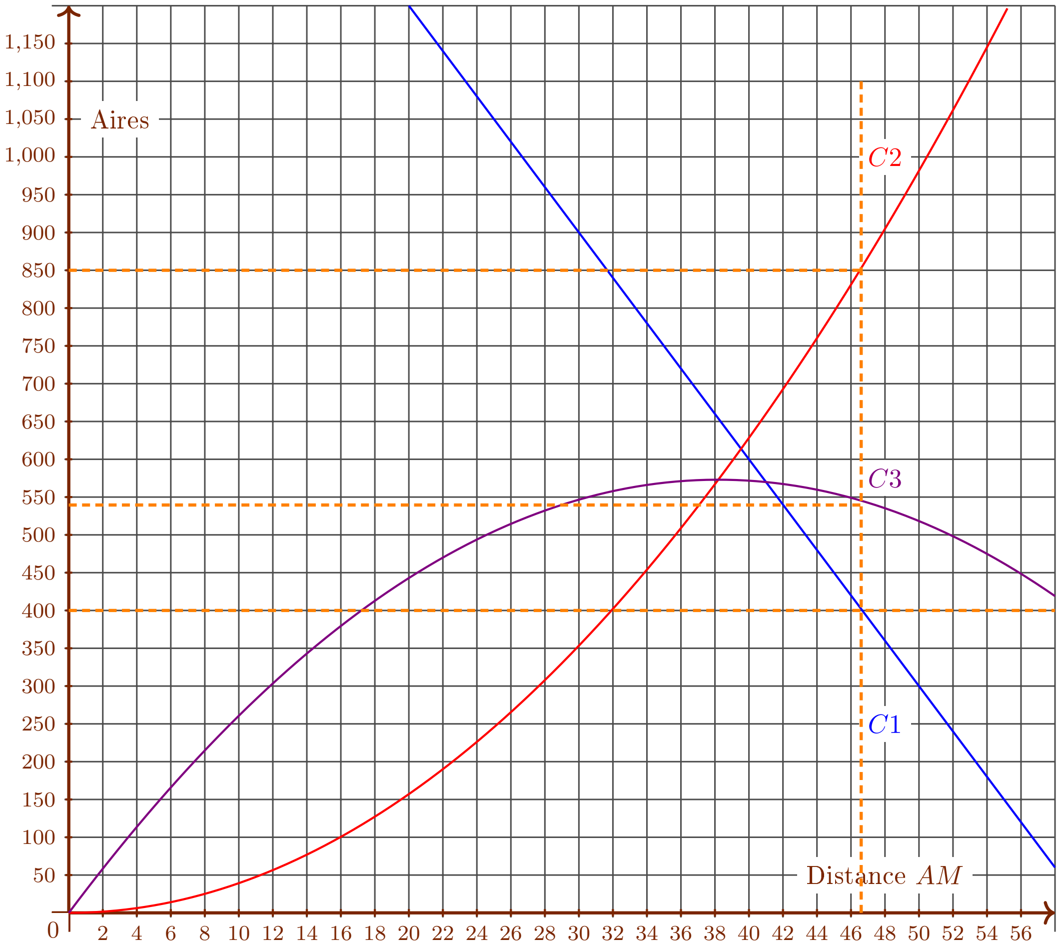
L'aire de la partie engazonnée est donc représentée par la courbe $C3$.

(b) Les courbes $C2$ et $C3$ se coupent en un point dont l'abscisse est environ 38. À quoi cela correspond-il pour le jardin ?

Le fait que $C2$ et $C3$ se coupent pour une abscisse de 38 s'interprète en disant que :

l'aire de la partie engazonnée et de la plantation florale sont égales lorsque $AM = 38$ m.

(c) Par lecture graphique, déterminer une valeur approchée des aires respectives de l'espace de plantations florales et de la partie engazonnée lorsque l'aire du potager vaut 400 m^2.



Par lecture graphique :

lorsque l'aire du potager vaut 400 m^2, l'aire de la plantation florale est de 850 m^2 et l'aire de la partie gazonnée est de 540 m^2.

4. Par le calcul, déterminer les aires respectives de l'espace de plantations florales et de la partie gazonnée lorsque l'aire du potager vaut 750 m^2. Arrondir ces aires au mètre carré.

Déterminons pour quelle valeur de x l'aire du potager est de 750 m^2.

Cela est vérifié lorsque

$$1800 - 30x = 750$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
1800 - 30x &= 750 \\
1800 - 30x - 1800 &= 750 - 1800 \\
-30x &= -1050 \\
\frac{-30x}{-30} &= \frac{-1050}{-30} \\
x &= 35
\end{aligned}$$

L'aire du potager est de 750 m^2 si et seulement si $x = 35$.

Calculons l'aire de la partie florale lorsque $x = 35$.

Nous avons déjà déterminé l'aire de la partie florale à la question C.2.(b) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= \pi\frac{x^2}{8} \\
\mathcal{A}(35) &= \pi\frac{35^2}{8} \\
&\approx 481{,}056375
\end{aligned}$$

L'aire de la plantation florale est de 481 m^2.

Calculons l'aire du potager lorsque $x = 35$.

L'aire du potager est l'aire du trapèze $ABCD$ privée des aires du demi-disque et du trapèze $MBCG$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{pota} &= \frac{1}{2}(50+70)\times 30 - 481 - 750 \\ &= 569\end{aligned}$$

L'aire du potager est de 569 m^2.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Indiquer si les affirmation suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.
Une réponse exacte non justifiée ne rapporte aucun point.
Une réponse fausse n'enlève aucun point.

1. Dans un club sportif, les trois quart des adhérents sont mineurs (ils ont moins de 18 ans) et le tiers des adhérents majeurs a plus de 25 ans.
   Affirmation : un adhérent sur six a donc entre 18 et 25 ans.

   Déterminons la proportion d'adhérents entre 18 et 25 ans.

   Un quart des adhérents sont majeurs et parmi ceux-là deux tiers ont moins de 25 ans.
   La proportion d'adhérents entre 18 et 25 ans est donc de $\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$.

   Un adhérent sur six a donc entre 18 et 25 ans.

2. Affirmation : durant les soldes si on baisse le prix d'un article de 30 % puis de 20 %, alors le prix de l'article a baissé de 50 %.

   Déterminons le taux d'évolution globale.

   Une baisse de 30 % correspond à un coefficient multiplicateur de

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1\frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-30}{100} \\ &= 0{,}7 \end{aligned}$$

De même le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 20 % est

$$CM_2 = 0{,}8$$

Le coefficient multiplicateur global correspondant à ces deux baisses est donc

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_1 \times CM_2 \\ &= 0{,}7 \times 0{,}8 \\ &= 0{,}56 \end{aligned}$$

Le taux d'évolution globale est donc de :

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM_g - 1) \\ &= 100 \times (0{,}56 - 1) \\ &= -44 \end{aligned}$$

Le prix de l'article a diminué de 44 %.

3. On considère une série statistique de moyenne égale à 5. On complète la série en ajoutant 5 comme valeur supplémentaire.
Affirmation : la moyenne de la série ne change pas.

La somme S des valeurs de la séries, le nombre n de valeurs de la série et la moyenne $\overline{x}$ sont liés par $\overline{x} = \frac{S}{n}$. Donc : $S = 5n$.

La moyenne d la nouvelle série est donc $\overline{x}' = \frac{S+5}{n+1} = \frac{5n+5}{n+1} = \frac{5(n+1)}{n+1} = 5$.

La moyenne de la série ne change pas.

4. Affirmation : pour obtenir le carré d'un nombre entier, il suffit de multiplier le nombre entier qui le précède par le nombre entier qui le suit et lui ajouter 1.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. $(n+1)(n-1)+1 = n^2 - 1^2 + 1 = n^2$.

   L'affirmation est donc vraie.

Exercice 2.

Ce tableau présente la hauteur, en millimètre, des précipitations journalières au cours du mois d'avril 2016, sur l'aéroport Roland Garros de l'île de la Réunion.

Hauteur des précipitations (en millimètre)	0	0,3	1,3	1,7	2,5	7	13	21	28	42
Nombre de jours	4	6	4	4	3	3	2	1	2	1

1. Calculer la valeur moyenne des précipitations journalières au cours du mois d'avril 2016.

   Il s'agit d'une série regroupée par modalités, nous utiliserons donc la formule de la moyenne pondérée.

   Déterminons la hauteur moyenne.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{x_1 n_1 + \cdots + x_r n_r}{n_1 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{0 \times 4 + 0{,}3 \times 6 + \cdots + 41 \times 1}{4 + 6 + \cdots + 1} \\ &\approx 6{,}24333\ldots\end{aligned}$$

   Les précipitation sont en moyenne de 6,24 mm par jour.

2. Déterminer la valeur médiane de ces précipitations journalières. Interpréter ce résultat par une phrase.

   Déterminons la médiane de cette série.

   Déterminons tout de suite les effectifs cumulés croissants.

Hauteur des précipitations (en millimètre)	0	0,3	1,3	1,7	2,5	7	13	21	28	42
Nombre de jours	4	6	4	4	3	3	2	1	2	1
E.C.C.	4	10	14	18	21	24	26	27	29	30

La série des hauteurs est rangée dans l'ordre croissant.
Position de la médiane : $\frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15$. La série est paire donc la médiane est entre la quinzième et la seizième valeurs.
D'après les E.C.C. la médiane est donc

$$Me = \frac{1{,}7 + 1{,}7}{2} = 1{,}7$$

La valeur médiane des précipitations est de 1,7 mm.

3. Quelle est l'étendue de cette série ?

Calculons l'étendue de cette série.

$$\begin{aligned} e &= max - min \\ &= 42 - 0 \\ &= 42 \end{aligned}$$

L'étendue de cette série est de 42 mm.

4. Déterminer le nombre de jours où la hauteur des précipitations est supérieure ou égale à 13 mm, puis exprimer ce nombre en pourcentage par rapport au nombre de jours dans le mois.

Déterminons la proportion de jours pour lesquels la précipitation est supérieure à 13 mm.

Il y a 6 jours sur un total de 30 pendant lesquels des précipitations supérieures à 13 mm ont été enregistré. Ce qui représente une proportion e

$$\begin{aligned} p &= \frac{13}{30} \\ &\approx 0{,}4333\ldots \end{aligned}$$

Le pourcentage de jours pendant lesquels des précipitations supérieures à 13 mm ont été enregistrés est de 43,33 %.

5. Sachant qu'une piste de décollage de l'aéroport Roland Garros est rectangulaire et mesure 3 200 m de long et 50 m de large, calculer, en mètre cube, puis en litre le volume de pluie tombée sur cette piste au cours du mois d'avril 2016.

   Déterminons le volume d'eau tombé sur la piste.

   La hauteur des précipitations au cours du mois d'avril est de

$$4 \times 0 + 6 \times 0{,}3 + 4 \times 1{,}3 + 4 \times 1{,}7 + \cdots + 1 \times 42 = 187{,}3 \text{ mm}$$

   Autrement dit 0,1873 m.

   Cette hauteur de précipitation étant tombée sur une surface de $3200 \times 50 = 160\,000$ m^2 nous pouvons déterminer le volume en mètre cube

$$\begin{aligned} V &= 160000 \times 0{,}1873 \\ &= 29968 \end{aligned}$$

   Le volume des précipitations sur la piste au cours du mois d'avril est de 29 968 m^3.

   Puisque 1 l = 1 dm^3, 1 m^3 = 1 000 l.
   Donc

   le volume des précipitations sur la piste au cours du mois d'avril est de 29 968 000 l.

Exercice 3.

Déterminer, sans justifier, quelle figure géométrique est tracée lorsqu'on exécute chacun des programmes suivants.

Programme A.

Programme B.

Le programme A commande le tracé d'un rectangle de côtés de longueurs 300 et 70.

Le programme B commande le tracé d'un losange de côté de longueur 100 et d'angles 50° et 130°.

Exercice 4.

Un batelier descend une rivière de 120 km en un certain nombre de jours n, puis il la remonte. La distance parcourue quotidiennement lors de la remontée est inférieure de 6 km à celle parcourue quotidiennement lors de la descente. Le batelier met au total un jour de plus pour remonter que pour descendre. On considère qu'il descend à vitesse constante et qu'il remonte à vitesse constante.

1. Exprimer en fonction de n, la distance, en kilomètre, parcourue quotidiennement pendant la descente et la distance, en kilomètre, parcourue quotidiennement pendant le remontée.

Le batelier parcourant 120 km en n jours,

la distance parcouru quotidiennement pendant la descente est de $\frac{120}{n}$.

Puisqu'à la remontée il parcours 6 km de moins chaque jour

la distance parcouru quotidiennement pendant la descente est de $\frac{120}{n} - 6$.

2. Montrer que $\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6$.

   À la remontée le batelier parcourt les 120 km en $n + 1$ jours, la distance parcourue quotidiennement est donc $\frac{120}{n+1}$.
   En tenant compte du résultat de la question précédente, nous pouvons affirmer que durant la remontée

   $$\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6.$$

3. Déduire de la question précédente que $n(n+1) = 20$.

   Démontrons que : $n(n+1) = 20$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   $$\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6$$

   équivaut successivement à

   $$\begin{aligned}
   \frac{120}{n+1} &= \frac{120 - 6 \times n}{n} \\
   120 \times n &= (120 - 6n) \times (n+1) \\
   120n &= 120 \times n + 120 \times 1 + (-6n) \times n + (-6n) \times 1 \\
   120n &= 120n + 120 - 6n^2 - 6n \\
   120n &= -6n^2 + 114n + 120 \\
   120n + 6n^2 - 114n &= 120 \\
   6n^2 + 6n &= 120 \\
   6n(n+1) &= 120 \\
   n(n+1) &= 20
   \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Quelque soit } n \in \mathbb{N}^*,\ n(n+1) = 20.}$$

4. En déduire la valeur de n et interpréter ce résultat.

   Résolvons dans $\mathbb{N}^*$, $n(n+1) = 20$.

   Nous cherchons deux entiers naturels consécutifs, n et $n+1$, dont le produit égale 20. Il n'y a qu'une possibilité 4 et 5.

   $$\boxed{n = 4.}$$

   Autrement dit :

   $$\boxed{\text{le batelier descend la rivière en 4 jours et la remonte en 5.}}$$